ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΗΣ Γ΄ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1

Α. Πότε μια συνάρτηση $f(x)$ λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

(Μονάδες 07)

Β. Να αποδείξετε οτι για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ισχύει: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. **(Μονάδες 08)**

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό ή λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

α. Αν $z^2 + w^2 = 0$ με $z, w \in \mathbb{C}$ τότε πάντοτε ισχύει $z = w = 0$.

β. Β.Αν η εξίσωση αx^2 + βx + γ = 0, α $\neq$ 0, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ έχει ρίζα τον $2+i$ θα έχει και τον $\frac{5}{2+i}$.

γ.Αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της $f: D_f \to \mathbb{R}$, τότε ισχύει πάντοτε οτι $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ για κάθε $x \in D_f$.

δ. Αν μια συνάρτηση $f(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι συνεχής στο x_0.

ε. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε ορίζεται πάντα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$. **(5x2= μονάδες 10)**

ΘΕΜΑ 2

Α1. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί να αποδειχθεί ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
Μονάδες 10

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο x_0 του πεδίου ορισμού της
Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος**.

(i). Για κάθε μιγαδικό αριθμό z, ισχύει: $|z|^2 = z^2$

(ii). Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους

(iii). Κάθε συνάρτηση που είναι «1 – 1» στο πεδίο ορισμού της είναι γνησίως μονότονη

(iv). Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της τότε είναι και παραγωγίσιμη

(v). $(συνx)' = ημx$ **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 3

Α. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 που ανήκει στο πεδίο ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. **(μονάδες 13)**

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες, γράφοντας στο γραπτό σας τη λέξη ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

α. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους

β. Για κάθε $z \in C$ ισχύει $z^2 = z\bar{z}$

γ. (συνχ)′ = ημχ

ε. Για κάθε συνάρτηση f που είναι γνησίως αύξουσα σε διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ισχύει f′(x) > 0 για κάθε x ∈ Δ. **(μονάδες 12)**

ΘΕΜΑ 4

Α1 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^{\nu}, \nu \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(x^{\nu})' = \nu x^{\nu-1}$. **Μονάδες 7**

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού . **Μονάδες 4**

Α3. Πότε δυο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες ; **Μονάδες 4**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε είναι και παραγωγίσιμη στο x_0 .

β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$

γ) Κάθε συνάρτηση που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της είναι γνησίως μονότονη.

δ) Για κάθε μιγαδικό z ισχύει $|z| = |\bar{z}| = |-z|$.

ε) Οι γραφικές παραστάσεις C και C′ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x′Oy′. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 5

Α1. Να αποδείξετε ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ όπου z_1, $z_2 \in C$ **(μονάδες10)**

Α2.Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, γράφοντας στην κόλλα σας την ένδειξη ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση **(μονάδες10)**

1. Ισχύει: $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ όπου z_1, $z_2 \in C$

2. $(\varepsilon\varphi x)' = \dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$

4 . Ισχύει $|\eta\mu x| \le \dfrac{1}{|x|}$

5 . Αν f,g συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο x_o τότε :

$$(f+g)'(x_o) = f'(x_o)\cdot g'(x_o) + f(x_o)\cdot g(x_o)$$

Α3. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α είναι συνεχής στο $x_o \in A$ **(μονάδες 5)**

ΘΕΜΑ 6

Α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί τότε να αποδείξετε ότι : $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ **Μονάδες 10**

Β. Πότε μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ; **Μονάδες 5**

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

2. Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$ τότε και η $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

3. Κάθε συνεχής συνάρτηση είναι και παραγωγίσιμη.

4. Αν μία συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται ΄΄πάνω ΄΄ από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

5. Ισχύει : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$ **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 7

Α. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν:

- Οι f, g συνεχείς στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ,

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$ **(Μονάδες 10)**

Β. Πότε μία ευθεία x = x_0 λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

(Μονάδες 5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτινών τους.

β) Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών εκφράζει, στο μιγαδικό επίπεδο την απόσταση των εικόνων τους.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι 1-1 τότε είναι και γνησίως μονότονη.

δ) Ένα τοπικό μέγιστο είναι πάντα μεγαλύτερο από ένα τοπικό ελάχιστο.

ε) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ τότε το σύνολο τιμών της f στο Δ θα είναι διάστημα.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 8

Α1. Να αποδείξετε ότι για κάθε μιγαδικούς αριθμούς z_1 , z_2 ισχύει $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ **Μονάδες 10**

Α2. Πότε μια συνάρτηση ονομάζεται 1 – 1 στο πεδίο ορισμού της Α ; **Μονάδες 5**

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

β. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ , τότε είναι και 1 – 1.

γ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(x_0) = 0$ τότε ισχύει πάντοτε f(α)·f(β) < 0.

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

ε. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ με $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε η f είναι κοίλη στο Δ.

Μονάδες 5x2=10

ΘΕΜΑ 9

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f(x)=c, είναι f ′(x)=0. (μονάδες 5)

β) Να χαρακτηρίσετε ως σωστή(Σ) η λάθος(Λ) καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

i)Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη,τότε είναι και <<1-1>>.

ii)Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής, τότε είναι και παραγωγίσιμη.

iii) lim(k ·f(x))=k· limf(x)

χ→χ0 χ→χ0

iv) Δυο συναρτήσεις f και g λέγοναι ίσες όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού. (μονάδες 10)

γ) Να διατυπώσετε το Θεώρημα Rolle. (μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 10

Α. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a,\beta]$.Να αποδείξετε ότι : αν η f είναι συνεχής στο $[a,\beta]$ και $f(a) \neq f(\beta)$,τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(a)$ *και* $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (a,\beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=\eta$. **(10 μονάδες)**

Β. Τι ονομάζεται μέτρο του μιγαδικού $z = x + yi$. **(5 μονάδες)**

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την **έ**κφραση «σωστό» ή λάθος».

α. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 , τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0.

β. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α , λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$,όταν ισχύει $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

γ. Ισχύει $(\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x$ $, x \in \mathbb{R}$

δ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 ,τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

ε. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0. **(10 μονάδες)**

ΘΕΜΑ 11

Α1. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. **Μονάδες 10**

Α2. Έστω Μ(x,y) η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z = x+yi στο μιγαδικό επίπεδο. Τι ορίζουμε ως μέτρο του z ; **Μονάδες 5**

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Μια συνάρτηση f: A→ $\mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$

β) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=0$

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε x∈ Δ ή είναι αρνητική για κάθε x∈ Δ, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

δ) Για κάθε μιγαδικό z ισχύει $|z|=z\cdot\bar{z}$

ε) Έστω η συνάρτηση f(x)=εφx. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R_1=R-{x| συνx=0} και ισχύει

$$f'(x)=-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 12

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 ισχύει $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$. **Μονάδες 10**

2. Πότε μια συνάρτηση λέγεται κυρτή σε ένα διάστημα Δ; **Μονάδες 5**

3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z, ισχύει $|z|^2=z^2$.

β. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β] και υπάρχει x_0 ϵ(α, β) ώστε $f(x_0)=0$ τότε σίγουρα f(α)·f(β)< 0.

γ. Η συνάρτηση f θα είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της Α αν για κάθε x_1, x_2 ϵ Α με $f(x_1) = f(x_2)$ να συνεπάγεται $x_1 = x_2$.

δ. Για κάθε συνάρτηση f που είναι γνησίως αύξουσα σε διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ισχύει f΄(x) > 0 για κάθε x ϵ Δ.

ε. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) και f(α) = f(β), τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ ϵ(α, β), τέτοιο ώστε f΄(ξ) = 0. **Μονάδες 5x2=10**

ΘΕΜΑ 13

Α1. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί να αποδειχθεί ότι $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

Μονάδες 10

Α2. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

i. Κάθε συνάρτηση που είναι "1−1" στο πεδίο ορισμού της είναι γνησίως μονότονη.

ii. Η ευθεία $y = l$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ όταν $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$.

iii. Ισχύει ότι $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 0$.

iv. Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ ορίζουμε $z^0 = 1$.

v. Για $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει $\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$.**Μονάδες 10**

Α3.Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο x_0 του πεδίου ορισμού της. **Μονάδες 5**

<u>ΘΕΜΑ 14</u>

Α) Πότε μια συνάρτηση f:A → IR λέγεται “1-1; (μονάδες 4)

Β) Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Bolzano (μονάδες 11)

Γ) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας τη λέξη *Σωστό ή Λάθος* δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α)Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών υπάρχει ένα στοιχείο i τέτοιο ώστε $i^{2} = 1$.

β)Για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1,z_2 ισχύει οτι $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$

γ) (συνχ)΄ = ημχ

δ (f(x)g(x))΄=f΄(x)g΄(x)

ε) Για κάθε z∈C ισχύει $|z^2| = z\bar{z}$ (μονάδες 10)

<u>ΘΕΜΑ 15</u>

Α. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 που ανήκει στο πεδίο ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. **(μονάδες 13)**

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως <u>Σωστές</u> ή <u>Λανθασμένες</u>, γράφοντας στο γραπτό σας τη λέξη ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση: **(μονάδες 12)**

α) Μια συνάρτηση f: A → IR είναι συνάρτηση 1 – 1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε x_1 , x_2 ϵ A ισχύει:

Αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

β) Για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f και g ισχύει: (f(x)+g(x))΄= f΄(x)+g΄(x) .

γ) Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα, είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία ψ=x που διχοτομεί τις γωνίες xÔψ και x΄Ôψ΄.

δ) Αν z_1 , z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί τότε ισχύει πάντα: $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

ΘΕΜΑ 16

Α1. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Bolzano.

Α2. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση f + g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο φύλλο των απαντήσεών σας τη λέξη ***Σωστό*** ή ***Λάθος*** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

1. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και g συνεχής στο x_0, τότε η συνάρτηση gof είναι συνεχής στο x_0.
2. Μία συνάρτηση $f : A \to IR$ ονομάζεται 1 – 1 , όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: Αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$.
3. Ισχύει ότι $||z|-|w|| \le |z+w| \le |z|+|w|$ για κάθε z, w $\in$C.
4. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.
5. Ισχύει ότι $(\eta\mu x)' = -\sigma\upsilon\nu x$.

Μονάδες: 6 + 9 + 10 = 25

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ

ΘΕΜΑ 1^{o}

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \lambda^2 - 2 + (3-2\lambda)i$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και $w = k+4i$, $k > 0$.

Για τους z και w ισχύουν : Re(z) + Im(z) = 0 και w= 5.

Β1. Να αποδείξετε ότι z=-1+I . **Μονάδες 8**

Β2. Να αποδείξετε ότι k=3 **Μονάδες 8**

Β3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\mu \in \mathbb{R}$, για το οποίο ισχύει $z+\mu\bar{z}=3i-w$ **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ 2^{o}

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $w=\dfrac{3+4\cdot i}{2+i}$ και $z = x+y\cdot i$ με $x,y \in R$.

1. Να αποδειχθεί ότι Re(w) = 2 και Im(w) = 1. **Μονάδες 8**
2. Ποιος ο μιγαδικός αριθμός z, αν ισχύει $2z - iw = 5 - i^7$; **Μονάδες 8**
3. Ποιος ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών u, αν δίνεται ότι ισχύει $|u-w|=1$

   ;**Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ 3^{o}

i) Να λύσετε την εξίσωση $z^2-4z+5=0$. **Μονάδες 10**

ii) Αν z_1, z_2 οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης με $z_1=2-i$ η μια από αυτές, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w για τους οποίους ισχύει: $|w-z_1|=|w-z_2|$ **Μονάδες 15**

ΘΕΜΑ 4^{o}

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z=α+βi, όπου α, $\beta \in IR$ και $w=3z-i\bar{z}+4$

α) Να αποδείξετε ότι : Re(w)=3α–β+4 και Im(w)=3β–α. **(μονάδες 13)**

β) Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση y=x–12, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση y=x–2. **(μονάδες 12)**

ΘΕΜΑ 5^{o}

Έστω $z \in \mathbf{C}$, ώστε να ισχύει : $|z+i|^2 + |z-i|^2 = 4$.

α. Να δείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z βρίσκονται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο. **(9 μόρια)**

β. Έστω w = 2z + 3 + 4i.Αν ισχύει $|z| = 1$,τότε :

i) Να βρείτε που κινούνται οι εικόνες των μιγαδικών w. **(8 μόρια)**

ii) Να βρεθεί το μέγιστο και το ελάχιστο μέτρο του w. **(8 μόρια)**

ΘΕΜΑ 6^{o}

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύει $|z-1| = |z-i|$ και $|w-2| = 1$.

Α. Να βρείτε το γ.τ. των εικόνων των z, w. **(Μονάδες 10)**

Β. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$. **(Μονάδες 12)**

Γ. Υπάρχει μέγιστη τιμή για το $|z-w|$; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 03)**

ΘΕΜΑ 7^{o}

Β1. Αν z_1 , z_2 μιγαδικοί αριθμοί με $z_1 = -3 + 4i$, $z_2 = 1 - 2i$ να βρείτε τα $|z_1|$, $|z_2|$
Μονάδες 8

Β2. Να βρείτε τους συζυγείς των z_1 , z_2 **Μονάδες 8**

Β3. Να βρείτε που ανήκουν οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει: $|z_1 - z| = 3$ και $|z - z_2| = |z - i|$
Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 8^{o}

Α. Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών την εξίσωση $z^2 - 2z + 2 = 0$ **(μονάδες 8)**

Β. Αν z_1, z_2 οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης να αποδείξετε ότι: $z_1^2 + z_2^2 = 0$ **(μονάδες 8)**

Γ. Αν z_1 μια λύση της παραπάνω εξίσωσης του ερωτήματος **α** με $z_1 = 1 + i$ να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w για τους οποίους ισχύει: $|w - z_1| = 2$ **(μονάδες 9)**

ΘΕΜΑ 9^{ο}

Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1 = 2+i$, $z_2 = 2-i$.

Β1. Να βρείτε τους μιγαδικούς $z_1 + z_2$ *και* $z_1 \cdot z_2$. **Μονάδες 6**

Β2. Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού $w = 2z_1 - z_2$ **Μονάδες 5**

Β3. Αν η εξίσωση $z^2 + \beta z + \gamma = 0$ όπου $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ έχει ρίζα τον μιγαδικό z_1 να βρείτε τις τιμές των β, γ **Μονάδες 7**

Β4. Να βρείτε που ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z γιατους οποίους ισχύει $|z - z_1| = |z - z_2|$ **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 10^{ο}

Δίνεται η εξίσωση $z^2 + 2z + 10 = 0$, $z \in C$

Β1. Να λύσετε στο σύνολο C των μιγαδικών την παραπάνω εξίσωση **(μονάδες 8)**

Β2. Αν z_1 , z_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

A=$|z_1 + z_2|^2 - 2|z_1 \cdot z_2| + |z_1 - z_2|^2 - i^{2013}$ **(μονάδες 9)**

Β3. Αν $z_1 = -1 + 3i$ να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών αριθμών για τους οποίους ισχύει : $|z - z_1| = 7$ **(μονάδες 8)**

ΘΕΜΑ 11^{ο}

Α. Αν$|z| = 1$,

i) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z . **Μονάδες 5**

ii) Να αποδείξετε ότ $\overline{z} = \frac{1}{z}$ ι. **Μονάδες 5**

Β. Αν για τους μιγαδικούς z_1, z_2, z_3 ισχύει $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$να αποδείξετε ότι :

$|z_1 + z_2 + z_3| = \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right|$ **Μονάδες 15**

ΘΕΜΑ 12^{ο}

Δίνονται οι μιγαδικοί w και z με $z = \frac{2z}{\overline{z} - iz}$ και $\overline{z} \neq iz$.

α) Αν $z = 1 + i$ να δείξετε ότι ο w είναι φανταστικός. (**Μονάδες 8)**

β) Αν $z = i^{2013}$ να υπολογίσετε το μέτρο του μιγαδικού w. (**Μονάδες 8)**

γ) Αν w=i να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z. (**Μονάδες 9)**

ΘΕΜΑ 13^{Ο}

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = 3+4i$ και $w = 1-i$.

Β1. Να υπολογιστεί το μέτρο του z και ο συζυγής του w^4.

Β2. Να βρείτε το πραγματικό μέρος του μιγαδικού z·w, δηλαδή το $\mathrm{Re}(z \cdot w)$.

Β3. Ποια η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z, w. **Μονάδες 10 + 8 + 7 = 25**

ΘΕΜΑ 14^{Ο}

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2 + \beta z + \gamma = 0$, όπου β και γ πραγματικοί αριθμοί.

Β1. Να αποδείξετε ότι β = -1 και γ = 1.

Β2. Να αποδείξετε ότι $z_1^{\,3} = -1$

Β3. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού w, για τον οποίο ισχύει:
$|w| = |z_1 - \overline{z}_1|$ **Μονάδες: 9 + 8 + 8 =25**

ΘΕΜΑ 15^{Ο}

Α. Έστω ο μιγαδικός z , για τον οποίο ισχύει $z \neq -1$. Να αποδείξετε ότι αν ο μιγαδικός $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός ,τότε ισχύει $|z| = 1$. **(10 μονάδες)**

Β. Να δείξετε ότι $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$ **(5 μονάδες)**

Γ. Αν z_1 ,z_2 είναι μιγαδικοί που οι εικόνες τους ανήκουν στον κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ=1 , τότε ο μιγαδικός $u = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 \cdot z_2}$ είναι πραγματικός. **(10 μονάδες)**

ΑΝΑΛΥΣΗ

ΘΕΜΑ 1ο

Δίνεται η συνάρτηση f: $R \to R$ για την οποία ισχύει

$$2 - x^4 \leq f(x) \leq 2 + x^4 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

Γ1. $f(0) = 2$ **Μονάδες 6**

Γ2. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$. **Μονάδες 3**

Γ3. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \lambda x^2 - 3x + 1,\ x \in \mathbb{R}$

Δ1. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$, να βρείτε την τιμή του λ.
Μονάδες 4

Για λ=0

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. **Μονάδες 8**

Δ3. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλες προς την ευθεία y=9x. **Μονάδες 8**

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) - \sqrt{x} = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο ανοικτό διάστημα (0,1).
Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - \frac{1}{3}$.

1. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. **Μονάδες 8**

2. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο σημείο M(0, f(0)). **Μονάδες 8**

3. Να μελετηθεί ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ 4^{ο}

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x \cdot \ln x + 2x - 3 \quad \mu\varepsilon \quad x \geq 1$.

1. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1, e). **Μονάδες 6**
2. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f για x ≥ 1. **Μονάδες 6**
3. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ ϵ(1, e) τέτοιο ώστε $(e-1)\cdot f'(\xi) + 2 = 3e$.**Μονάδες 6**
4. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 2012$, έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα [1, + ∞). **Μονάδες**

ΘΕΜΑ 5^{ο}

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x^2 - \alpha x - 2$.

i)Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha \neq 1$ η εξίσωση $x^3 + 2x^2 = \alpha x + 2$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,1)$ **Μονάδες 13**

ii)Αν $\alpha = 1$ να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{f(x)}{x+2}$ **Μονάδες 12**

ΘΕΜΑ 6^{ο}

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot \sqrt{2 - x^2}$.

i)Να βρείτε το πεδίο ορισμού. **Μονάδες 8**

ii)Να δείξετε ότι $f'(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{\sqrt{2-x^2}}$. **Μονάδες 9**

iii)Να βρείτε τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα της f. **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ 7^{Ο}

Δίνεται η συνάρτηση f(x)=$2x^3-2x^2-2x+3$.

α)Να μελετήσετε την f(x) ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής αν υπάρχουν. (μονάδες 10)

β)Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται απο τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x) τις ευθείες x=0,x=1 και του άξονα των x . (μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 8^Ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5+x^3+x+2$. $x \in \Re$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση. **(μονάδες 12)**

β) Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(1+x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **(μονάδες 13)**

ΘΕΜΑ 9^Ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. **(μονάδες 13)**

β) Να αποδείξετε ότι: $f'(x) \cdot \sqrt{x^2+1} + f(x) = 0$. **(μονάδες 12)**

ΘΕΜΑ 10^Ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - x$.

Α. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. **(13 μόρια)**

Β. Να αποδείξετε ότι είναι κυρτή. **(5 μόρια)**

Γ. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, στο σημείο Α(0,1).

(7 μόρια)

ΘΕΜΑ 11^Ο

Δίνεται συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x)-2x}{x-3} = 1$.

Α. Να βρείτε το $f(3)$. **(7 μόρια)**

Β. Αν ισχύει $f(5) = 6$, να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x+2$ τέμνει την γραφική παράσταση της f σε ένα τουλάχιστον σημείο $x_0 \in (3,5)$. **(9 μόρια)**

Γ. Αν η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι :

$f(x) - f(x-1) < f'(x) < f(x+1) - f(x)$. **(9 μόρια)**

ΘΕΜΑ 12^{Ο}

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση $f(x)+e^{f(x)} = 5-4x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(1)=0$. Να αποδείξετε ότι:

Α. Η συνάρτηση f αντιστρέφεται, **(Μονάδες 13)**

Β.Η εξίσωση $f(f(x)) - f(5-10x^3) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$. **(Μονάδες 12)**

ΘΕΜΑ 13^{Ο}

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{\alpha}{x} + \alpha$ με $x>0$. Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x>0$, τότε:

Α. Να αποδείξετε οτι $\alpha = -1$. **(Μονάδες 08)**

Β. Να μελετήσετε την $f(x)$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **(Μονάδες 08)**

Γ. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\ln(2x^2+2) - \frac{1}{x^2+3} > \ln(x^2+3) - \frac{1}{2x^2+2}.$$ **(Μονάδες 09)**

ΘΕΜΑ 14^{Ο}

Γ1. Να μελετήσετε την $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2013$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
Μονάδες 9

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $(1, f(1))$
Μονάδες 9

Γ3. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 15^{Ο}

Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε:

Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ δύο ρίζες **Μονάδες 8**

Δ2. Να δείξετε ότι η f' είναι «1 – 1» **Μονάδες 8**

Δ3. Αν $2f(1)=f(2)$ να δείξετε ότι η $f(x)=xf'(x)$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(1,2)$
Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 16^{o}

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+kx^2-5x+1$

Α. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0=1$, να βρείτε την τιμή του k **(μονάδες 13)**

Β. Για $k=1$ να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. **(μονάδες 12)**

ΘΕΜΑ 17^{o}

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+x-1$, $x>0$

Α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα **(μονάδες 7)**

Β. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=0$ **(μονάδες 9)**

Γ. Να λυθεί η ανίσωση $f(x)>0$ **(μονάδες 9)**

ΘΕΜΑ 18^{o}

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}, & \alpha\nu\ x>1 \\ \lambda x^3+5x^2+1, & \alpha\nu\ x\le 1 \end{cases}$

Γ1. Να βρείτε την τιμή του λ$\in R$ ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής **(μονάδες 9)**

Γ2 Για λ=-2 να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $x_o=-\dfrac{1}{2}$ **(μονάδες 9)**

Γ3. Για λ=-2 να βρείτε το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **(μονάδες 7)**

ΘΕΜΑ 19^{o}

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+1-\ln x$

Δ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα **(μονάδες 9)**

Δ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f **(μονάδες 8)**

Δ3. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης **(μονάδες 8)**

ΘΕΜΑ 20^{ο}

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x - \frac{\pi}{2}$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x - x,\ x \in [0, \pi]$.

Α. Να μελετήσετε τις f και g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (20 μονάδες)

Β. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων f και g (5 μονάδες)

ΘΕΜΑ 21^{ο}

Έστω $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2008 + \lambda$.

Α. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα του Bolzano για την f στο $[-1,1]$.
(7 μονάδες)
Β. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, αν υπάρχουν, ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle για την f στο $[-1,1]$. 5 μονάδες)
Γ. Για τις τιμές του λ, που βρήκατε στο **Α.**, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.
(13 μονάδες)

ΘΕΜΑ 22^{ο}

Έστω $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$.

Α. Να βρείτε την τιμή του α, ώστε η f να είναι συνεχής.
(5 μονάδες)
Β. Γι' αυτήν την τιμή του α, να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη και αν έχει συνεχή πρώτη παράγωγο.
(10 μονάδες)
Γ. Να εξετάσετε αν υπάρχει η δεύτερη παράγωγος της f και αν είναι συνεχής.
(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ 23^{ο}

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + 1$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1,1]$.

Μονάδες 8

Β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $[-1,1]$.**Μονάδες 9**

Γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3-3x+1=0$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(-1,1)$.**Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ 24^{Ο}

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. **Μονάδες 5**

Β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **Μονάδες 10**

Γ. Να αποδείξετε ότι $\alpha^{\alpha+1}>(\alpha+1)^{\alpha}$ για κάθε $\alpha>e$. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 25^{Ο}

Δίνονται οι συναρτήσεις f , g με $f(x)=\sqrt{x+3}-2$ και $g(x)=2\ln x-x^2+1$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφή της f^{-1}. (**Μονάδες 8)**

β) Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι: $g(x)\leq 0$ για κάθε $x>0$. (**Μονάδες 9)**

γ) Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{g(x)+x^2}{x^2+x}$. (**Μονάδες 8)**

ΘΕΜΑ 26^{Ο}

Δίνεται η συνάρτηση f, δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, για την οποία ισχύουν:

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-x^3}{x-1}=-4$ και $f''(x)>0$ για κάθε $x\in R$. Αν $f(3)=1$, τότε:

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1,f(1))$. **(Μονάδες 8)**

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός x_0 στο διάστημα $(1,3)$,στον οποίο η f παρουσιάζει ελάχιστο. **(Μονάδες 9)**

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x^5-x^4+x^2)=f'(2x-f(1))$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0,1)$. **(Μονάδες 8)**

ΘΕΜΑ 27^{O}

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3+2x^2-7x+4$.

Γ1. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}$.

Γ2. Να βρείτε την $f'(x)$ και να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

Γ3. Να βρείτε την $f''(x)$ και να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

Γ4. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της f στο σημείο $M(0, f(0))$.

Μονάδες 6 + 6 + 8 + 5 = 25

ΘΕΜΑ 28^{O}

Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α = [1, 3] η οποία είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο Α με $f(1)=7$, $f(3)=11$.

Δ1. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $a\in(1,3)$ έτσι ώστε $f(a)=8$.

Δ2. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\beta\in(1,3)$ έτσι ώστε $f'(\beta)=2$.

Δ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f. **Μονάδες 8 + 8 + 9 = 25**

ΘΕΜΑ 29^{O}

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\cdot e^{-\frac{1}{x}}$, $x\in(0,+\infty)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι f είναι γνησίως αύξουσα.

Γ2. Να εξετάσετε αν η f είναι κυρτή ή κοίλη.

Γ3. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει ασύμπτωτες.

Γ4. Να βρείτε την εφαπτόμενη ευθεία της γραφικής παράστασης της *f* στο σημείο Α(1 , *f*(1))

Μονάδες: 6 + 6 + 8 + 5 =25

ΘΕΜΑ 30^{O}

Έστω η συνεχής συνάρτηση f : (0, +∞)→IR για την οποία ισχύει: $f(x)=2x-\dfrac{1}{x}-1-\int_1^x\dfrac{f(t)}{t}dt,\ x>0$.

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ότι η $f(x)=x+\frac{\ln x-1}{x}$.

Δ2. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f.

Δ3. Να αποδείξετε ότι το εμβαδό Ε του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $x=1$ και $x=\lambda$ με $0<\lambda<1$ είναι $E(\lambda)=\frac{\lambda^2}{2}-\frac{1}{2}+\frac{\ln^2\lambda-2\ln\lambda}{2}$.

Δ4. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{\lambda\to 0}E(\lambda)$.

ΘΕΜΑ 31^{Ο}

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $f'(0)=1$ και $f(x)+e^{f(x)}=2x+1$.

Α. Να δείξετε ότι $f'(x)=\frac{2}{1+e^{f(x)}}$. **(6 μονάδες)**

Β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f **(6 μονάδες)**

Γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα το $x_0=0$. **(6 μονάδες)**

Δ. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $-\infty$. **(7 μονάδες)**

ΘΕΜΑ 32^{Ο}

Αν η συνάρτηση f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο $\Delta=[0,2]$ και για κάθε $x\in\Delta$

ισχύουν : $f(x)\geq\frac{2f(0)+f(1)}{3}$ και $|f''(x)|\leq 1$, να αποδείξετε ότι :

Α. $f(0)=f(1)$ **(7 μονάδες)**

Β. $f'(1)=0$ **(6 μονάδες)**

Γ. Η συνάρτηση f έχει στο Δ τουλάχιστον μία πιθανή θέση σημείου καμπής **(6 μονάδες)**

Δ. $|f'(2)|\leq 1$ **(6 μονάδες)**