

Λύσεις θεμάτων επαναληπτικών πανελληνίων εξετάσεων

Στο μάθημα: « Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής»

Γ' Λυκείου Γενικής Παιδείας

**Δευτέρα, 10 Ιουνίου 2013
ΕΣΠΕΡΙΝΑ**

Θέμα Α

A1. Θεωρία, σελ. 31 Σχολικό Βιβλίο (απόδειξη)

A2. Θεωρία, σελ.92 Σχολικό Βιβλίο (Ορισμός)

A3. Θεωρία, σελ. 22 Σχολικό Βιβλίο (Ορισμός)

A4. α) Σ β) Σ γ) Σ δ) Λ ε) Σ

Θέμα Β

B1. Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(-1,9)$ θα έχουμε:

$$f(-1) = 9 \Leftrightarrow -a + \beta + 5 = 9 \Leftrightarrow \beta - a = 4(I) \text{ και ακόμα}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+7}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+7}+3)} = \frac{1}{24} = \frac{1}{2a}$$

Άρα $12a = 24 \Leftrightarrow a = 2$ και από την (I) $\beta = 6$

B2. Έστω $B(x_1, f(x_1))$ τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι // $\chi\chi$. Η

συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = 6x^2 - 6, x \in \mathbb{R}$. Θα πρέπει

$$f'(x_1) = 6x_1^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \text{ ή } x_1 = -1 \text{ και άρα τα σημεία είναι :}$$

$B(1, f(1))$
 $B(1,1)$
 $B'(-1, f(-1))$
 $B'(-1,9)$

B3. Ο ρυθμός μεταβολής της f είναι $f'(x) = 6x^2 - 6 = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Θα βρούμε το ελάχιστο της g . Η g είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με

$$g'(x) = 12x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Για $x > 0$ $g'(x) > 0$ και άρα η g είναι γν. αύξουσα στο $[0, \infty)$

Για $x < 0$ $g'(x) < 0$ και άρα η g είναι γν. φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$

Η g έχει στο $x_0 = 0$ Τ. ελάχιστο το $g(0) = f'(0) = -6$

(Μπορούμε να δημιουργήσουμε και πίνακα μεταβολών της f)

Θέμα Γ

Γ1. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι

$$y = \lambda x + \beta$$

$$\lambda = g'(x_0) = \varepsilon\varphi 45^\circ = 1$$

$$y = x + \beta$$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $g'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Έχουμε $g'(x_0) = \frac{1-x_0^2}{(1+x_0^2)^2} = 1 \Leftrightarrow x_0 = 0$. Άρα $A(0, g(0)) = (0, 1)$. Τότε έχουμε $\beta = 1$ και άρα η

ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $y = x + 1$

Γ2. Η g είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με

$$g'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \text{ Έχουμε } g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = -1.$$

Άρα θα έχουμε για την μονοτονία της:

- Για $x < -1$ η $g'(x) < 0$ και άρα η g είναι γν. φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$
- Για $-1 < x < 1$ η $g'(x) > 0$ και άρα η g είναι γν. αύξουσα στο $[-1, 1]$
- Για $x > 1$ η $g'(x) < 0$ και άρα η g είναι γν. φθίνουσα στο $[1, \infty)$

Για τα ακρότατα της f :

Η g έχει ελάχιστο στο $x_1 = -1$ το $g(-1) = \frac{1}{2}$

Η g έχει μέγιστο στο $x_2 = 1$ το $g(1) = \frac{3}{2}$

Γ3. Οι τιμές της μεταβλητής X διατεταγμένες κατά αύξουσα σειρά είναι x_1, x_2, x_3, x_4 με αντιστοιχες σχετικές συχνότητες

$$f_1 = g(-1) - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$f_2 = g(0) - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$f_3 = -\frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g'(x)}{x-1} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{(x-1)(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{12}$$

Αφού τα σημεία $M_k(x_k, y_k)$ ανήκουν στην ευθεία $y = x+1$ θα έχουμε $y_k = x_k + 1$ που διατεταγμένα κατά την αύξουσα σειρά θα είναι y_1, y_2, y_3, y_4 .

Η διάμεσοι αντίστοιχα των x_k και y_k είναι

$$\delta_{x_k} = \frac{x_2 + x_3}{2} = \frac{x_3}{2}$$

$$\delta_{y_k} = \frac{y_2 + y_3}{2} = \frac{x_3 + 2}{2}$$

Από την δεδομένη σχέση έχουμε διαδοχικά $2\delta_{x_k} = \delta_{y_k} \Leftrightarrow x_3 = \frac{x_3 + 2}{2} \Leftrightarrow x_3 = 2$ και από την

$$R_{y_k} = 5 \Leftrightarrow y_4 - y_1 = 5 \Leftrightarrow x_4 - x_1 = 5 \Leftrightarrow x_4 + 1 = 5 \Leftrightarrow x_4 = 4$$

Γ4. Η μέση τιμή των τεσσάρων αυτών παρατηρήσεων είναι:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \frac{-1 + 0 + 2 + 4}{4} = \frac{5}{4}$$

Προσοχή: Δεν ζητείται η μέση τιμή της μεταβλητής X που θα ήταν

$$\bar{X} = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4 \neq \frac{5}{4}$$

Θέμα Δ

Δ1. Αφού οι F_3, F_5 είναι ρίζες της εξίσωσης $5x^2 - 8x + 3k = 0$ θα ισχύουν οι τύποι του Vietta: Άρα (και αφού $F_5 = 1$) θα έχουμε:

$$F_3 + F_5 = \frac{8}{5} \Leftrightarrow F_3 + 1 = \frac{8}{5} \Leftrightarrow F_3 = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$F_3 \cdot F_5 = \frac{3\kappa}{5} \Leftrightarrow 0,6 = \frac{3\kappa}{5} \Leftrightarrow \kappa = 1$$

$$F_5\% = \kappa\lambda^2 - 3\lambda + 30 = 100 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 70 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 10, \lambda = -7 (\text{απορρίπτεται αφού } F_1\% = \lambda > 0)$$

Δ2. Για τις σχετικές συχνότητες % έχουμε:

$$f_1\% = \lambda = 10\%$$

$$f_2\% = F_2\% - f_1\% = 2\lambda + 10 = 30\%$$

$$f_3\% = F_3\% - f_2\% = 60 - (3\lambda + 10) = 50 - 3\lambda = 20\%$$

$$f_4\% = F_4\% - 60\% = \kappa\lambda^2 - 2\lambda - 50 = 30\%$$

$$f_5\% = F_5\% - F_4\% = -\lambda + 20 = 10\%$$

Δ3. Αφού το 25% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του 16 θα είναι όσες παρατηρήσεις ανήκουν στην πρώτη κλάση (10%) και το μισό της 2^{ης} κλάσης (δηλαδή το άλλο 15%). Άρα

$$\text{θα είναι όλες οι παρατηρήσεις } x_i \text{ με: } x_i > \frac{2a+3c}{2} = 16 \Leftrightarrow 2a+3c = 32(I)$$

Ακόμα, αφού το 25% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες ή ίσες από το 24 θα είναι οι μισές παρατηρήσεις της 4^{ης} κλάσης και όλες οι παρατηρήσεις της 5^{ης} κλάσης, άρα θα είναι

$$\text{όλες οι παρατηρήσεις } x_j \text{ με } x_j \geq \frac{2a+7c}{2} = 24 \Leftrightarrow 2a+7c = 48(II). \text{ Από το σύστημα των}$$

σχέσεων (I) και (II) προκύπτει ότι $a=10$ και $c=4$.

Ο πίνακας συμπληρωμένος είναι:

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	$f_i\%$	F_i	$F_i\%$
[10,14)	12	10	0,1	10
[14,18)	16	30	0,4	40
[18,22)	20	20	0,6	60
[22,26)	24	30	0,9	90
[26,30)	28	10	1	100
ΣΥΝΟΛΑ		100		

Δ4. Οι παρατηρήσεις που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 22 είναι όσες ανήκουν στην 4^η και 5^η κλάση και άρα οι σχετικές συχνότητες τους είναι:

$$f_4 + f_5 = 0,4$$

$$\frac{v_4}{v} + \frac{v_5}{v} = 0,4 \Leftrightarrow \frac{v_4 + v_5}{v} = 0,4 \Leftrightarrow \frac{800}{v} = 0,4 \Leftrightarrow v = 2000$$

Όπου v το μέγεθος του δείγματος.

