Λύσεις θεμάτων πανελληνίων εξετάσεων 2013

Στο μάθημα: « Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης»
ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΓΕ.Λ.

Γ΄Λυκείου Κατεύθυνσης
Δευτέρα, 27 Μαΐου 2013

Θέμα Α:

Α1. Θεωρία, σελ.334-335 Σχολικό Βιβλίο (απόδειξη)

Α2. Θεωρία, σελ. 246 Σχολικό Βιβλίο (διατύπωση θεωρήματος)

Α3. Θεωρία, σελ. 222 Σχολικό Βιβλίο (Ορισμός)

Α4.

α) Λ , β) Σ , γ) Σ, δ)Λ , ε)Σ

Θέμα Β:

Β1. ‘Εχουμε από την δοθείσα σχέση ότι: $|z-2|^2+|z-2|=2$ (1). Θέτουμε $k=|z-2| (k\geq 0)$ και άρα η (1) γίνεται: $k^2+k-2=0$ που έχει ρίζες τις $\begin{matrix} k=-2 \text{ (απορρίπτεται)} \\ k=1 \text{ (Δεκτή)} \end{matrix}$.Έτσι $|z-2|=1$ που είναι κύκλος με κέντρο $K(2,0)$ και $\rho=1$.
Τώρα έχουμε:

$$|z|=|z-2+2|\leq|z-2|+2=1+2=3$$
$$|z|\leq 3$$

Β2. Αφού οι z_1 και z_2 είναι ρίζες της $w^2+\beta w+\gamma=0$ θα είναι $z_1=\overline{z}_2$ και αφού ανήκουν στον Γ.Τ. του ερωτήματος Β1 θα είναι $|z_1-2|=|z_2-2|=1$ (Ι).Άρα

$z_1 = x + yi$
$z_2 = x - yi$
$x, y \in \mathbb{R}$

Ακόμα έχουμε διαδοχικά: $\left|\mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z_2)\right| = 2 \Leftrightarrow \left|2y\right| = 2 \Leftrightarrow y = \pm 1$ και άρα $\begin{matrix} z_1 = x + i \\ z_2 = x - i \end{matrix}$ και

έτσι από την (Ι) έχουμε: $\left|(x-2)+i\right| = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$.Άρα $\begin{matrix} z_1 = 2 + i \\ z_2 = 2 - i \end{matrix}$ και θα είναι

αφού αποτελούν ρίζες της εξίσωσης $w^2 + \beta w + \gamma = 0$

$(2+\iota)^2 + \beta(2+i) + \gamma = 0 \Leftrightarrow (3 + 2\beta + \gamma) + (\beta + 4)i = 0 \Leftrightarrow \beta = -4, \gamma = 5$

(Το ίδιο συμπέρασμα προκύπτει με εφαεμογή των τύπων του Vietta στην εξίσωση $w^2 + \beta w + \gamma = 0$)

Β3.

Από την δεδομένη σχέση έχουμε:

$v^3 = -(a_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0)$ και άρα με βάση την τριγωνική ιδιότητα

$\left|v^3\right| = \left|a_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0\right| \le \left|a_2\right|\left|v\right|^2 + \left|a_1\right|\left|v\right| + \left|a_0\right| \le 3\left|v\right|^2 + 3\left|v\right| + 3$. (Ι) (επειδή ισχύουν οι $\begin{matrix} \left|\alpha_2\right| \le 3 \\ \left|\alpha_1\right| \le 3 \\ \left|\alpha_0\right| \le 3 \end{matrix}$)

Αν υποθέσουμε ότι $\left|v\right| \ge 4$ θα έχουμε:

$\left|v\right|^2 = \left|v\right|\left|v\right|^2 \ge 4\left|v\right|^2 = 3\left|v\right|^2 + \left|v\right|^2 = 3\left|v\right|^2 + \left|v\right|\left|v\right| \ge 3\left|v\right|^2 + 4\left|v\right| = 3\left|v\right|^2 + 3\left|v\right| + 1$ που είναι **άτοπο** λόγω της (Ι). Άρα $\left|v\right| < 4$

Άλλος τρόπος (Ντάμπαλης Νικόλαος) Από την (Ι) έχω

θέτω $\left|\mathrm{v}\right| = \mathrm{x}$

$\mathrm{x}^3 \le 3\mathrm{x}^2 + 3\mathrm{x} + 3 < 3\mathrm{x}^2 + 3\mathrm{x} + 4$

$\mathrm{x}^3 - 3\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x} - 4 < 0$

$(\mathrm{x}-4)(\mathrm{x}^2 + \mathrm{x} + 1) < 0 \quad (\mathrm{x}^2 + \mathrm{x} + 1 > 0)$

άρα x-4<0 $\Leftrightarrow$ x<4

$\left|\mathrm{v}\right| < 4$

Θέμα Γ:

Γ1. Θέτουμε την συνάρτηση $h(x) = f(x) + x, x \in \mathbb{R}$ και η δοθείσα σχέση $(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x$ γίνεται διαδοχικά :

$h(x)h'(x) = x$
$2h(x)h'(x) = 2x$
$(h^2(x))' = (x^2)'$
$h^2(x) = x^2 + c$
$c \in \mathbb{R}$

Για $x = 0$ έχουμε $h(0) = c \Leftrightarrow f(0) = c \Leftrightarrow c = 1$. Έτσι $(f(x) + x)^2 = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$. Επειδή η $h(x) = f(x) + x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο, αφού είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη), με $h^2(x) = x^2 + 1 \neq 0, x \in \mathbb{R}$ (δηλαδή δεν έχει ρίζες στο R) και επειδή $h(0) = f(0) = 1 > 0$ θα είναι $h(x) > 0, x \in \mathbb{R}$. Άρα $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x, x \in \mathbb{R}$

Γ2. Το πεδίο ορισμού της fog είναι το R. Τώρα έχουμε διαδοχικά:

$f(g(x)) = 1 \Leftrightarrow f(g(x)) = f(0)$ (επειδή η f είναι 1-1 αφού $f'(x) = \dfrac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}<0$ αφού $x<\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow x^2<x^2+1$)

- Για $x < -1$ είναι $g'(x) > 0$ και άρα η g είναι γνησίως άυξουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$
- Για $-1 < x < 0$ είναι $g'(x) < 0$ και άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 0]$
- Για $x > 0$ είναι $g'(x) > 0$ και άρα η g είναι γνησίως άυξουσα στο διάστημα $[0, \infty)$.

(Μπορούμε να κατασκευάσουμε πίνακα μεταβολών της f)

Το σύνολο τιμών της g είναι : $g(A) = (\lim_{x\to-\infty} g(x), g(-1)] + \bigcup [g(0), g(-1)] \bigcup [g(0), \lim_{x\to\infty} g(x))$

και τελικά: $g(A) = (-\infty, -\frac{1}{2}] \bigcup [-1, -\frac{1}{2}] \bigcup [-1, \infty)$ και άρα η g έχει μόνο μία ρίζα στο $(-1, \infty)$ αφού σε αυτό είναι γνησίως αύξουσα..

Γ3. Θέτουμε : $h(x) = f(x - \frac{\pi}{4})\varepsilon\varphi x + \int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt, x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ και έχουμε:

- Η $h(x)$ είναι συνεχής στο $[0, \frac{\pi}{4}]$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων άρα και συνεχών αφού $f(x), \varepsilon\varphi x, \int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμες στο $[0, \frac{\pi}{4}]$). Τώρα είναι:
- $h(0) = \int_0^{-\frac{\pi}{4}} f(t)dt < 0$
  $h(\frac{\pi}{4}) = 1 > 0$

Από το θεώρημα του **Bolzano** θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, \frac{\pi}{4})$:

$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow \int_{x_o-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt = f(x_o - \frac{\pi}{4})\varepsilon\varphi x_0$

Θέμα Δ

Δ1.Έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(1+5h)-f(1)}{h}-\frac{f(1-h)-f(1)}{h}\right]$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}5\frac{f(1+u)-f(1)}{u}=5\lim_{h\to 0}\frac{f(1+u)-f(1)}{u}=5f'(1)(\theta\acute{\varepsilon}\sigma\alpha\mu\varepsilon 5h=u)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+w)-f(1)}{-w}=-f'(1)(\theta\acute{\varepsilon}\sigma\alpha\mu\varepsilon h=-w)$$

$$5f'(1)-f'(1)=0\Leftrightarrow f'(1)=0$$

Αφού η f΄ είναι γνησίως αύξουσα θα έχουμε :

$x>1\Rightarrow f'(x)>f'(1)=0$ (άρα η f γν. άυξουσα στο $[1,\infty)$

$0<x<1\Rightarrow f'(x)<f'(1)=0$ ($\acute{\alpha}\rho\alpha$ η f γν. φθίνουσα στο $[0,1]$

Άρα η f έχει ελάχιστο στο $x_0=1$

Δ2. Έχουμε: Ή g(x) είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $(1,\infty)$ αφού η $\frac{f(x)-1}{x-1}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων. Άρα έχουμε $g'(x)=\frac{f(x)-1}{x-1},x>1$. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι η f έχει ελάχιστο στο 1 άρα $f(x)\geq f(1)=1$.'Ετσι, για $x>1\Rightarrow\frac{f(x)-1}{x-1}>0$ και άρα $g'(x)>0$ και άρα g(x) είναι γν. αύξουσα στο $(1,\infty)$.

Τώρα για την ανίσωση έχουμε: $\int_{8x^2+5}^{8x^2+5}g(u)du>\int_{2x^4+5}^{2x^4+5}g(u)du$. Θέτουμε: $G(x)=\int_x^{x+1}g(u)du,x>1$. Η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη αφού η g είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) με $G'(x)=g(x+1)-g(x)>0$ διότι: $x<x+1 \Rightarrow g(x)<g(x+1)$($g$ γν. αύξουσα) και άρα η G γν. αύξουσα και άρα η ανισότητα γίνεται διαδοχικά :

$8x^2+5>2x^4+5 \Leftrightarrow x^4-4x^2<0 \Leftrightarrow x^2(x^2-4)<0 \Leftrightarrow x^2<4 \Leftrightarrow -2<x<2$ και $x \neq 0$ θα είναι $-2<x<0$ ή $0<x<2$

Δ3.Έχουμε:

$$g'(x)=\frac{f(x)-1}{x-1}, x>1$$
$$g'(x)(x-1)=f(x)-1, x>1$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση έχουμε : $g''(x)=\dfrac{f'(x)-g'(x)}{x-1}=\dfrac{f'(x)-\frac{f(x)-1}{x-1}}{x-1}$.

Τώρα έχουμε :

εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μ. Τ .στο [1,x] έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (1,x)$:

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{f(x)-1}{x-1}$$
$$1<\xi<x \Rightarrow f'(1)<f'(\xi)<f'(x) \Rightarrow 0<\frac{f(x)-1}{x-1}<f'(x) \Rightarrow f'(x)-\frac{f(x)-1}{x-1}>0$$

και άρα $g''(x)>0, x>1$, άρα η g είναι κυρτή στο $(1,\infty)$.

Για την εξίσωση θέτουμε:

$\mathrm{H}(x)=(\alpha-1)\int_a^x \frac{f(t)-1}{t-1}dt-(f(a)-1)(x-a), x>1$.Αφού η H είναι παραγωγίσιμη , ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων και διότι η $\dfrac{f(t)-1}{t-1}$ συνεχής θα είναι:

$H'(x)=(a-1)g'(x)-(f(a)-1), x\neq 1$ και και παρατηρούμε ότι Η΄(α)=0

Αν υποθέσουμε ότι η Η(x) **έχει δύο** διαφορετικές ρίζες $\rho_1<\rho_2$ τότε από το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\begin{matrix}\xi \in (\rho_1,\rho_2)\\ H'(\xi)=0\end{matrix}$

Δηλαδή η Η΄(x) θα έχει 2 ρίζες (την α και την ξ) .Αυτό είναι **άτοπο** αφού $H''(x)=(a-1)\dfrac{f(x)-1}{x-1}=(a-1)g''(x)>0, x\neq 1$ (επειδή η g είναι κυρτή) και άρα η Η΄(x) θα είναι συνάρτηση 1-1 (ως γν. αύξουσα).
Άρα η δοθείσα εξίσωση θα έχει μία μόνο ρίζα.

(Το ερώτημα Δ3 μπορεί να λύθει από την κυρτότητα της g και την εύρεση της εφαπτομένης στο σημείο της γραφικής παράστασης της g στο σημείο Α(α, g(α)))