

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ (Β, Γ και Δ)

Κεφάλαιο :3^ο και 4^ο -ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο (Γ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lambda x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda - 3$ με $\lambda \neq 0$

Γ1. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$ για $\lambda = -1$

Γ2. Για $\lambda = 3$, να λυθεί η ανίσωση $f(x) > 0$

Γ3. Να αποδείξετε ότι στην εξίσωση $f(x) = 0$, η διακρίνουσα είναι η $\Delta = 4\lambda + 4$

Γ4. Να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει ότι $x_1 + x_2 \geq x_1 \cdot x_2$

ΘΕΜΑ 2^ο (Β)

Έστω η εξίσωση $x^2 + \beta x + 6 = 0$ (1)

B1. Αν το 2 είναι ρίζα της εξίσωσης (1), να βρεθεί το β .

B2. Για $\beta = -5$

i) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 + \beta x + 6 = 0$.

ii) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 + \beta x + 6$.

iii) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + \beta x + 6 \neq 0$

ΘΕΜΑ 3^ο (Β)

Δίνονται οι ανισώσεις $|2x + 1| \geq 5$ (1) και $x^2 + x - 12 < 0$ (2)

B1. Να λύσετε την ανίσωση (1)

B2. Να λύσετε την ανίσωση (2)

B3. Κατόπιν να βρείτε τις κοινές λύσεις των (1) και (2) και να τις γράψετε σε μορφή συνόλων.

ΘΕΜΑ 4^ο (Β)

Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - ax + \beta$, όπου $a = \sqrt{100} - \sqrt{36}$ και $\beta = |-9| - |8| + 2$.

B1. Να αποδείξετε ότι $a = 4$ και $\beta = 3$.

Για $a = 4$ και $\beta = 3$,

B2. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - ax + \beta = 0$

B3. Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - ax + \beta > 3$

ΘΕΜΑ 5^ο (Γ)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2\lambda x - 8 = 0$

Γ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Γ2. Αν η μία ρίζα της εξίσωσης ισούται με το τετράγωνο της άλλης, να βρείτε τις ρίζες και την τιμή του λ .

Γ3. Αν $4S = P$, να βρείτε την τιμή του λ .

Γ4. Για $\lambda = 1$, να κατασκευάσετε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες διπλάσιες της αρχικής.

ΘΕΜΑ 6^ο (Γ)

Δίνεται η εξίσωση: $-x^2 + \lambda x + \lambda^2 + 1 = 0$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η εξίσωση έχει δυο πραγματικές και άνισες ρίζες.

Γ2. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης τότε να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε να ισχύει:

α) $|x_1| \cdot |x_2| = 10$.

β) $2(x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2 > -4$.

ΘΕΜΑ 7^ο (Γ ή Δ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 2(\kappa - 5) \cdot x - (\kappa - 5)$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι ίση με $\Delta = 4(\kappa - 3)(\kappa - 5)$.

Γ2. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

Γ3. Αν x_1, x_2 είναι οι άνισες ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$, να λύσετε ως προς κ την εξίσωση:

$$16(x_1 \cdot x_2)^4 - 5(x_1 + x_2)^2 + 4 = 0.$$

Γ4. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|f(x)| - f(x) = 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x

ΘΕΜΑ 8^ο (Β)

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = -x^2 + 3x - 3$

B1. Ν.δ.ο. $\varphi(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

B2. Να λυθεί η ανίσωση $|\varphi(x)| > 2x - 3$

ΘΕΜΑ 9^ο (Β)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 3x + |\lambda - 1| = 0$ (1)

B1. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η (1) να έχει πραγματικές ρίζες

B2. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της (1) και ισχύει $x_1 = 2x_2$, να βρείτε τις ρίζες

ΘΕΜΑ 10^ο (Β)

Έστω το $\varphi(x) = -3x^2 + 9x - 6$

B1. Να λυθεί εξίσωση $\varphi(x) = 0$

B2. Να βάλετε το κατάλληλο σύμβολο $<, >, =$ στα παρακάτω με αιτιολόγηση σε κάθε περίπτωση

$\varphi(2004) \dots 0$

$\varphi(\sqrt{2}) \dots 0$

$\varphi\left(\frac{2004}{2002}\right) \dots 0$

$\varphi(1) \dots 0$

B3. Να λυθεί η ανίσωση $\varphi(x) \cdot (x+3) \leq 0$

ΘΕΜΑ 11^ο (Γ)

Έστω $A(x) = x^2 + 6x + 9$ και $B(x) = -x^2 - 7x - 12$

Γ1. Να γίνουν γινόμενα τα $A(x)$ και $B(x)$

Γ2. Αν $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ να βρεθεί το πεδίο ορισμού της και να απλοποιηθεί ο τύπος της

Γ3. Να λυθεί η ανίσωση $\sqrt{A(x)} < 2008$

Γ4. Να λυθεί η ανίσωση $f(x) \geq 0$

ΘΕΜΑ 12^ο (Β)

Έστω η εξίσωση $x^2 - (\lambda^2 - 3\lambda)x - \lambda + 1 = 0$ (1) . Να βρείτε το λ ώστε:

B1. η (1) να έχει δύο ρίζες ετερόσημες

B2 μία ρίζα της (1) να είναι 0 αριθμός -2

B3. αν x_1, x_2 οι ρίζες της (1) να ισχύει: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 1$

ΘΕΜΑ 13^ο (Β)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + x - \kappa^2 = 0$ (1) , $\kappa \in \mathbb{R}$

B1. N.δ.ο η (1) έχει δύο πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του κ

B2. Αν ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της (1) τότε:

N.δ.ο. $\rho_1 + \rho_2 = -1$ και $\rho_1 \cdot \rho_2 = -\kappa^2$ και να βρείτε το κ αν $\rho_1(\kappa + \rho_2) + \kappa\rho_2 > -6$

ΘΕΜΑ 14^ο (Γ)

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 + 5x - 3$

Γ1. Να λυθεί η ανίσωση $f(x) < 0$

Γ2. Αν $x \in (-3, 1/2)$ να λυθεί η εξίσωση $|2x^2 + 7| + |f(x)| = 0$

Γ3. Αν $x < -3$ να απλοποιήσετε το κλάσμα $\frac{(2x-6)|f(x)|}{(x^2-9)(1-2x)}$

ΘΕΜΑ 15^ο (Γ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\lambda + 2)x^2 - 5\lambda x - 2$ με $\lambda \neq -2$

Γ1. Αν $\lambda = 1$:

να λυθεί η ανισότητα $f(x) \leq 0$ και να βρείτε τα πρόσημα των $f(-2)$, $f(-2/3)$, $f(5/2)$,

$f(1/\sqrt{2})$

Γ2. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της $f(x) = 0$ και S, P το άθροισμα και το γινόμενο τους τότε:

1. N.δ.ο. $(S - x_1)(S - x_2) = P$

2. Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε να ισχύει : $(S - x_1)(S - x_2) = S$

ΘΕΜΑ 16^ο (Γ ή Δ)

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = (\lambda + 1)x^2 - (2\lambda + 1)x + \lambda - 2$ με $\lambda \neq -1$.

Γ1. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Γ2. Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δυο ρίζες x_1, x_2 , να απλοποιηθεί η παράσταση

$$\left(x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2\right) \cdot \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 - 5\lambda + 6}.$$

Γ3. Για $\lambda = 0$, να λυθεί η ανίσωση $f(x) \cdot |x^2 + 1| \geq 0$

ΘΕΜΑ 17^ο (Γ ή Δ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lambda x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda - 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Γ1. Αν $\lambda = 0$, να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται το κλάσμα $K(x) = \frac{2010 \cdot f(x)}{2x^2 + 9x - 5}$, και στη συνέχεια να το απλοποιήσετε.

Γ2. Έστω $\lambda \neq 0$. Να δείξετε ότι αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, τότε $\lambda < 1$.

Γ3. α) Αν $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ και $\lambda < 1$, να υπολογίσετε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της $f(x) = 0$ ως συνάρτηση του λ .

β) Αν x_1, x_2 με $x_1 \neq x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$, να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, ισχύει $x_1 + x_2 - x_1 x_2 > 0$.

ΘΕΜΑ 18 (Γ)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (|\lambda - 1| - 2) - (|2\lambda - 2| - 4) = 0$ (1)

Γ1. Να λυθεί η εξίσωση (1) για $\lambda = 4$

Γ2. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι πραγματικές και ίσες.

Γ3. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι πραγματικές και άνισες.