

Επαναληπτικό Διαγώνισμα Προσομοίωσης Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου

Διάρκεια : 3 ώρες

4 Μαΐου 2014

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.
Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

Μονάδες 8

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 4

A3. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ . Να διατυπώσετε τον ορισμό της αρχικής συνάρτησης ή παράγουσας της f στο Δ .

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (**Σ**) ή Λάθος (**Λ**).

α) Για οποιονδήποτε μιγαδικό αριθμό z ισχύει ότι

$$|\bar{z}| = |-z|.$$

β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ ή $+\infty$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

γ) Αν $0 < \alpha < 1$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0.$$

δ) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

ε) Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

Μονάδες 5·2=10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύει ότι:

- οι εικόνες των μιγαδικών z είναι σημεία του κύκλου με κέντρο το $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 2$
- $w = \frac{2z + 5}{z + 1}$.

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w είναι ο κύκλος με κέντρο το $K(1, 0)$ και ακτίνα $\rho = 2$.

Μονάδες 9

B2. Να αποδείξετε ότι

$$\left| w + \frac{4 - \bar{z}}{z} \right| \leq 4.$$

Μονάδες 8

B3. Αν w_1, w_2 , με $w_1 \neq w_2$, δύο μιγαδικοί που οι εικόνες τους ανήκουν στο γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος **B1**, να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός

$$u = \frac{w_1 + w_2 - 2}{w_1 - w_2}$$

είναι φανταστικός.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f'(x) - f(x) = x - 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 1.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x - x$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Γ2. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

Μονάδες 5

Γ3. Να λύσετε στο \mathbb{R} την εξίσωση $f(x) + f(x^2) + f(x^3) = 3$.

Μονάδες 3

Γ4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες, αν υπάρχουν, της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

Γ5. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο $B(1, 0)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, οι οποίες για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιούν τις σχέσεις:

- $f(x) \neq 0$ και $g(x) \neq 0$
- $f(x) = \int_0^x \frac{t}{g(t)} dt + 1$
- $g(x) = \int_0^x \frac{t}{f(t)} dt + 1$

Δ1. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και

$$g(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} και ότι

$$f(x) = g(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 8

Δ3. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 6

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$h(x) = \int_1^x \frac{1}{f(t)} dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x = 1$.

Μονάδες 7

Σας ευχόμαστε επιτυχία στις εξετάσεις!