ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο : ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

(θέματα: Β, Γ και Δ)

ΘΕΜΑ 1ο

Έστω η συνάρτηση $f(x)=(\lambda-2)x^2-2|\lambda|x+\lambda+2$ με λ∈R – {2}.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο άνισες ρίζες για κάθε λ∈R – {2}.

Δ2. Για λ = 4:

Δ.2.1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f(x) καθώς και τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x'x και y'y.

Δ.2.2. Να λύσετε την εξίσωση $|f(x)|=2x-2$.

Δ.2.3. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $A=\dfrac{\sqrt[4]{f(5)}}{\sqrt{f(4)}-1}-\dfrac{2}{\sqrt{f(0)}+1}$, είναι ρητός.

Δ.3. Για ποιες τιμές $x\in\mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη διχοτόμο της 2ης και 4ης γωνίας των αξόνων ;

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{x^3-4x}{x^2+2x}$

Β.1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Β.2. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

Β.3. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες x΄x και y΄y.

Β.4. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi=\dfrac{2014^3-4\cdot 2014}{2014^2+2\cdot 2014}$.

ΘΕΜΑ 3^{ο}

Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{(2x^2+7x-15)(4x-4)}{8x-12}$

Γ.1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι $f(x)=x^2+4x-5$.

Γ.2. Για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$;

Γ.3. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\sqrt{f(3)}+\sqrt[3]{8f(4)}}{\sqrt{f(2)}-3}=-5(\sqrt{7}+3)$

ΘΕΜΑ 4^{ο}

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=2x^2+3x+1$

Β.1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f (x)

Β.2. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η f έχει:

Β.2.1. θετικές τιμές

Β.2.2. αρνητικές τιμές

Β.3. Να λύσετε την ανίσωση f (x)$>$ 1

ΘΕΜΑ 5^{ο}

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{-x^2+6x-8}}$.

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Δ2. Να απλοποιήσετε τη συνάρτηση $h(x)=\left[f(x)\right]^2\cdot\left(4-x^2\right)$.

Δ3. Αν $h(x)=\dfrac{2+x}{x-4}$, να κατασκευάσετε την εξίσωση δευτέρου βαθμού με

Ρίζες τις $x_1=h(3)$ και $x_2=\dfrac{1}{h(3)}$.

ΘΕΜΑ 6^{ο}

Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x)=\dfrac{x}{x-2}+\sqrt{x-1}$.

Β.1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .

Β.2. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις τιμές της συνάρτησης g για $x=1, x=3$ και για $x=0$

Β.3. Αν $g(3)=3+\sqrt{2}$ και $g(1)=-1$ να λύσετε την εξίσωση: $g(3)+2\alpha=\sqrt{2}-g(1)$.

ΘΕΜΑ 7ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο : $f(x)=\begin{cases} 3x^2+2x-1 & , x\geq 0 \\ |2x-3| & , x<0 \end{cases}$

Β.1. Να βρείτε τις τιμές : $f(0)$, $f(-2)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Β.2. Αν $x\geq 0$, να λύσετε την ανίσωση : $f(x)<0$.

Β.3. Αν $x<0$, να λύσετε την ανίσωση : $f(x)\leq 5$.

ΘΕΜΑ 8ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x + 7$, $x \in \mathbb{R}$

Β.1. Να λύσετε την εξίσωση : $|f(x)| = 5$

Β.2. Να λύσετε την ανίσωση : $|f(x)| \leq 3$

Β.3. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$

Β.4. Να βρείτε τα σημεία A(1, f(1)) και B(3, f(3)) καθώς και την απόσταση (AB)

ΘΕΜΑ 9Ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{2x-3}{x-2} + \frac{2-x^2}{x^2-2x}$

Β.1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

Β.2. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις τιμές: $f(-1)$ και $f(2)$, $f(f(1)$

Β.3. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

ΘΕΜΑ 10ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 - x - 6$, $x \in R$

Β.1. Να λύσετε την την εξίσωση $f(x) = 0$

Β.2. Να βρείτε τα $x \in R$, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να βρίσκεται πάνω από την ευθεία με εξίσωση ψ=-6 και κάτω από τον άξονα $x'x$

Β.3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$

ΘΕΜΑ 11^{ο}

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x)=\dfrac{4x^2-1}{2x^2-3x+1}$ *και* $g(x)=\dfrac{1}{2}$.

Γ. 1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g

Γ. 2. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$

Γ. 3. Να απλοποιήσετε το τύπο της συνάρτησης f

Γ. 4. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g

ΘΕΜΑ 12^{ο}

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=x^2-5x+4,\ \ Q(x)=9-x^2$ με $x\in\mathbb{R}$

Β.1. Να λύσετε κάθε μία από τις ανισώσεις $P(x)\geq 0$ και $Q(x)\geq 0$

Β.2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με $f(x)=\sqrt{P(x)}+\dfrac{1}{\sqrt{Q(x)}}$

ΘΕΜΑ 13^{ο}

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{3-|x-2|}}{x-5}$.

Γ.1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάερτησης f .

Γ.2. Να βρείτε τα σημεία που η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Γ.3. Να αποδείξετε ότι $f(3)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Γ.4. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=\dfrac{f(3)}{1-f(3)}+\dfrac{f(3)}{1+f(3)}$

ΘΕΜΑ 14^{Ο}

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x|x-3|}{\sqrt{1-|x|}}$

Γ.1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάτησης f

Γ.2. Να λύσετε την εξίσωση f (x)=0

Γ.3. Να λύσετε την εξίσωση $x^4-6x+1=-f(x)\sqrt{1-|x|}$

ΘΕΜΑ 15^{Ο}

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x)=\lambda x+\kappa$, $x\in\mathbb{R}$

Γ.1. Να βρείτε τα κ και λ , ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης φ να διέρχεται από τα σημεία A(-1,-3) και B($-\frac{1}{2}$,-2)

Γ.2. Για λ=2 και κ=-1 να βρείτε τα σημεία στα οποία η συνάρτηση φ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$

Γ.3. Να βρείτε την εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς κ , λ του ερωτήματος Γ.1.

ΘΕΜΑ 16^{Ο}

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με $f(x)=x^2-4x+3$ και $g(x)=|x-1|-2$

Β.1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h με $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Β.2. Αν $x\geq 1$ να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης $h(x)$

ΘΕΜΑ 17^{Ο}

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x)=\sqrt{|x|-2}, g(x)=\sqrt{x^2-9}$

Β.1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού τους .

Β.2. Να λύσετε την εξίσωση : $[f(x)]^2=[g(x)]^2-13$

ΘΕΜΑ 18^{Ο}

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt{-x^2+x+2}$

Γ.1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

Γ.2. Αν $|x|<1$ να απλοποιήσετε την παράσταση : $A(x)=[f(x)]^2+|x-3|+|x+2|$

Γ.3. Να λύσετε την εξίσωση $A(x)=7-4x$

ΘΕΜΑ 19^{Ο}

Έστω το σημείο Μ (λ^2-7λ+6 , $|\lambda-1|$-3) με $\lambda\in\mathbb{R}$

Γ.1. Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε το Μ να ανήκει στον θετικό ημιάξονα Οψ.

Γ.2. Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε το Μ να βρίσκεται στο 2^{ο} τεταρτημόριο των αξόνων.

Γ.3. Αν λ=2 να βρείτε:

Γ.3.1. Το συμμετρικό του Μ ως προς τον ψ΄ψ

Γ.3.2. Το συμμετρικό του Μ ως προς τη διχοτόμο ψ=x

Γ.3.3. Την απόσταση του Μ από το σημείο Α (8 , -7

ΘΕΜΑ 20ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x|-\dfrac{1}{|x|}}$

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x)=|x|$ και μετά να λύσετε την ανίσωση

$$3<f(2x-3)<5$$

Δ3. Να λύσετε την εξίσωση: $f^2(x+1)-5f(x+1)=-6$

Δ 4. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A=\sqrt{[(f(1)-f(4)]^2}+\sqrt{\sqrt{f(-9)}+2f(-3)}$$