Λύσεις των θεμάτων
22/04/2013

Προσομοίωση 1 Πανελαδικών Εξετάσεων 2013 στα «*Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής*» Γ΄ ΓΕ.Λ και ΕΠΑ.Λ. (Β Ομάδα)

ΘΕΜΑ Α

Α 1. Θεωρία, απόδειξη σελ.151 του σχολικού βιβλίου.

Α 2. Θεωρία, ορισμός σελ.87 του σχολικού βιβλίου.

Α 3. Θεωρία, ορισμοί σελ. 140 του σχολικού βιβλίου.

Α 4.

α) Σ

β) Λ

γ) Λ

δ) Σ

ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β 1. Για να είναι η f συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$ θα πρέπει να ισχύει: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{e^x(3x^3+2x^2-3x-2)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{e^x(x-1)(3x^2+5x+2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{e^x(3x^2+5x+2)}{x+1} = 5e = f(1)$$

και άρα η f είναι συνεχής στο σημείο x_0=1.

Τώρα για το κ έχουμε: Αφού η f είναι συνεχής στο σημείο $x_1 = -1$ θα ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(-1)$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}\frac{e^x(3x^3+2x^2-3x-2)}{x^2-1} = \lim_{x\to -1}\frac{e^x(x+1)(3x^2-x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to -1}\frac{e^x(3x^2-x-2)}{x-1} = -e^{-1} = f(-1) = \kappa e^{-1}$$

άρα κ=-1

Β 2.

Για $x \neq \pm 1$ η f γράφεται $f(x) = \dfrac{e^x(x+1)(x-1)(3x+2)}{(x-1)(x+1)} = e^x(3x+2)$. Η f είναι παραγωγίσιμη για $x \neq 1, x \neq -1$ με $f'(x) = e^x(3x+5), x \neq 1, x \neq -1$. Έχουμε διαδοχικά: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{3}$ και

Για $x < -\dfrac{5}{3}$ η $f'(x) < 0$ και άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -\dfrac{5}{3})$

Για $-\dfrac{5}{3} < x < -1$ η $f'(x) > 0$ και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-\dfrac{5}{3}, -1)$

Για $x > 1$ η $f'(x) > 0$ και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, \infty)$

(Μπορούμε να κατασκευάσουμε και πίνακα μεταβολών για το μπρόσημο της f΄).

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η f έχει ακρότατο (ελάχιστο) στο σημείο $x = -\dfrac{5}{3}$

το $f(-\dfrac{5}{3}) = -3e^{-\frac{5}{3}} = -\dfrac{3}{\sqrt[3]{e^5}}$. Άρα. $f(x) \geq -\dfrac{3}{\sqrt[3]{e^5}}, x \neq 1, x \neq -1$. Η τελευταία σχέση ισχύει και για $x_0 = 1$ αφού προφανώς $f(1) = 5e > -\dfrac{3}{\sqrt[3]{e^5}}$.

Β 3.

Έχουμε: $f'(x) = e^x(3x+5), x \neq 1, x \neq -1$

$f''(x) = e^x(3x+8), x \neq 1, x \neq -1$

Τώρα έχουμε: $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = e^x(3x+8-6x-10+3x+2) = 0, x \neq 1, x \neq -1$

Β 4. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-2, f(-2)), f(-2) = -4e^{-2}$ είναι της μορφής $\begin{array}{l} y = \lambda x + \beta, \lambda = f'(-2) = -e^{-2} \\ y = -e^{-2}x + \beta \end{array}$.

Επειδή η εφαπτομένη πρέπει να διέρχεται από το Α έχουμε: $\begin{array}{l} -4e^{-2} = 2e^{-2} + \beta \\ \beta = -6e^{-2} \end{array}$ και άρα η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης στο Α είναι: $y = -e^{-2}x - -6e^{-2}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1

Έχουμε ότι: $\begin{matrix} P(A)=\dfrac{7}{10} \\ P(B)=\dfrac{4}{10} \end{matrix}$. Αν τα Α και Β είναι ασυμβίβαστα τότε $\begin{matrix} A\bigcap B=\varnothing \\ P(A\bigcap B)=0 \end{matrix}$ και έτσι θα έχουμε:

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\dfrac{7}{10}+\dfrac{4}{10}-P(A\cap B)=\dfrac{11}{10}>1$ που είναι αδύνατο αφού $0\leq P(A\cup B)\leq 1$. Άρα τα Α και Β **δεν** είναι ασυμβίβαστα.

Γ 2. Επειδή ισχύει ότι : $A-B\subseteq A$ θα έχουμε $P(A-B)\leq P(A)$ ή $P(A-B)\leq \dfrac{7}{10}$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι: $P(A-B)\geq 0,3 \Leftrightarrow P(A)-P(A\cap B)\geq 0,3 \Leftrightarrow P(A\cap B)\leq 0,4$. Η τελευταία σχέση είναι αληθής αφού : $A\cap B\subseteq B$ και άρα $P(A\cap B)\leq P(B)=0,4$

Γ 3. Έχουμε $P(A)-P(A\cap B)=0,45 \Leftrightarrow P(A\cap B)=0,25$.

Ζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $\Gamma=(A-B)\cup(B-A)$ με $(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$ (ασυμβίβαστα Γιατί;).

Άρα από τον απλό προσθετικό νόμο θα έχουμε:

$P(\Gamma)=P(A-B)+P(B-A)=P(A-B)+P(B)-P(A\cap B)=0,45+0,4-0,25=0,6$

Για το ενδεχόμενο Δ έχουμε:

$P(\Delta)=P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)=1-0,7-0,4+0,25=0,15$

Γ 4. Έχουμε τις παρακάτω ισοδυναμίες:

$P(A\cap B')+P(B\cap A')+P(A\cap B)\geq 0,7 \Leftrightarrow P(A-B)+P(B-A)+P(A\cap B)\geq P(A) \Leftrightarrow$

$P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)+P(A\cap B)\geq P(A) \Leftrightarrow P(A\cap B)\leq P(B)$. Η τελευταία σχέση είναι αληθής αφού $A\cap B\subseteq B$ και άρα $P(A\cap B)\leq P(B)$

Σχόλιο: Εδώ μπορούμε να υπολογίσουμε όλες τις πιθανότητες του α΄μέλους και να καταλήξουμε στην ανισότητα.

ΘΕΜΑ Δ

Δ 1.

Αφού η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο Κ είναι // στον άξονα x΄ x θα έχουμε ότι: $g'(2s)=0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο R (πολυωνυμική) με $g'(x)=x^2+2s(2\overline{x}-20s), x\in\mathbb{R}$ και

$g'(2s)=4s^2-2s(2\overline{x}-20s)=0 \Leftrightarrow 2s(2\overline{x}-18s)=0 \Leftrightarrow 2\overline{x}=18s$ ($s>0$) ή $\frac{s}{|\overline{x}|}=\frac{1}{9}>\frac{1}{10}$ και άρα το δείγμα **δεν** είναι ομοιογενές.

Δ 2.

Από το Δ 1 ερώτημα έχουμε ότι $\overline{x}=9s$ και αφού η γραφική παράσταση της g διέρχεται από το σημείο Λ, θα έχουμε διαδοχικά :

$$g(s)=-\frac{11}{3}$$

$$\frac{s^3}{3}-4s^3=-\frac{11}{3}$$

$$s^3=1$$

$$s=1$$

και άρα $\overline{x}=9$

Δ 3.

ι) Αν θεωρήσουμε Y την τυχαία μεταβλητή που προκύπτει από την πρόσθεση του αριθμού α>0 στις τιμές της τυχαίας μεταβλητής X και $y_i=x_i+\alpha, i=1,2,\ldots\nu$ είναι οι νέες τιμες της Y τότε , από γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου, θα έχουμε ότι:

$$\overline{y}=\overline{x}+a=9+a, \overline{y}>0$$
$$s_y=s_x=1$$

και άρα θα έχουμε $CV_y=\frac{s_y}{\overline{y}}=\frac{1}{9+a}\leq\frac{1}{10}\Leftrightarrow a\geq 1$. Έτσι , η μικρότερη δυνατή τιμή του α είναι 1.

ιι) Είναι $g(3)+5=2$. Αν θεωρήσουμε Z την τυχαία μεταβλητή που προκύπτει από τον πολαπλασιασμό των τιμών της τυχαίας μεταβλητής Y με το 2 δηλαδή $z_i=2y_i, i=1,2,\ldots\nu$ θα έχουμε (πάλι από την γνωστή εφαρμογή στη σελ.99 του σχολικού βιβλίου) και αφού $\overline{y}=10, s=1$ ότι:

$$\overline{z}=2\overline{y}=20(a=1)$$
$$s_z=2s_y=2$$

Τότε ο $CV_z=\frac{s_z}{\overline{z}}=\frac{1}{10}$ Η διαφορά $CV_x-CV_z=\frac{1}{90}\simeq 1{,}11\%$ είναι η % μεταβολή του συντελεστή μεταβολής σε σχέση με τον αρχικό συντελεστή μεταβολής του ερωτήματος Δ 2.

Δ 4.

Αφού $\overline{x} = 9, s = 1$ ζητούμε την πιθανότητα η παρατήρηση που επιλέξαμε να ανήκει στο διάστημα $(\overline{x} - 2s, \overline{x} + s) = (7,10) = (\overline{x} - 2s, \overline{x}) \cup (\overline{x}, \overline{x} + s)$. Επειδή θεωρούμε ότι η κατανομή των παρατηρήσεων είναι περίπου κανονική το προηγούμενο διάστημα αντιστοιχεί στο %: $\frac{95}{2} + \frac{68}{2} = \frac{163}{2} = 81,5\%$.Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι 0,815.

Καραγιάννης Ιωάννης
Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03
Ν. Δωδεκανήσου