ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ (12/04/2013)

_________________________(ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ 1 ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2013-----------------------------------

ΘΕΜΑ Α

Α1 . Θεωρία-Απόδειξη του Θεωρήματος σελ.251 Σχολικό Βιβλίο

Α2. Θεωρία-Ορισμός σελ.151 Σχολικό Βιβλίο

Α3. Θεωρία-Ορισμός σελ. 213 Σχολικό Βιβλίο

Α4.

α) Σ

β) Σ

γ) Λ

δ) Σ

ε) Λ

ΘΕΜΑ Β.

Β1.

Έχουμε διαδοχικά:

$$|z-2|=|\bar{z}+2|$$
$$|z-2|^2=|\bar{z}+2|^2$$
$$(z-2)(\bar{z}-2)=(\bar{z}+2)(z+2)$$
$$z\bar{z}-2z-2\bar{z}+4=z\bar{z}+2z+2\bar{z}+4$$
$$\bar{z}=-z$$
$$z\in I$$

και άρα ο z κινείται στον άξονα των φανταστικών αριθμών.

Β2.

Έχουμε διαδοχικά:

$|w-i|=|w+2i|$
$w=x+yi(x,y\in\mathbb{R})$
$|x+yi-i|=|x-yi+2i|$
$|x+(y-1)i|=|x+(2-y)i|$
$x^2+(y-1)^2=x^2+(2-y)^2$
$2y=3$
$y=\frac{3}{2}$

Άρα ο w γράφεται $w=x+\frac{3}{2}i(x\in\mathbb{R})$ και έτσι βρίσκεται σε μία ευθεία παράλληλη στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

B3.

Αφού $|z|=\text{Re}(w)=x\neq\frac{3}{2}$ θα έχουμε $\begin{matrix} z=xi(z\in I) \\ w=x+\frac{3}{2}i \end{matrix}$ $x\in\mathbb{R}^+$

Έχουμε διαδοχικά:

$|z-w|=\left|xi-(x+\frac{3}{2}i)\right|=\left|-x+(x-\frac{3}{2})i\right|=$

$=\sqrt{x^2+(x-\frac{3}{2})^2}=\sqrt{2x^2-3x+\frac{9}{4}}$

Άρα ζητούμε το ελάχιστο της συνάρτησης $f(x)=|z-w|^2=2x^2-3x+\frac{9}{4}, x\in\mathbb{R}^+$

Το οποίο με την βοήθεια των παραγώγων βρίσκουμε ότι η f έχει ελάχιστο στο $x=\frac{3}{4}$ το

$f(\frac{3}{4})=\frac{18}{16}$. Άρα $|z-w|^2_{\min}=\frac{18}{16}$ ή $|z-w|_{\min}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Οι εικόνες των z,w στο μιγαδικό επίπεδο , για την ελάχιστη αυτή απόσταση είναι:

$z=\frac{3}{4}i$
$w=\frac{3}{4}+\frac{3}{2}i$

B4.

Αφού οι z,w ικανοποιούν τις σχέσεις (1), (2) είναι : $\begin{matrix} z=yi(y\in\mathbb{R},y>0) \\ w=x+\frac{3}{2}i(x\in\mathbb{R}) \end{matrix}$

Έχουμε διαδοχικά:

$$|z+w|^2-3|z|=\left|yi+x+\frac{3}{2}i\right|^2-3|y|=\left|x+(y+\frac{3}{2})i\right|-3|y|=x^2+y^2+3y+\frac{9}{4}-3y=x^2+y^2+\frac{9}{4}>2$$

ΘΕΜΑ Γ:

Γ1.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\infty)$ (ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων).

Έχουμε: $f'(x)=\dfrac{xe^{x-1}\ln x+e^{x-1}}{x}=\dfrac{e^{x-1}(x\ln x+1)}{x}, x>0(1)$. Επειδή $x>0, e^{x-1}>0$ θα μελετήσουμε το πρόσημο της $g(x)=x\ln x+1, x>0$ προκειμένου να μελετήσουμε την μονοτονία της f.

.Η g είναι παραγωγίσιμη (πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με $g'(x)=\ln x+1, x>0$.

Έχουμε $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=e^{-1}$ και για $0<x<e^{-1}$ είναι $g'(x)<0$ ενώ για $x>e^{-1}$ είναι $g'(x)>0$.Άρα η g έχει ελάχιστο στο x=e^{-1} το $g(e^{-1})=\dfrac{e-1}{e}$.

Έτσι για κάθε $x>0$ θα έχουμε $g(x)\geq g(e^{-1})\Rightarrow g(x)\geq\dfrac{e-1}{e}>0$.Με βάση την (1) θα έχουμε ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x>0$ και άρα η f είναι γνησίως άυξουσα στο $(0,\infty)$.

Για το σύνολο τιμών της: Επειδή η f είναι γνησίως άυξουσα στο $(0,\infty)$ το σύνολο τομών της θα είναι $(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to\infty} f(x))$. Τώρα έχουμε $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(e^{x-1}\ln x)=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(e^{x-1}\ln x)=\infty$. Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.

Γ2.

Για να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή θα πρέπει να βρούμε την f''. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,\infty)$ (αφού η f΄ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων)

με $f''(x)=\dfrac{x^2e^{x-1}\ln x+2xe^{x-1}-e^{x-1}}{x^2}=\dfrac{e^{x-1}(x^2\ln x+2x-1)}{x^2}, x>0(2)$.

Επειδή $x^2>0, e^{x-1}>0$ θα εξετάσουμε το πρόσημο της συνάρησης $h(x)=x^2\ln x+2x-1, x>0$. Η h είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,\infty)$ (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με $h'(x)=2x\ln x+x+2, x>0$ και $h''(x)=2\ln x+3, x>0$.

Έχουμε $h''(x)=0 \Leftrightarrow x=e^{-\frac{3}{2}}$ και για $0<x<e^{-\frac{3}{2}}$ είναι $h'(x)<0$ ενώ για $x>e^{-\frac{3}{2}}$ είναι $h'(x)>0$. Έτσι η h' έχει ελάχιστο στο $e^{-\frac{3}{2}}$ το $h'(e^{-\frac{3}{2}})=2(1-e^{-\frac{3}{2}})$.

Άρα για κάθε $x>0$ έχουμε $h'(x)\geq h'(e^{-\frac{3}{2}})=2(1-e^{-\frac{3}{2}})>0$ δηλαδή η h είναι γνησίως αύξουσα συνάρηση στο $(0,\infty)$.

Άρα για $x>e$ θα είναι $h(x)>h(e)$ ή τελικά $h(x)>(e-1)^2>0$. Έτσι ,λόγω της (2), θα έχουμε: $f''(x)>0$ για κάθε $x>e$ και έτσι η f στρέφει τα κοίλα άνω (κυρτή) στο διάστημα $[e,\infty)$.

Γ3.

Η συνάρτηση g είναι: $g(x)=e^{x^2}(x^2-5x+6), x\in\mathbb{R}$. Η δοθείσα σχέση γίνεται διαδοχικά:

$$e^{x^2}(x^2-5x+6)\geq e^{a^2}(a^2-5a+6)$$
$$g(x)\geq g(a), 0<x<1$$

δηλαδή η g έχει τοπικό ακρότατο στο α (τοπικό ελάχιστο).Σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat(πληρούνται οι προϋποθέσεις αφού η g είναι ορισμένη στο (0,1), το α είναι εσωτερικό σημείο του και είναι παραγωγίσιμη σ΄αυτό) έχουμε $g'(a)=0$ (3).

Αντίστοιχα:

$$\frac{e^{x^2}}{e^{\beta^2}}(x^2-5x+6)\leq \beta^2-5\beta+6$$
$$e^{x^2}(x^2-5x+6)\leq e^{\beta^2}(\beta^2-5\beta+6)$$
$$g(x)\leq g(\beta), x>1$$

δηλαδή η g έχει τοπικό ακρότατο στο β (τοπικό μέγιστο). Σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat(πληρούνται οι προϋποθέσεις αφού η g είναι ορισμένη στο $(1,\infty)$, το β είναι εσωτερικό σημείο του και είναι παραγωγίσιμη σ΄αυτό) έχουμε $g'(\beta)=0$ (4).

Τώρα για την g' από το θεώρημα του Rolle στο $[\alpha,\beta]$ έχουμε:

Η $g'(x)=e^{x^2}(2x^3-10x^2+14x-5), x\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$(άρα και συνεχής) με $g'(\alpha)=g'(\beta)=0$ άρα θα υπάρχει, τουλάχιστον ένα $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοι ώστε $g''(\xi)=0$

Γ4. Η συνάρτηση h είναι: $h(x)=e^{x-1}(x^2-1), x>0, x\neq 1$. Η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=e^{x-1}(x^2+2x-1), x>0, x\neq 1$

Το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από τον τύπο

$E(\Omega)=\int_3^4|h(x)-(7ex-11e)|dx=\int_3^4(h(x)-7ex+11e)dx$ (5) (αφού η h είναι κυρτή στο $[3,4]$ διότι $h''(x)=e^{x-1}(x^2+4x+1)$ και για $x\in[3,4]$ είναι $h''(x)>0$) με εφαπτομένη στο Α(2,h(2),h(2)=3e την $y=7ex-11e$. Άρα $h(x)\geq 7ex-11e, x\in[3,4]$ δηλαδή η h βρίσκεται «πάνω» από την (ε)).

Έτσι η (5) γίνεται : $E(\Omega)=\int_3^4\left[e^{x-1}(x^2-1)-7ex+11e\right]dx=\int_3^4 e^x(x^2-1)dx-7e\int_3^4 xdx+11e\int_3^4 dx$

(με 2 φορές κατά παράγοντες ολοκλήρωση στο $\int_3^4 e^{x-1}(x^2-1)dx$) θα έχουμε τελικά ότι:

$$E(\Omega)=10e^3-5e^2-\frac{49}{2}e+11e \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ 1.

ι)

Η συνάρτηση $h(x)=\sigma\upsilon\nu x\cdot f(f(x))$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ (ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων αφού η f είναι και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$).

Τώρα έχουμε $0\le x\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow\sigma\upsilon\nu x\ge 0$: και αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα (επειδή $f'(x)<0, x\in\mathbb{R}$) θα έχουμε για $x>0$ ότι : $f(0)>f(x)\Rightarrow f(f(0))<f(f(x))$ και $\sigma\upsilon\nu x\cdot f(f(0))\le\sigma\upsilon\nu x\cdot f(f(x))$ ή $\sigma\upsilon\nu x\cdot f(f(0))-\sigma\upsilon\nu x\cdot f(f(x))\le 0$ Με ολοκλήρωση στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ παίρνουμε τη σχέση: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu x\cdot f(f(0))dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu x\cdot f(f(x))dx\le 0$ ή διαδοχικά

$f(f(0)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu x dx\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu x\cdot f(f(x))dx\Rightarrow f(f(0))\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu x\cdot f(f(x))dx$ ή τελικά

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu x\cdot f(f(x))dx\ge f(f(0))$

ιι) Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x)=\int_{-x}^{x}g(t)dt$ ($x>0$). Η F γράφεται :

$F(x)=\int_{-x}^{x}g(t)dt=\int_{-x}^{0}g(t)dt+\int_0^x g(t)dt=-\int_0^{-x}g(t)dt+\int_0^x g(t)dt$.

Η F είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Άρα η F είναι και συνεχής στο κ.

Έτσι $\lim\limits_{x\to\kappa}F(x)=F(\kappa)=\int_{-\kappa}^{\kappa}g(t)dt=0$ (Η g είναι περιττή και θα πρέπει να δειχθεί ότι $\int_{-\kappa}^{\kappa}g(t)dt=0$.Πώς;). Έχουμε:

$\lim\limits_{x\to\kappa}\frac{1}{x-\kappa}\int_{-x}^{x}g(t)dt=\lim\limits_{x\to\kappa}\frac{\int_{-x}^{x}g(t)dt}{x-\kappa}$ και

$(\frac{0}{0}\kappa\alpha\nu\acute{o}\nu\alpha\varsigma D'Hospital)=\lim\limits_{x\to\kappa}\frac{F'(x)}{1}=\lim\limits_{x\to\kappa}[\int_0^x g(t)dt-\int_0^{-x}g(t)dt]'=\lim\limits_{x\to\kappa}[g(x)+g(-x)]=0$ (αφού η είναι περιττή)

Δ 2. Θεωρούμε την συνάρτηση $K(x)=\int_a^x f(t)dt\int_\beta^x g(t)dt, x\in[a,\beta]$ η οποία :

- Είναι συνεχής στο $[a,\beta]$ (ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων των $\int_a^x f(t)dt,\int_\beta^x g(t)dt$,άρα και συνεχών)
- Είναι παραγωγίσιμη στο (a,β) αφού οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς με $K'(x)=f(x)\int_\beta^x g(t)dt+g(x)\int_a^x f(t)dt$
- $K(a)=0, K(\beta)=0$

Και έτσι, σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle, υπάρχει $\xi\in(a,\beta)$: $K'(\xi)=0$ ή $f(\xi)\int_\beta^\xi g(t)dt+g(\xi)\int_\alpha^\xi f(t)dt=0$ ή ισοδύναμα

$$g(\xi)\int_{\alpha}^{\xi} f(t)dt = -f(\xi)\int_{\beta}^{\xi} g(t)dt$$

και τελικά

$$g(\xi)\int_{\alpha}^{\xi} f(t)dt = f(\xi)\int_{\xi}^{\beta} g(t)dt$$

Δ 3. Θεωρούμε την συνάρτηση $\Phi(x)=\int_{a}^{x}(f(t)-g(t))dt, x\in[a,\eta], \eta\in(a,\beta)$ η οποία:

- Είναι συνεχής στο $[a,\eta]$ (αφού η Φ είναι παραγωγίσιμη διότι οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[a,\beta]$ και άρα η διαφορά $f-g$ είναι συνεχής)
- Είναι παραγωγίσιμη στο (a,η) ,όπως δικαιολογήθηκε προηγούμενα, με $\Phi'(x)=f(x)-g(x)$
- $\Phi(a)=0$ και $\Phi(\eta)=0$ (από τα δεδομένα)

Άρα από το Θεώρημα του Rolle υπάρχει $c\in(a,\eta)\subset(a,\beta)$ τέτοι, ώστε: $\Phi'(c)=0$ ή $f(c)=g(c)$.

Δ 4. ι) Η συνάρτηση G με x>0 γράφεται

G $(x)=\int_1^x f(u)(\ln x-\ln u)du = \int_1^x f(u)\ln x du - \int_1^x f(u)\ln u$ du ή

$G(x)=\ln x\int_1^x f(u)du-\int_1^x f(u)\ln u du$ όπου

οι συναρτήσεις $\int_1^x f(u)du, \int_1^x f(u)\ln u du$ είναι παραγωγίσιμες διότι οι $f(u), f(u)\ln u$ είναι συνεχείς .Ακόμα η G είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο και διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Η παράγωγος της G είναι

$G'(x)=\frac{1}{x}\int_1^x f(u)du+\ln x f(x)-\ln x f(x)=\frac{1}{x}\int_1^x f(u)du$, x>0.

Η συνάρτηση Η με x>0 γράφεται $H(x)=\int_1^x \frac{1}{u}\int_1^u f(t)dt$ και επειδή η f είναι συνεχής η $\int_1^u f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη,άρα και συνεχής όπως είναι και η $\frac{1}{u}$. Έτσι η $\frac{1}{u}\int_1^u f(t)dt$ είναι συνεχής (u>0) και άρα η Η είναι παραγωγίσιμη για x>0.

Η παραγωγος της Η είναι $H(x)=\frac{1}{x}\int_1^x f(u)du$, x>0.

Αφού $G'(x)=H'(x), x>0$ θα είναι $G(x)=H(x)+c, c\in\mathbb{R}$ μια σταθερά που θα υπολογίσουμε.

Για $x=1$ θα έχουμε $G(1)=0, H(1)=0$ και άρα $c=0$ δηλαδή $G(x)=H(x), x>0$

ii) Τώρα θα δείξουμε ότι οι G΄(x) και H΄(x) είναι γνησίως φθίνουσες στο $(1,\infty)$ δηλαδή θα δείξουμε ότι η συνάρτηση $P(x)=\frac{1}{x}\int_1^x f(u)du$ είναι γνησίως φθίνουσα. Η P είναι παραγωγίσιμη (ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων αφού και η f είναι συνεχής) με

$$P'(x)=\frac{xf(x)-\int_1^x f(t)dt}{x^2}, x>1.$$

Θα αποδείξουμε ότι: $xf(x)-\int_1^x f(t)dt<0$ για κάθε x>1.

$\varphi(x)=xf(x)-\int_1^x f(t)dt, x\geq 1$ που είναι παραγωγίσιμη (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με $\varphi'(x)=xf'(x)<0$ αφού x>1>0 και f΄(x)<0 (δεδομένο) και άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο (1,∞).

Τώρα έχουμε $x>1\Rightarrow \varphi(x)<\varphi(1)\Rightarrow \varphi(x)<f(1)<0$. Άρα η P είναι γνησίως φθίνουσα αφού η P΄(x)<0 για $x>1$.

Καραγιάννης Ιωάννης
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών
Ν. Δωδεκανήσου