ΘΕΜΑΤΑ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΣΤΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ (2000-2013)

ΘΕΜΑ 2000

α. Αν z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 + 2z + 2 = 0$, να αποδείξετε ότι $z_1^{20} - z_1^{20} = 0$.

β. Αν z_1 είναι ρίζα της εξίσωσης του α. ερωτήματος, με φανταστικό μέρος θετικό αριθμό, να βρείτε τις τιμές του θετικού ακεραίου ν για τις οποίες z_1^{ν} είναι πραγματικός αριθμός.

ΘΕΜΑ 2003

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\alpha+\beta i$, όπου $\alpha,\beta \times \mathbb{R}$ και $w=3z - i\bar{z} + 4$, όπου $\bar{z}$ είναι ο συζυγής του z.

α. Να αποδείξετε ότι $Re(w)=3\alpha-\beta+4$ και $Im(w)=3\beta-\alpha$.

β. Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-12$, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-2$.

γ. Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z, οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-2$, έχει το ελάχιστο μέτρο.

ΘΕΜΑ 2005

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$.

α. Δείξτε ότι: $\overline{z_1} = \dfrac{9}{z_1}$

β. Δείξτε ότι ο αριθμός $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός .

γ. Δείξτε ότι: $|z_1 + z_2 + z_3| = \dfrac{1}{3}|z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1|$.

ΘΕΜΑ 2005 (Επαναληπτικές)

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει

$z_1 + z_2 = 4+4i$ και $2z_1 - \overline{z_2} = 5+5i$,

να βρείτε τους z_1, z_2 .

β. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w ισχύουν

$|z - 1 - 3i| \leq \sqrt{2}$ και $|w - 3 - i| \leq \sqrt{2}$:

i. να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w έτσι, ώστε z = w

ii. να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z - w|$.

ΘΕΜΑ 2006

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$.

ii. $|z_1 - z_2|^2 \leq 4$ και $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \geq -1$

β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν.

ΘΕΜΑ 2007

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z=\dfrac{2+\alpha i}{\alpha+2i}$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο O(0,0) και ακτίνα $\rho=1$.

β. Έστω z_1 , z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο $z=\dfrac{2+\alpha i}{\alpha+2i}$ για $\alpha = 0$ και $\alpha = 2$ αντίστοιχα.

i. Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 .

ii. Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $(z_1)^{2\nu} = (-z_2)^{2\nu}$ για κάθε φυσικό αριθμό ν.

ΘΕΜΑ 2008 (Επαναληπτικές)

Δίνεται ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_1=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2+\beta z+\gamma=0$, όπου β , $\gamma \in \mathbb{R}$

α. Να αποδείξετε ότι $\beta=-1$ και $\gamma=1$.

β. Να αποδείξετε ότι $z_1^3=-1$.

γ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού w, για τον οποίο ισχύει: $|w|=|z_1-\overline{z_1}|$

ΘΕΜΑ 2009

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς

$$z=(2\lambda+1)+(2\lambda-1)i\ , \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

Α.α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$

β. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_0=1-i$ έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο.

Β. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί w οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση $|w|^2+\overline{w}-12=z_0$ όπου z_0 ο μιγαδικός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα.

ΘΕΜΑ 2009 (Επαναληπτικές)

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει: $(2-i)z+(2+i)\overline{z}-8=0$

α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z=x+yi$ οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

β. Να βρείτε τον μοναδικό πραγματικό αριθμό και τον μοναδικό φανταστικό αριθμό οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

γ. Για τους αριθμούς που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα να αποδείξετε ότι $|z_1+z_2|^2+4|z_1-z_2|^2=0$

<u>ΘΕΜΑ 2010</u>

Δίνεται η εξίσωση $z+\frac{2}{z}=2$ όπου $z\in\mathbb{C}$ με $z\neq 0$

Β1. Να βρείτε τις ρίζες z_1 και z_2 της εξίσωσης.

Β2. Να αποδείξετε ότι $z_1^{2010}+z_2^{2010}=0$.

Β3. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει

$$|w-4+3i|=|z_1-z_2|$$

τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο.

Β4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος Β3, να αποδείξετε ότ $3\le|w|\le 7$.

<u>ΘΕΜΑ 2010 (Επαναληπτικές)</u>

Έστω ότι οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 είναι οι ρίζες εξίσωσης δευτέρου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές για τις οποίες ισχύουν

$$z_1+z_2=-2 \text{ και } z_1 z_2=5$$

Β₁. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2

Β₂. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει η σχέση $|w-z_1|^2+|w-z_2|^2=|z_1-z_2|^2$ να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με εξίσωση $(x+1)^2+y^2=4$

Β₃. Από τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος **Β₂** να βρείτε εκείνους για τους οποίους ισχύει

$$2\,\mathrm{Re}(w)+\mathrm{Im}(w)=0$$

Β₄. Αν w_1, w_2 είναι δύο από τους μιγαδικούς w του ερωτήματος **Β₂** με την ιδιότητα $|w_1-w_2|=4$, να αποδείξετε ότι $|w_1+w_2|=2$

ΘΕΜΑ 2011

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με $z \neq 3i$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z-3i|+|\bar{z}+3i|=2 \quad \text{και} \quad w=z-3i+\frac{1}{z-3i}$$

B$_1$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

B$_2$. Να αποδείξετε ότι $\bar{z}+3i=\frac{1}{z-3i}$

B$_3$. Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2 \leq w \leq 2$

B$_4$. Να αποδείξετε ότι: $|z-w|=|z|$

ΘΕΜΑ 2011 (Επαναληπτικές)

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w, οι οποίοι ικανοποιούν αντίστοιχα τις σχέσεις:

$$|z-i| = 1+\mathrm{Im}(z) \qquad (1)$$

$$w(\bar{w}+3i) = i(3\bar{w}+i) \qquad (2)$$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η παραβολή με εξίσωση $y=\frac{1}{4}x^2$

B2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο Κ(0,3) και ακτίνα $\rho=2\sqrt{2}$.

B3. Να βρείτε τα σημεία Α και Β του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία είναι εικόνες των

<u>ΘΕΜΑ 2012</u>

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$|z-1|^2+|z+1|^2=4 \quad (1) \qquad \text{και} \qquad |w-5\overline{w}|=12 \quad (2)$$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ = 1

B2. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1-z_2|=\sqrt{2}$ τότε, να βρείτε το $|z_1+z_2|$

B3. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του |w|

B4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z ,w που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι: $1\le|z-w|\le 4$

ΘΕΜΑ 2012 (Επαναληπτικές)

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, με $z \neq 1$ για τους οποίους ο αριθμός $w = \frac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός.

Να αποδείξετε ότι:

B1. $|z|=1$

B2. Ο αριθμός $\left(z - \frac{1}{z}\right)^4$ είναι πραγματικός.

B3. $\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)(z_1 + z_2) \leq 4$ όπου z_1, z_2 δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z

B4. Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών u, για τους οποίους ισχύει $u - ui = \frac{i}{w} - w$, $w \neq 0$ ανήκουν στην υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$

ΘΕΜΑ 2013

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει ότι:

$(z-2)(\overline{z}-2)+|z-2|=2$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι κύκλος με κέντρο K(2,0) και ακτίνα ρ=1.

Στη συνέχεια για κάθε μιγαδικό z που ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι $|z|\le 3$

B2. Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z1,z2 που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο είναι ρίζες της εξίσωσης $w^2+\beta w+3=0$, με w μιγαδικό αριθμό, $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ και $|\mathrm{Im}(z_1)-\mathrm{Im}(z_2)|=2$ να αποδείξετε ότι $\beta=-4$ και $\gamma=5$

B3. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς a_0,a_1,a_2 οι οποίοι ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος B1. Αν ο μιγαδικός αριθμός v ικανοποιεί την σχέση $v^3+a_2v^2+a_1v+a_0=0$ να αποδείξετε ότι $|v|<4$

ΘΕΜΑ 2013 (Επαναληπτικές)

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z,w για τους οποίους η εξίσωση $2x^2 - |w-4-3i|x = -2|z|, x \in \mathbb{R}$ έχει διπλή ρίζα, την x=1.

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho_1 = 1$, καθώς επίσης ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w στο μιγαδικό επίπεδο είνια κύκλος με κέντρο K(4,3) και ακτίνα $\rho_2 = 4$

B2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός η εικόνα του οποίου ανήκει και στους δύο παραπάνω γεωμτερικούς τόπους.

B3. Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς του ερωτήματος B1 να αποδείξετε ότι $|z-w| \le 10$ και $|z+w| \le 10$

B4. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς του ερωτήματος B1 να βρείτε εκε΄΄ινους, για τους οποίους ισχύει: $|2z^2 - 3z - 2z\bar{z}| = 5$