Λύσεις Διαγωνίσματος (1ο Κεφάλαιο)
Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής
Γ΄Λυκείου Γενικής Παιδείας
18/11/2013

Θέμα Α

Α1. Θεωρία-ορισμός σελ. 13 του σχολικού βιβλίου.

Α2. Θεωρία-απόδειξη σελ. 28 του σχολικού βιβλίου.

Α3. 1. Λάθος

2. Σωστό

3. Λάθος

4. Σωστό

5. Σωστό

Θέμα Β

Β1.

Το πεδίο ορισμού της f είναι το R αφού $e^x \neq 0$ για κάθε x∈R.

Για την μονοτονία και τα ακρότατα της έχουμε:

Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με παράγωγο:

$f'(x) = ... = \frac{2-x}{e^x}, x \in \mathbb{R}$. Τώρα $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

- Για x>2 έχουμε f΄(x)<0 και άρα η f είναι γν.φθίνουσα στο [2,∞)
- Για x<2 έχουμε f΄(x)>0 και άρα η f είναι γν.αύξουσα στο (-∞, 2]
- Η f έχει μέγιστο στο x=2 το $f(2) = \frac{1}{e^2}$

B2.

Έχουμε:

$f'(x) = ... = \frac{2-x}{e^x}, x \in \mathbb{R}$

$f''(x) = ... = \frac{x-3}{e^x}, x \in \mathbb{R}$

και άρα: $e^x(f(x) - 2f'(x) + f''(x)) = x - 1 - 2(2-x) + x - 3 = 4x - 8 = 4(x-2), x \in \mathbb{R}$

B3.

Η εφαπτομένη στο σημείο Α(0,f(0)) έχει την μορφή: y=f΄(0)x+κ με f΄(0)=2 δηλαδή y=2x+k και αφού η εξίσωση της εφαπτομένης στο Α(0,-1) θα διέρχεται από το Α θα έχουμε:-1=k. Άρα y=2x-1

Θέμα Γ

Γ1. Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι: $E(x)= \frac{(x+1)(x^2+2x)}{2}$, x>0 σε τ.μ.

Γ2. $E'(x)=\frac{3x^2+6x+2}{2}$, x>0 και ακόμα $E''(x) = ... = 3x+3$

Γ3. Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου για x=3 είναι $E'(3)=\frac{47}{2}$ τ.μ.

Θέμα Δ

Δ.1. Θα πρέπει: f(3)=9 και $f'(3)\cdot(-1) = -1$(1) από όπου παίρνουμε το σύστημα:

-3α+β=1(2) και επειδή η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = x^2 - 2ax + \beta, x \in \mathbb{R}$ θα είναι $f'(1) = 1 - 2a + \beta$ και άρα από την (1) θα πάρουμε β=2α (3). Από τις (3) και (4) παίρνουμε:α=-1 και β=-2

Δ.2. Για να είναι η συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα πρέπει να είναι συνεχής και στο σημείο $x_0 = 0$ (αφού σε όλα τα άλλα σημεία είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων). Άρα θα πρέπει: $\lim_{x\to 0} g(x) = g(0) = \gamma$. Όμως

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 - 3x^2 + x}{1-\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{(x^3 - 3x^2 + x)(1+\sqrt{x+1})}{-x} = \lim_{x\to 0}[-(x^2 - 3x + 1)(1+\sqrt{x+1})] = -2$$

Άρα $\gamma = -2$

Δ.3.

Δ.3.1. Για α=-1 και β=-2 η συνάρτηση γίνεται: $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 2x, x \in \mathbb{R}$ και

$f'(x) = x^2 + 2x - 2, x \in \mathbb{R}$ άρα θα είναι $h'(x) = f'(x) - (1 - \sqrt{x+1})g(x) - 2, x \neq 0$ και

άρα $h'(x) = (x^2 + 2x - 2) - (x^3 - 3x^2 + x) - 2 = -x^3 + 4x^2 + x - 4, x \in \mathbb{R}$

$h'(x) = (x-1)(-x^2 + 3x + 4)$,

$-\infty$	-1	0	1	4	∞
f′ +	-	-	+	-	
f ↗	↘	↘	↗	↘	

(Πίνακας προσήμου της h)

Η h είναι:

- Γν. αύξουσα στο (-∞,-1] και στο [1, 4]
- Γν. φθίνουσα στο [-1,0) , στο (0,1] και στο $[4, \infty)$
- Έχει ακρότατα: Στο $x_1 = -1$ τοπικό μέγιστο , στο $x_2 = 1$ έχει τοπικό ελάχιστο, ενώ στο σημείο $x_3 = 4$ έχει τοπικό μέγιστο.

Δ.3.2. Το ζητούμενο όριο γίνεται:

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 + 2x - 2 - (20+2)}{x^2 - 16} = \lim_{x \to 4} \frac{x^2 + 2x - 24}{x^2 - 16} = \lim_{x \to 4} \frac{(x - 4(x+6)}{(x-4)(x+4)}) = \lim_{x \to 4} \frac{x+6}{x+4} = \frac{5}{4}$$

Πανελλήνιες Εξετάσεις 2013

Μαθηματικός Περιηγητής