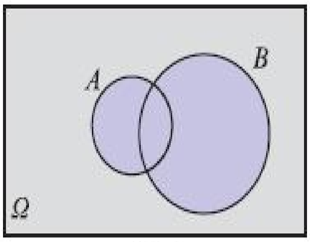
ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΗΣ Τ.Θ.Δ.Δ.

ΘΕΜΑ Β

Β1 α) Από τους κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων έχουμε:

$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)-P(A-B)$ και από τα δεδομένα παίρνουμε: $P(A\cap B)=\frac{3}{4}-\frac{5}{8}\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{8}$

β) i) Στη γλώσσα των συνόλων η έκφραση : «Α ή Β» είναι η ένωση των συνόλων Α και Β, δηλαδή $A\cup B$. Το αντίστοιχο διάγραμμα Venn είναι το παρακάτω:



$A\cup B$

ii) Έχουμε: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A\cup B)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\Leftrightarrow P(A\cup B)=\frac{7}{8}$

Β2. Τα δεδομένα του προβλήματος μεταφράζονται στη γλώσσα των συνόλων και των πιθανοτήτων:

$P(A)=0,7$
$P(M)=0,4$
$P(A\cap M)=0,2$

α) Τα ενδεχόμενα μεταφράζονται στη κοινή γλώσσα όπως παρακάτω:

i) $A\cup M$: Ο κάτοικος της πόλης να έχει αυτοκίνητο ή να έχει μηχανάκι .

ii) $M-A$: Ο κάτοικος της πόλης να έχει να έχει μόνο μηχανάκι .

iii) M' : Ο κάτοικος της πόλης να να μην έχει μηχανάκι .

β) Οι ζητούμενες πιθανότητες είναι:

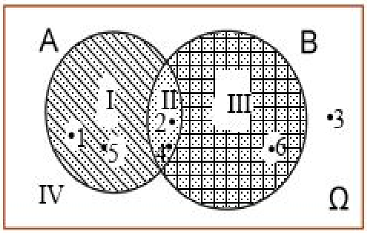
i) $P(M')=1-P(M)=1-0,4$ και άρα $P(M')=0,6$

ii) $P(A\cup M)'=1-P(A\cup M)$ (1) και

$P(A\cup M)=P(A)+P(M)-P(A\cap M)$
$P(A\cup M)=0,7+0,4-0,2$
$P(A\cup M)=0,9$

Επομένως, από τη σχέση (1), θα έχουμε: $P((A\cup M))'=1-0,9\Leftrightarrow P((A\cup M))'=0,1$

Β3. α) Έχουμε:



Διάγραμμα Venn (Οι σημειούμενες περιοχές(I), (II), (III) παριστάνουν την $A\cup B$.

$A\cap B$: περιοχή II , A' : περιοχή III και IV, B' : περιοχή I και IV)

Τα ζητούμενα σύνολα είναι:

$A\cup B=\{1,2,4,5,6\}$

$A\cap B=\{2,4\}$

$A'=\{3,6\}$

$B'=\{1,3,5\}$

β) i) Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου: A', δηλαδή $P(A')=\dfrac{N(A')}{N(\Omega)}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

ii) Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου: $A\cap B$, δηλαδή

$$P(A\cap B)=\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

iii) Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου: $A\cup B$, δηλαδή $P(A\cup B)=\dfrac{N(A\cup B)}{N(\Omega)}=\dfrac{5}{6}$

Β4. α) Ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος φαίνεται στον επόμενο πίνακα διπλής εισόδου:

	Δ	Κ	Μ
Ε	ΔΕ	ΚΕ	ΜΕ
Ζ	ΔΖ	ΚΖ	ΜΖ

Είναι: $\Omega=\{\Delta E, KE, ME, \Delta Z, KZ, MZ\}$ με $N(\Omega)=6$.

β) Για τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ , όπως περιγράφονται στο πρόβλημα έχουμε:

$A=\{KE,KZ,ME,MZ\}, N(A)=4$ και άρα έχουμε $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\dfrac{2}{3}$

Είναι $B=\{\Delta Z,KZ,MZ\}, N(B)=3$ και άρα έχουμε $P(B)=\dfrac{N(B)}{N(\Omega)}=\dfrac{1}{2}$

Είναι $\Gamma=\{ME,MZ\}, N(\Gamma)=2$ και άρα έχουμε $P(\Gamma)=\dfrac{N(\Gamma)}{N(\Omega)}=\dfrac{1}{3}$

B5. α) Λεκτική ερμηνεία:

i) $A \cup B$: Ο μαθητής να συμμετέχει στη θεατρική ομάδα ή στην ομάδα ποδοσφαίρου

ii) $A \cap B$: Ο μαθητής να συμμετέχει στη θεατρική ομάδα και στην ομάδα ποδοσφαίρου

iii) $B - A$: Ο μαθητής να συμμετέχει στην ομάδα ποδοσφαίρου αλλά όχι στη θεατρική ομάδα iv) A' : Ο μαθητής να μην συμμετέχει στη θεατρική ομάδα .

β) **i)** Από την περιγραφή του προβλήματος έχουμε:

$$P(A) = 0,25$$
$$P(B) = 0,3$$
$$P(A \cap B) = 0,15$$

Ζητάμε την πιθανοτητα του ενδεχομένου $B - A$ και άρα έχουμε:

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(B - A) = 0,3 - 0,15 \text{ ή } P(B - A) = 0,15 \text{ ή } 15\%$$

ii) Ζητάμε την πιθανοτητα του ενδεχομένου $(A \cup B)'$ και άρα έχουμε:

$$P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$$
$$P(A \cup B)' = 1 - (0,25 + 0,30 - 0,15)$$
$$P(A \cup B)' = 0,6$$

B6. Έστω Α, Β και Γ, αντίστοιχα, τα ενδεχόμενα: «Ο μαθητής που επιλέξαμε να είναι της Α΄, της Β΄ και της Γ΄τάξης" και Ω το σύνολο των μαθητών του σχολείου.

Από την περιγραφή του προβλήματος προκύπτει: $N(\Omega) = 400$, $N(A) = 200$, όπου $N(\Omega)$ και $N(A)$ το πλήθος των μαθητών του λυκείου και της Α΄τάξης αντίστοιχα.

Ακόμα, $P(\Gamma) = 0,2$.

α) Έχουμε (αφού η επιλογή είναι τυχαία, θεωρούμε ότι ο Ω αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα):

$$P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow 0,2 = \frac{N(\Gamma)}{400} \Leftrightarrow N(\Gamma) = 0,2 \cdot 400 \Leftrightarrow N(\Gamma) = 80 \text{ μαθητές της Γ΄τάξης.}$$

β) Έχουμε: $N(B) = N(\Omega) - N(A) - N(\Gamma) \Rightarrow N(B) = 120$ μαθητές της Β΄τάξης.

γ) Έχουμε: $P(B) = \dfrac{N(B)}{N(\Omega)} \Rightarrow P(B) = \dfrac{120}{400}$, δηλαδή $P(B) = 0,3$ ή 30% .

B7. Από τα στοιχεία του δοθέντος πίνακα έχουμε:

Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι: $\Omega = \{11,\ 12,\ 13,\ 21,\ 22,\ 23,\ 31,\ 32,\ 33\}$.

Τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ, όπως περιγράφονται στο πρόβλημα είναι:

$$A = \{12, 22, 32\}$$
$$B = \{12\}$$
$$\Gamma = \{12, 21, 22, 32, 33\}$$

και άρα N(A)=3, N(B)=1 και N(Γ)=5, όπου N(A), N(B) και N(Γ) το πλήθος των στοιχείων των ενδεχομένων A, B και Γ αντίστοιχα.

Έτσι έχουμε αντίστοιχα:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{3}$$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{1}{9}$$

$$P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{5}{9}$$

B8. α) i) A' **ii)** $K \cup \Pi$

β) Από την περιγραφή των δεδομένων του προβλήματος έχουμε:

$N(A) = 5$

$N(M) = 9$

$N(K \cup \Pi) = 16$

$N(\Omega) = 30$

, όπου $N(A)$, $N(M)$, $N(K \cup \Pi)$ το πλήθος από τις μπάλες A, M, K ή Π αντίστοιχα στο κουτί και $N(\Omega) = 30$ το πλήθος από όλες τις μπάλες.

Έτσι θα έχουμε:

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{N(A)}{N(\Omega)} = 1 - \frac{5}{30} = 1 - \frac{1}{6} \text{ ή } P(A') = \frac{5}{6}$$

$$P(K \cup \Pi) = \frac{N(K \cup \Pi)}{N(\Omega)} = \frac{8}{15}$$

B9. Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε:

$P(A) = 0,5$

$P(B) = 0,4$

$P(A \cap B) = 0,1$

α) Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A \cup B$ και άρα έχουμε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 + 0,4 = 0,1 = 0,8$$

β) Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $(A \cup B)'$ και άρα έχουμε:

$$P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 0,2$$

B10. Αν Ω είναι το σύνολο όλων των μαθητών του σχολείου θα είναι: N(Ω)= 180.

Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε: N(A)= 20, N(B)= 30, $N(A \cap B) = 10$ και οι πιθανότητες αντίστοιχα των ενδεχομένων αυτών είναι:

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{20}{180}=\frac{1}{9}$$

$$P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{30}{180}=\frac{1}{6}$$

$$P(A\cap B)=\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}=\frac{10}{180}=\frac{1}{18}$$

α) i) $A\cup B$: ο μαθητής να συμμετέχει στη θεατρική ομάδα ή στην ομάδα στίβου.

ii) $B-A$ **:** ο μαθητής να συμμετέχει μόνο στην ομάδα στίβου.

iii) A' : ο μαθητής να μη συμμετέχει στη θεατρική ομάδα.

β) i) Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $(A\cup B)'$ και έχουμε:
Από τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{9}+\frac{1}{6}-\frac{1}{18}=\frac{2}{9} \text{ και άρα}$$

$$P[(A\cup B)]'=1-P(A\cup B)=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$$

ii) Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $B-A$ και έχουμε:

$$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{6}-\frac{1}{18}=\frac{1}{9}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. α) Αν Α θεωρήσουμε το ενδεχόμενο ο μαθητής να παρακολουθεί Αγγλικά και Γ το ενδεχόμενο να παρακολουθεί Γαλλικά , τότε από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε:

$P(\Gamma') = 0,8$

$P(A) = 4P(\Gamma)$

$P(A \cup \Gamma) = 0,9$

$P(\Gamma) + P(\Gamma') = 1 \Leftrightarrow P(\Gamma) = 1 - 0,8 \Leftrightarrow P(\Gamma) = 0,2$

$P(A) = 4P(\Gamma) \Leftrightarrow P(A) = 0,8$

i) Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $(A \cap \Gamma)$ και έτσι έχουμε:

$$P(A \cap \Gamma) = P(A) + P(\Gamma) - P(A \cup \Gamma)$$

$$P(A \cap \Gamma) = 0,8 + 0,2 - 0,9 \Leftrightarrow P(A \cap \Gamma) = 0,1$$

ii) Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $(A - \Gamma) \cup (\Gamma - A)$ και έτσι, αφού τα ενδεχόμενα $A - \Gamma$ και $\Gamma - A$ είναι ασυμβίβαστα, έχουμε:

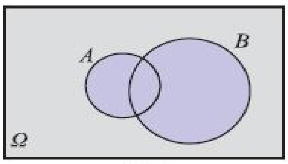
$$P[(A - \Gamma) \cup (\Gamma - A)] = P(A - \Gamma) + P(\Gamma - A) = P(A) - P(A \cap \Gamma) + P(\Gamma) - P(A \cap \Gamma) =$$
$$P(A) + P(\Gamma) - 2P(A \cap \Gamma) = 0,8 + 0,2 - 2 \cdot 0,1 = 0,8$$

β) Έχουμε: $P(A - \Gamma) = P(A) - P(A \cap \Gamma) = 0,8 - 0,1 = 0,7$

Αφού τα απλά ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου είναι ισοπίθανα, θα είναι:
$P(A - \Gamma) = \dfrac{N(A - \Gamma)}{N(\Omega)} \Rightarrow 0,7 = \dfrac{14}{\nu} \Rightarrow \nu = 20$. Άρα το πληθος των μαθητών του τμήματος είναι 20 .

Δ2. α) Αν N(A), N(B) αντίστοιχα το πλήθος των στοιχείων των ενδεχομένων Α και Β όπως ορίζονται στο πρόβλημα θα έχουμε: N(A)= 60 , N(B)= 50 και $N(A \cap B) = 30$.

Ακόμα, N(Ω)=100 . Τα δεδομένα αυτά παριστάνονται με ένα διάγραμμα Venn όπως παρακάτω:



$A \cup B$

β) Αν Α το ενδεχόμενο: «Ο μαθητής να απάντησε σωστά στο 1^{ο} θέμα»,
Β το ενδεχόμενο: «Ο μαθητής να απάντησε σωστά στο 2^{ο} θέμα» .

Γ το ενδεχόμενο: «Ο μαθητής να μην απάντησε σωστά ούτε στο $1^{ο}$ ούτε στο $2^{ο}$ θέμα», τότε:

i) Μόνο στο δεύτερο θέμα απάντησαν σωστά 50-30=20 μαθητές. Άρα: $P(B-A)=\dfrac{20}{100}=0,2$

ii) Για να βαθμολογηθεί με άριστα ο μαθητής θα πρέπει να απαντήσει και στα δύο θέματα δηλαδή ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου ($A\cap B$), άρα : $P(A\cap B)=\dfrac{30}{100}=0,3$

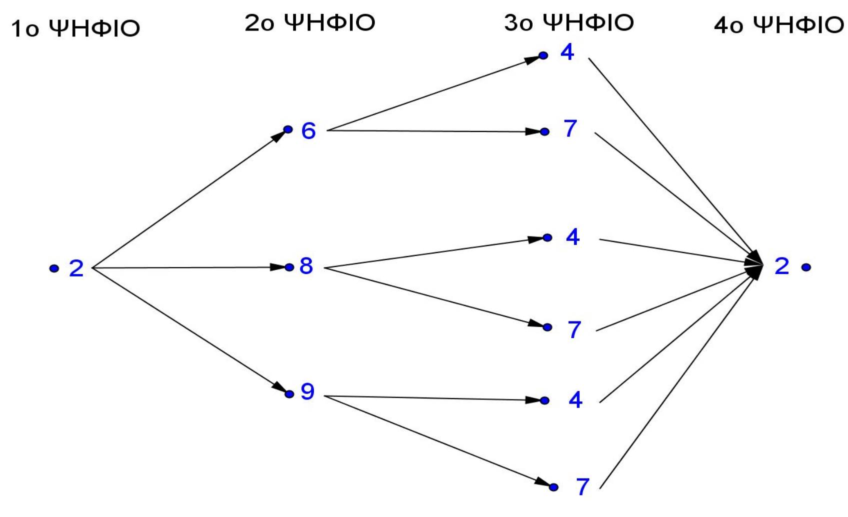
iii) Από το σύνολο των 100 μαθητών μόνο οι 20 δεν απάντησαν σε κανένα θέμα και άρα:

$P(\Gamma)=\dfrac{20}{100}=0,2$

iv) Για να περάσει την εξέταση ο μαθητής θα πρέπει να απάντησε σωστά σε ένα τουλάχιστον από τα δύο θέματα. Άρα ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A\cup B$. Άρα:

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,6+0,5-0,3=0,8$ ή αλλιώς οι 80 μαθητές απάντησαν τουλάχιστον σε ένα από τα δύο θέματα και άρα $P(A\cup B)=\dfrac{80}{100}=0,8$

Δ3. α) Με χρήση του παρακάτω δεντροδιαγράμματος



καταλήγουμε στους δυνατούς συνδυασμούς: 2972, 2942, 2872, 2842, 2672, 2642 , δηλαδή 6 συνδυασμοί.

β) Οι παραπάνω συνδυασμοί της πινακίδας αποτελούν και το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος, δηλαδή $\Omega=\{2972,2942,2872,2842,2672,2642\}$ με πλήθος $N(\Omega)=6$.

Από την περιγραφή των δεδομένων του προβλήματος προκύπτει ότι:

$A=\{2972,2872,2672\}$. με $N(A)=3$ και άρα, αφού οι αριθμοί των πινακίδων είναι ισοπίθανα ενδεχόμενα,

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\ .$$

Ακόμα: $B=\{2642,2672,2872,2842\}$, με $N(B)=4$ και άρα, αφού οι αριθμοί των πινακίδων είναι ισοπίθανα ενδεχόμενα, $P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

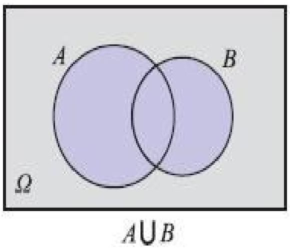
Τέλος $\Gamma=\{2672,2642\}$ με $N(\Gamma)=2$ και άρα, αφού οι αιθμοί των πινακίδων είναι ισοπίθανα ενδεχόμενα, $P(\Gamma)=\frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

Δ4. α) i) Αν θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα:

Α: «το άτομο που επιλέξαμε να είναι άντρας» και

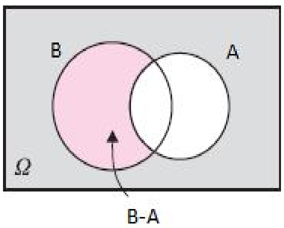
Β: «το άτομο που επιλέξαμε να παίζει σκάκι» τότε το περιγραφόμενο ενδεχόμενο: «να είναι άντρας ή να παίζει σκάκι» είναι το $A\cup B$

Το ζητούμενο διάγραμμα Venn για το ενδεχόμενο $A\cup B$ φαίνεται παρακάτω:



ii) Το περιγραφόμενο ενδεχόμενο: «να μην είναι άντρας και να παίζει σκάκι» είναι το $B-A$.

Το ζητούμενο διάγραμμα Venn για το ενδεχόμενο B-A φαίνεται παρακάτω:



β) Οι γυναίκες που παίζουν σκάκι είναι 2 και το σύνολο των παικτών της ομάδας είναι 20, άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{2}{20}=0,1$

Δ5. Από την περιγραφή των δεδομένων του προβλήματος προκύπτει ότι:

$P(A\cup B)=0,8$

$P(A)=0,6$

$P(B)=0,45$

α) Με χρήση της γλώσσας των συνόλων έχουμε:

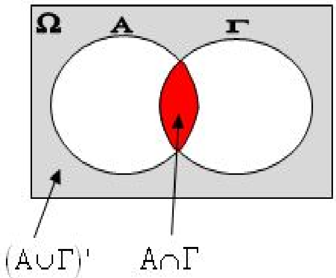
i) $(A\cup B)'$ ii) $A\cap B$ iii) $A-B$

β) Έχουμε:

- $P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)$ ή $P(A\cup B)'=1-0,8=0,2$.
- $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$ ή

  $P(A\cap B)=0,6+0,45-0,8=0,25$
- $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=0,6-0,25=0,35$

Δ6. α) Το ζητούμενο διάγραμμα Venn για τα ενδεχόμενα Α και Γ είναι το παρακάτω:



Τα ενδεχόμενα που περιγράφονται με τη χρήση της γλώσσας των συνόλων γράφονται:

«Ο μαθητής που επιλέχθηκε να εξεταστεί δεν έχει διαβάσει ούτε Άλγεβρα ούτε Γεωμετρία», δηλαδή το ενδεχόμενο $(A\cup\Gamma)'$

«Ο μαθητής που επιλέχθηκε να εξεταστεί να έχει διαβάσει και Άλγεβρα και Γεωμετρία», δηλαδή το ενδεχόμενο $A\cap\Gamma$.

β) Από την περιγραφή των δεδομένων του προβλήματος προκύπτουν:

$$P[(A\cup\Gamma)]'=\frac{1}{4} \text{ και } P(A\cap\Gamma)=\frac{1}{3}$$

i) Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $(A\cup\Gamma)$ και άρα:

$$P(A\cup\Gamma)'=1-P(A\cup\Gamma)\Leftrightarrow P(A\cup\Gamma)=1-P(A\cup\Gamma)'=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \text{ , αφού } P(A\cup\Gamma)'=\frac{1}{4}$$

ii) Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $(A-\Gamma)\cup(\Gamma-A)$ και άρα (αφού τα ενδεχόμενα $A-\Gamma$ και $\Gamma-A$ είναι ασυμβίβαστα) θα έχουμε:

$$P[(A-\Gamma)\cup(\Gamma-A)]=P(A-\Gamma)+P(\Gamma-A)=P(A)-P(A\cap\Gamma)+P(\Gamma)-P(A\cap\Gamma)=$$

$$=P(A\cup\Gamma)-P(A\cap\Gamma)=\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$$

γ) i) $P(\Gamma)=\dfrac{1}{2}$

ii) Έχουμε:

$$P(A\cup\Gamma)=P(A)+P(\Gamma)-P(A\cap\Gamma)\Leftrightarrow P(A)+P(\Gamma)=P(A\cup\Gamma)+P(A\cap\Gamma)\Leftrightarrow$$

$$P(A)+P(\Gamma)=\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\Leftrightarrow P(A)+P(\Gamma)=\frac{13}{12}$$

και επειδή $P(\Gamma)=\frac{1}{2}$, θα είναι: $P(A)=\frac{13}{12}-\frac{1}{2}=\frac{7}{12}$