ΘΕΜΑΤΑ ΓΡΑΠΤΩΝ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2013

Θ Ε Μ Α Α

Α1. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα. **μονάδες 11**

Α2. Να συμπληρώσετε τις επόμενες προτάσεις, ώστε να είναι αληθείς.

α. Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το _____ του τετραγώνου της _____ που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, _____ κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς. **μονάδες 3**

β. Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι _____ ή _____ με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των _____ των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. **μονάδες 3**

Α3. Να γράψετε στην κόλλα σας τα γράμματα της στήλης Α και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της στήλης Β, που αντιστοιχεί στο σωστό τύπο. (περισσεύει ένα)

Στήλη Α	**Στήλη Β**
α. εμβαδόν τραπεζίου	**1.** $E=\frac{1}{2}P_\nu \cdot \alpha_\nu$
β. εμβαδόν τριγώνου	**2.** $E=\alpha^2$
γ. εμβαδόν τετραγώνου	**3.** $E=\frac{(B+\beta)}{2}\cdot \upsilon$
δ. εμβαδόν κανονικού ν-γώνου	**4.** $E=\frac{\pi \cdot R^2 \cdot \mu}{360^\circ}$
	5. $E=\tau \cdot \rho$

μονάδες 8

Θ Ε Μ Α Β

Ένα κανονικό ν – γώνο έχει περίμετρο 36 cm και είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R). Η γωνία του ϕ_ν είναι διπλάσια από την κεντρική του γωνία ω_ν.

Β1. Να βρείτε τη γωνία ϕ_ν του κανονικού ν –γώνου και την κεντρική του γωνία ω_ν. **μονάδες 8**

Β2. Να βρείτε το πλήθος ν των πλευρών του πολυγώνου. **μονάδες 6**

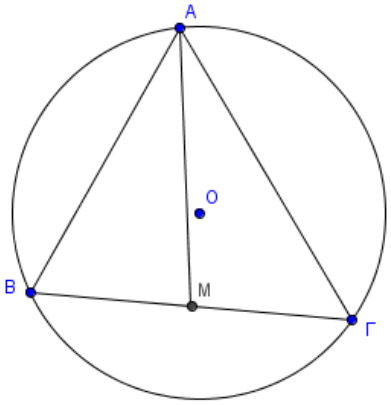
Β3. Να βρείτε την πλευρά του κανονικού ν – γώνου λ_ν (**μονάδες 5**), την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου **R** (**μονάδες 3**) και το απόστημά του α_ν (**μονάδες 3**). **μονάδες 11**

Θ Ε Μ Α Γ

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R), για το οποίο ισχύει: $\beta^2+\gamma^2=2\alpha^2$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $AM=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$. **μονάδες 12**

Γ2. Αν η διάμεσος ΑΜ όταν προεκταθεί, τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ, να αποδείξετε ότι: $M\Delta=\frac{\alpha\sqrt{3}}{6}$. **μονάδες 13**



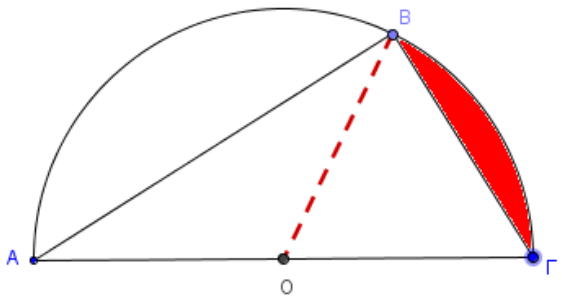
Θ Ε Μ Α Δ

Στο διπλανό ημικύκλιο κέντρου Ο και ακτίνας $R=10\text{ cm}$, το μήκος του τόξου ΑΒ είναι ίσο με $\frac{20\pi}{3}$ cm.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η γωνία ΑΟΒ είναι 120°. **μονάδες 7**

Δ2. Να υπολογίσετε το μήκος των χορδών ΒΓ και ΑΒ. **μονάδες 8**

Δ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χρωματισμένου κυκλικού τμήματος. **μονάδες 10**



Παρατηρήσεις

1. Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.
2. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

ΘΕΜΑ Α

Α1. Η απόδειξη στη σελίδα 183.

Α2. α. διπλάσιο, διαμέσου, αυξημένο **β.** ίση, παραπληρωματική, γινομένων

Α3. α. 3, **β.** 5, **γ.** 2, **δ.** 1

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\begin{cases} \phi_\nu + \omega_\nu = 180^\circ \\ \phi_\nu = 2\omega_\nu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\omega_\nu = 180^\circ \\ \phi_\nu = 2\omega_\nu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\omega_\nu = 60^\circ} \\ \boxed{\phi_\nu = 120^\circ} \end{cases}$.

Β2. $\omega_\nu = \dfrac{360^\circ}{\nu} \overset{B1}{\Rightarrow} 60^\circ = \dfrac{360^\circ}{\nu} \Leftrightarrow \boxed{\nu = 6}$, άρα το πολύγωνο είναι το κανονικό εξάγωνο.

Β3. Ζητούνται τα : λ_6, R και α_6. Επομένως, $P_\nu = \nu \cdot \lambda_\nu \Rightarrow 36 = 6 \cdot \lambda_6 \Leftrightarrow \boxed{\lambda_6 = 6 \text{ cm}}$.

$R = \lambda_6 \Rightarrow \boxed{R = 6 \text{ cm}}$ και $\alpha_6 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} \overset{R=6 \text{ cm}}{\Rightarrow} \boxed{\alpha_6 = 3\sqrt{3} \text{ cm}}$.

ΘΕΜΑ Γ

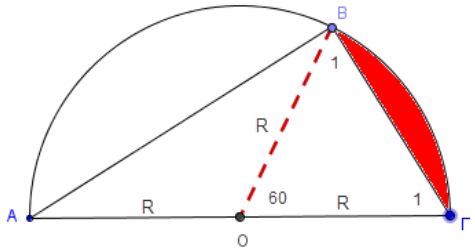
Γ1. Θεωρούμε (1) τη δοσμένη σχέση. Από το 1^{ο} θεώρημα των διαμέσων:

$$AM^2 = \mu_\alpha^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} \overset{(1)}{=} \frac{2\left(\beta^2 + \gamma^2\right) - \alpha^2}{4} = \frac{4\alpha^2 - \alpha^2}{4} = \frac{3\alpha^2}{4} \Rightarrow \boxed{AM = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}}.$$

Γ2. Προεκτείνουμε την ΑΜ, η οποία τέμνει τον κύκλο στο Δ, οπότε από το θεώρημα των χορδών ενός κύκλου: $AM \cdot M\Delta = BM \cdot M\Gamma \overset{\Gamma 1}{\Rightarrow} \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2} \cdot M\Delta = \dfrac{\alpha}{2} \cdot \dfrac{\alpha}{2}$, αφού το Μ είναι μέσο του ΒΓ.

Επομένως, $\dfrac{\cancel{\alpha}\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot M\Delta = \dfrac{\alpha^{\cancel{2}}}{\cancel{4}_2} \Leftrightarrow M\Delta = \dfrac{\alpha}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow \boxed{M\Delta = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{6}}$.

ΘΕΜΑ Δ



Δ1.

$$\ell_{AB}=\frac{\pi\cdot R\cdot\mu}{180^\circ}\Leftrightarrow\mu=\frac{180^\circ\cdot\ell_{AB}}{\pi\cdot R}\Rightarrow\mu=\frac{180^\circ\cdot\frac{2\cancel{0}\cancel{\pi}}{3}\cancel{cm}}{\cancel{\pi}\cdot 1\cancel{0}\cancel{cm}}\Rightarrow\mu=120^\circ.$$ Άρα $\boxed{\widehat{AOB}=120^\circ}$.

Δ2. Από το Δ1, δεδομένου ότι $AOB=120^\circ$, η γωνία $O_1=60^\circ$ και επειδή $OB=O\Gamma=R$, το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισόπλευρο, οπότε $\boxed{B\Gamma=R=10\text{ cm}}$.

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{B}=90^\circ$, διότι η $\hat{B}$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο. Με εφαρμογή του Π.Θ., στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε :

$A\Gamma^2=AB^2+B\Gamma^2\Leftrightarrow AB^2=A\Gamma^2-B\Gamma^2=(2R)^2-R^2=3R^2$, οπότε $AB=R\sqrt{3}\Rightarrow\boxed{AB=10\sqrt{3}\text{ cm}}$.

Δ3. $E_{\chi\rho\omega\mu}=(O\Gamma)-(O\Gamma)$, όπου

$$(O\Gamma)=\frac{\pi\cdot R^2\cdot\mu}{360}=\frac{\pi\cdot 100\cdot 60^\circ}{360^\circ}\Rightarrow\boxed{(O\Gamma)=\frac{50\pi}{3}\text{ cm}^2}.$$

και $(O\Gamma)=\frac{R^2\sqrt{3}}{4}=\frac{100\sqrt{3}}{4}\Rightarrow\boxed{(O\Gamma)=25\sqrt{3}\text{ cm}^2}$, αφού το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισόπλευρο.

Επομένως, $\boxed{E_{\chi\rho\omega\mu}=\frac{50\pi}{3}-25\sqrt{3}\text{ cm}^2}$.