## ΘΕΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει: $f(f(\chi))=9\chi-8$, για κάθε $\chi\in R$. Δείξτε ότι:

α) Η $f$ είναι 1-1,

β) $f(1)=1$,

γ) Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών $z$ για τους οποίους ισχύει η σχέση: $f(2\cdot|z|-1)=f(|\bar{z}|)$ είναι κύκλος , του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z=i^{101}+1$ και η συνάρτηση $f(\chi)=\chi e^{\chi}-|z|^2$ , $\chi\in R$.

α) Δείξτε ότι $f(\chi)=\chi e^{\chi}-2$,

β) Να βρεθούν η μονοτονία και τα ακρότατα της $f$,

γ) Είναι η $f$ αντιστρέψιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας,

δ) Δείξτε ότι η $f$ δεν έχει πλάγιες-οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ ,

ε) Δείξτε ότι η εξίσωση $f(\chi)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0,1)$,

στ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\int_1^x (f(t)+2t-e)dt}{(x^2-1)^2}\right)$.

## ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=2\ln\chi+\chi-1$ , $\chi>0$.

α) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία , τα ακρότατα και τις ασύμπτωτες,

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(\chi)=0$,

γ) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών $z$ για τους οποίους ισχύει η σχέση: $\ln|z^2|=1-|z|$,

δ) Να βρείτε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f$ , τον άξονα $\chi'\chi$ και τις ευθείες $\chi=1$ και $\chi=\lambda$ $(0<\lambda<1)$,

ε) Να βρεθούν τα όρια $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} E(\lambda)$ και $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\dfrac{E(\lambda)}{\lambda}$.

## ΘΕΜΑ 4

**Α)** Δίνονται οι συναρτήσεις f,g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ , παραγωγίσιμες στο $(\alpha,\beta)$ με $g(\chi)\cdot g'(\chi)\neq 0$, για κάθε $\chi\in(\alpha,\beta)$. Θεωρούμε τους μιγαδικούς $w=2f(\alpha)-ig(\beta)$ και $z=g(\alpha)-2if(\beta)$ ώστε $|2w+\bar{z}|=|2\bar{w}-z|$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\chi_o\in(\alpha,\beta)$: $\dfrac{f'(x_o)}{g'(x_o)}+\dfrac{f(x_o)}{g(x_o)}=0$.

**Β)** Δίνεται ο μιγαδικός z ώστε να ισχύει: $\operatorname{Re}(z)\cdot[\frac{1}{2}(z^2+\bar{z}^2)+|z|^2+4]=-2\operatorname{Im}(\bar{z})$.

α) Να βρεθεί η συνάρτηση που δίνει τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z,

β) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, την εφαπτομένη του στο σημείο $\chi_o=1$ και τον άξονα Οχ.

## ΘΕΜΑ 5

α) Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases}|z-3i|=|z+i|\\|z-i|=|z-1|\end{cases}$

β) Να υπολογισθεί η τιμή f(e) της συνάρτησης f η οποία είναι συνεχής στο [1,e] και ικανοποιεί τη σχέση $\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx=1-\int_1^e f'(x)\cdot\ln x dx$

γ) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει η σχέση: $|z-2i+f(e)|=\operatorname{Re}(z_o)$ , όπου $z_o$ η λύση του παραπάνω συστήματος.

## ΘΕΜΑ 6

**Α)** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[\alpha,\beta]$.

α) Αν $z_1=f(\alpha)+1+if(\beta)$ , $z_2=\bar{z}_1+2z_1-2f(\alpha)$ και ισχύουν οι σχέσεις $f^2(\alpha)+f^2(\beta)=3$ ,$f(\beta)>0$, και $|z_2|<2$ , να δείξετε ότι υπάρχει ένα $\chi_o\in(\alpha,\beta)$: $f(\chi_o)=0$,

β) Αν $z_1=2+if(\alpha)$ , $z_2=2+if(\beta)$ με $|z_1|=|z_2|$ και $f(\alpha)+f(\beta)\neq 0$ , να δείξετε ότι υπάρχει ένα $\chi_o\in(\alpha,\beta)$: $f'(\chi_o)=0$.

**Β)** α) Να δείξετε ότι: $|z_1|^2+|z_2|^2=|z_1-z_2|^2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1\cdot\bar{z}_2)=0$,

β) Έστω η συνάρτηση f συνεχής και ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$ και οι μιγαδικοί $z=\alpha^2+if(\alpha)$, $w=f(\beta)+i\beta^2$. Αν ισχύει $|w|^2+|z|^2=|w-z|^2$ να δείξετε ότι η εξίσωση $f(\chi)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[\alpha,\beta]$.

## ΘΕΜΑ 7

**Α)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_0^x (t+2)e^t dt$ , $x\in\mathbb{R}$.

α) Βρείτε τη συνάρτηση f,

β) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα σημεία καμπής και τις ασύμπτωτες,

γ) Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2x}{x\eta\mu x}$.

**Β)** Να βρείτε τους μιγαδικούς z αν ισχύει η σχέση: $|z-1|+i\cdot|z|=1+|z-1|\cdot i$

## ΘΕΜΑ 8

**Α)** Δίνεται η συνάρτηση $F(\chi)=\int_x^{x^2}(1+\dfrac{\ln t}{t})dt$ , $\chi\geq 1$.

α) Να βρείτε τον αριθμό $\lambda=F'(1)$,

β) Δείξτε ότι η F είναι 1-1 στο $[1,+\infty)$,

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{\lambda}^{\frac{\lambda+1}{2}}\dfrac{2\chi+1}{\chi^2-5\chi+6}d\chi$ .

**Β)** Έστω η συνάρτηση $f(\chi)=\sqrt{1+x^2}+\lambda\cdot x$ , $\lambda\in\Re$. Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ να βρείτε το $\lambda$. Για την τιμή του $\lambda$ που βρήκατε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^1\dfrac{\chi}{f^2(\chi)}d\chi$ .

## ΘΕΜΑ 9

**Α)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ , $x>0$.

α) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία , τα ακρότατα και τα σημεία καμπής,

β) Αποδείξτε ότι $\alpha^{\alpha+1}>(\alpha+1)^{\alpha}$ , για κάθε $\alpha>e$,

γ) Αποδείξτε ότι $e^{\pi}>\pi^{e}$,

**Β)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(x^2+1)+x+1=0$ έχει μοναδική πραγματική ρίζα.

## ΘΕΜΑ 10

**Α)** Έστω οι $z_1=e-i$ και $z_2=x+i\cdot\ln x$ , $x>0$. Αν $z=z_1\cdot z_2$ , να δειχτεί ότι :

α) Υπάρχει μοναδικό $x_1>0$ , το οποίο και να βρεθεί , ώστε ο z να είναι πραγματικός,

β) Υπάρχει μοναδικό $x_2>0$ , το οποίο και να βρεθεί , ώστε ο z να είναι φανταστικός,

γ) Η εικόνα του z δεν ανήκει στη διχοτόμο του $1^{ου}$ και $3^{ου}$ τεταρτημορίου.

**Β)** Να προσδιορίσετε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων M(z) των μιγαδικών z όταν τα παρακάτω όρια υπάρχουν στο R

α) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{|z-2+i|x^4-3x^3-6}{x+1}$,   β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|z-i|x^3-|z-1|x-(5x-5)}{x-1}$.

## ΘΕΜΑ 11

**Α)** Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ παραγωγίσιμη στο $(\alpha,\beta)$ και οι μιγαδικοί $z = e^{\alpha-\beta} f(\alpha) + 3i$ και $w = -f(\beta) - i$ .Αν ισχύει $\mathrm{Re}(z-\overline{w}) = 2f(\beta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(x_0) + f(x_0) = 0$.

**Β)** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο $(\alpha,\beta)$ . Εάν ισχύει $f(\alpha)>0$ και η εξίσωση $f(\alpha)\cdot z^2 - [f(\alpha)+ f(\beta)]\cdot z + 2f(\alpha) = 0$ έχει λύση το $1 - i^{501}$ , να αποδείξετε ότι υπάρχει $\theta \in (\alpha,\beta)$ ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(\theta,f(\theta))$ να είναι παράλληλη στον $x'x$ .

## ΘΕΜΑ 12

**Α)** Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=1$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\int_\alpha^\beta f(tx)dt = 1$.

Να αποδείξετε ότι $\alpha+1=\beta$.

**Β)** Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha,\beta,\gamma$ για τους οποίους η συνάρτηση $f(\chi)=\alpha\cdot\ln\chi+\beta\cdot\chi^2+\gamma\cdot\chi-1$ έχει τοπικό ακρότατο στο 1 , το $f(1)=2$ , και παρουσιάζει καμπή στο 2. Στη συνέχεια να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας και κυρτότητας της f και να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

## ΘΕΜΑ 13

**Α)** Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$ για την οποία ισχύουν: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 1$. Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z = f'(x)\cdot \eta\mu f(x) + if'(x)\cdot \sigma\upsilon\nu f(x)$, $\chi\in\Re$. Αν ισχύει $|z|\geq 1$ , για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$, δείξτε ότι:

α) $f(0)=0$,

β) $f'(0)=1$,

γ) $f''(0)=0$. *(χρησιμοποιήστε το θεώρημα Fermat για κατάλληλη συνάρτηση)*

**Β)** Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[2,3]$ και παραγωγίσιμη στο $(2,3)$ με την ιδιότητα $f(3)=5+f(2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα ξ στο διάστημα $(2,3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=2\xi$.

## ΘΕΜΑ 14

**Α)** Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο R συναρτήσεις f,g για τις οποίες ισχύει: $e^x\cdot f'(x) = g'(x) - g(x)$, για κάθε $\chi\in\Re$ και $f(0)=g(0)=0$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \dfrac{g(x)}{e^x}$, β) Αν η f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο +∞ την ευθεία ψ=χ-2 , να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{xg(x)-x^2e^x}=-1/2.$

**Β)** Να βρείτε τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς $\alpha,\beta,\gamma$ για τους οποίους η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=$ax+\sqrt{\beta x^2+\gamma x-1}$ έχει ασύμπτωτη στο +∞ μια ευθεία παράλληλη προς την ευθεία ψ=2χ-11 και στο -∞ οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία ψ=-1.

## ΘΕΜΑ 15

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=ax+xe^{-x}$.

α) Να προσδιοριστεί ο $\alpha\in R$ , ώστε η γραφική παράσταση της f να έχει στο σημείο $(0, f(0))$ εφαπτομένη παράλληλη προς την ευθεία $(\varepsilon): 2x-y+7=0$,

β) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R,

γ) Να αποδειχθεί ότι η ευθεία y = x είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$,

δ) Να υπολογιστεί το εμβαδόν Ε(λ) του καμπυλόγραμμου χωρίου, που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, την ευθεία y = x και τις ευθείες x = 0 και x = λ (λ>0),

ε) Να βρεθεί το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)$.

## ΘΕΜΑ 16

**Α)** Έστω η συνεχής συνάρτηση f στο R με f(1)=0. Αν g(χ)=2+$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{x}(\ln t-1)\cdot f(t)dt$,

να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα ξ στο R τέτοιο ώστε g''(ξ)=0.

**Β)** Θεωρούμε τη συνάρτηση h(χ)=(χ-1) $\cdot\displaystyle\int_2^x\frac{\ln t}{t}dt$, χ>0.

α) Να αποδείξετε ότι η h είναι παραγωγίσιμη στο (0,+∞),

β) Δείξτε ότι μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα Rolle για την h στο διάστημα [1,2],

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $\dfrac{1-\xi}{\xi}\cdot\ln\xi=\displaystyle\int_2^{\xi}\frac{\ln t}{t}dt$.

## ΘΕΜΑ 17

**Α)** Έστω f :(0, +∞) →R συνεχής για την οποία υποθέτουμε ότι lnt ≤ f(t) ≤ t –1 , για κάθε t>0.

Να αποδείξετε ότι:

α) $f'(1)=1$, β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\int_1^x f(t)dt + x^2 + 1 - 2e^{x-1}}{(x-1)^2} = 1$,

γ) Η εξίσωση $2 + 2\int_1^x f(t)dt = 2\ln x + x^2$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(1, e)$.

**Β)** Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\alpha+\beta i$, $z_1=\alpha+f(\alpha)i$ και $z_2=\beta+f(\beta)i$, για τους οποίους ισχύει ότι: $3(z^2-\overline{z}^2)-4\cdot i\cdot z\cdot\overline{z}=4iRe(z_1\cdot\overline{z}_2)$. Να δειχθεί ότι η γραφική παράσταση της f έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$.

## ΘΕΜΑ 18

**Α)** Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ για την οποία ισχύει $\int_\alpha^\beta xf'(x)dx = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha)$. Να αποδείξετε ότι :

α) Η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $[\alpha, \beta]$,

β) Για την συνάρτηση $g(x) = \int_\alpha^x \dfrac{f(t)}{x}dt$ ισχύει το Θ.Rolle στο $[\alpha, \beta]$,

γ) Υπάρχει $\xi\in(\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $\int_a^\xi f(t)dt = \xi f(\xi)$.

**Β)** Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,1]\to R$ για την οποία ισχύει $\int_0^1 f(x)dx = \alpha e + \beta - \alpha$.

Να αποδειχθεί ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την γραφική παράσταση της g, με $g(x) = \alpha e^x + \beta$, σε τουλάχιστον ένα σημείο στο διάστημα $(0,1)$.

## ΘΕΜΑ 19

**Α)** Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z\neq 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases} |z^2| + \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}, & x>0 \\ \dfrac{2\eta\mu(|z|\cdot x) - x}{x}, & x<0 \end{cases}$. Δείξτε ότι ο γεωμετρικός τόπος του μιγαδικού z όταν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ είναι ο κύκλος κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας 1.

**Β)** Έστω f,g συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $(0,+\infty)$ με $f''(x) = g''(x) - \dfrac{1}{x^2}$, για κάθε $x>0$. Αν $f(1)=g(1)$ και $f(e)-g(e)=1$, να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g και τις ευθείες $x=1$, $x=e$.

## ΘΕΜΑ 20

**Α)** Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

α) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\chi>0$ υπάρχει $\xi\in(0,\chi)$ τέτοιο ώστε $f(\chi)=\chi\cdot f'(\xi)$,

β) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $h(\chi)=\dfrac{f(\chi)}{\chi}+e^{\chi}$ είναι 1-1 στο $(0,+\infty)$,

γ) Αν $h(\chi)=e^{\chi}+\chi^5+\chi$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_1^{e-1} f(x+1)dx$.

**Β)** Έστω $f(x)=\dfrac{\int_1^x (3t^2+4t-1)dt}{x^2-x}$

α) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f,

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα x'x και την x = -3.

## ΘΕΜΑ 21

**Α)** Για μια συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει: $f''(\chi)=6e^{x^3}$, για κάθε $x\in R$. Αν $f(1)=f'(1)=0$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x)dx$.

**Β)** Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\int_1^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt, x\in IR.$

α) Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο R

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $g$ τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$.

## ΘΕΜΑ 22

**Α)** Για μια συνεχή συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει $f(x)=x+\int_0^x f(u)e^{u-x}du$ για κάθε $x\in R$.

α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f,

β) Να εξετάσετε αν η f έχει ασύμπτωτες και τη μονοτονία της,

γ) Να εξετάσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής,

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα x'x και τις ευθείες x = -3 , x = 0 σχεδιάζοντας πρώτα τη γραφική παράσταση της f.

**Β)** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και ισχύει $xf(x)+3x=\eta\mu 2x+(x+1)^4x$, για κάθε $x\in R$, να βρεθεί το f(0).

## ΘΕΜΑ 23

**Α)** Δίνεται συνάρτηση f συνεχής ορισμένη στο R για την οποία ισχύει:

$\int_0^{\pi/2} f(x)dx = 1+\frac{\pi}{2}$. Να δειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in R$ τέτοιο ώστε: $f(\xi) = \eta\mu 2\xi + 1$.

**Β)** Θεωρούμε την συνεχής συνάρτηση $f:[0,1] \to (0,1)$. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $2x-1-\int_0^x f(t)dt = 0$ έχει μια ακριβώς λύση στο $(0,1)$.

## ΘΕΜΑ 24

**Α)** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και ισχύει $f(x)-\int_0^x \frac{t}{e^{f(t)}}dt - 1 = 0$, τότε:

α) Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R,

β) Να βρεθεί ο τύπος της f,

γ) Υπάρχει $\rho \in R$ ώστε να ισχύει $f(\rho)=0$;

**Β)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: R \to R$. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ και να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία, αν ισχύει $f(\ln 3) = 3$, $f(\chi)>0$ και $\frac{f'(x)}{f(x)} = 1+e^x$, για κάθε $x \in R$.

## ΘΕΜΑ 25

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \lambda x^3 + \mu x^2 + \kappa x$ που παρουσιάζει στο σημείο $x_1 = 1$ τοπικό μέγιστο και στο σημείο $x_2 = 2$ καμπή.

α) Να δειχθεί ότι $\mu = -6\lambda$, $\kappa = 9\lambda$,

β) Για ποια τιμή του $\lambda$ το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του γραφήματος της f και του άξονα $x'x$ είναι 27;

γ) Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} E(\lambda) = +\infty$.

## ΘΕΜΑ 26

**Α)** Θεωρούμε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f^3(x) + x^2 f(x) = 2x^3$, για κάθε $x \in R$. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lambda \in \Re$, να προσδιορίσετε το $\lambda$.

**Β)** Μια συνάρτηση $f: \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x) - 2xf^2(x) + x^2 f(x) = x^2 \eta\mu 2x$, για κάθε $x \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ είναι πραγματικός αριθμός,

β) Να βρείτε τον αριθμό $f'(0)$.

## ΘΕΜΑ 27

**Α)** Δίνεται η συνάρτηση f στο $\Re$ με την ιδιότητα: $f(x)\cdot(fof)(x)=1,$ για κάθε x∈R και f(10)=9. Να δείξετε ότι η f <u>δεν</u> είναι 1-1.

**Β)** Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση g στο R η οποία διέρχεται από τα σημεία Α(5,9) και Β(3,2).

α) Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα,

β) να λύσετε την εξίσωση: $g(2+g^{-1}(\chi^2+2\chi))=9$.

**Γ)** Δίνονται οι συναρτήσεις f,g παραγωγίσιμες στο R και επιπλέον η f' είναι 1-1. Αν οι συναρτήσεις f και fog παρουσιάζουν ακρότατο στο 1 και είναι $g'(\chi)\neq 0$ για κάθε x∈R, να αποδείξετε ότι g(1)=1.

## <u>ΘΕΜΑ 28</u>

Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη f στο R με $f''(x)>0$ για κάθε x∈R.

Έστω $g(x)=\int_{5-x}^{1+x} f(t)dt$, x∈R. Να αποδείξετε :

α) Η g είναι παραγωγίσιμη στο R και για κάθε x∈R ισχύει $g'(2+x)=g'(2-x)$,

β) Η εξίσωση $f(1+x)+f(5-x)=\frac{1}{x}\int_{1+x}^{5-x} f(t)dt$ έχει λύση στο (0,2),

γ) Η γραφική παράσταση της g έχει ένα μόνο σημείο καμπής το οποίο και να βρείτε.

## <u>ΘΕΜΑ 29</u>

**Α)** Έστω η γνησίως αύξουσα συνάρτηση f: (0,+∞)→R , η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$, για κάθε x∈(0,+∞).

α) Να μελετήσετε την g: (0,+∞)→R , $g(x)=\int_1^x \frac{f(t)}{1+t^2}dt$ ως προς τη μονοτονία,

β) Αποδείξτε ότι $g(x)=g(\frac{1}{\chi})$, για κάθε x∈(0,+∞).

**Β)** Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1 και ισχύει $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-x^2}{x-1}=7$. Να δείξετε ότι f(1)=1 , f'(1)=9 και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(1,f(1)).

## <u>ΘΕΜΑ 30</u>

**Α)** Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R , διέρχεται από την αρχή των αξόνων και ικανοποιεί τη σχέση: $e^x+\int_0^x f(t)dt-a^2x-1\geq 0$, για κάθε χ∈R. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό $\alpha$.

**Β)** Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και ικανοποιεί τη σχέση: $\int_0^x f(t)dt \le e^{2004x} + x^5 - 1$, για κάθε χ∈R. Δείξτε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(0,2004).

**Γ)** Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και ικανοποιεί τη σχέση: $\int_{1-x}^{1+x} f(t)dt \ge 2x$, για κάθε χ∈R. Δείξτε ότι f(1)=1.

## ΘΕΜΑ 31

**Α)** Δίνονται οι συναρτήσεις f ,g παραγωγίσιμες στο R ώστε να ισχύει f '(x) = g'(x) , για κάθε χ∈R , και οι γραφικές παραστάσεις των f ,g διέρχονται από τα σημεία Α(-1,2) , Β(-1,3) αντίστοιχα . Θεωρούμε τους μιγαδικούς z = 2x + if(x) και w= 2x + ig(x). Να βρεθεί ο μιγαδικός z – w.

**Β)** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση g στο R καθώς και οι μιγαδικοί z = x + ig(x) . Εαν επιπλέον ισχύει $z\bar{z} - \mathrm{Re}(z(1+i)) = x^2$ , για κάθε χ∈R, δείξτε ότι:

α) Η g δεν παρουσιάζει ακρότατο,

β) Η g είναι 1-1 και να βρεθεί η αντίστροφη συνάρτηση $g^{-1}$.

## ΘΕΜΑ 32

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x + x^3$ .

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα,

β) Να λύσετε την εξίσωση $2^{x^2-1} - 2^{3x^2-9} = (3x^2-9)^3 - (x^2-1)^3$,

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα Ι= $\int_{\rho_1+3}^{\rho_2+2003} x \cdot e^{x-2002} dx$, όπου $\rho_1 < \rho_2$ είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης.

## ΘΕΜΑ 33

**Α)** Δίνεται η συνάρτηση f(χ)=e+xlnx-2x , x>0.

α) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία της,

β) Να διατάξετε τους αριθμούς f(e), f(π) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $e^{e-2\pi} \cdot \pi^{\pi} > 1$.

**Β)** α) Να αποδείξετε ότι xlnx+1>x , για κάθε χ>1,

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $h(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$,

γ) Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό α που ικανοποιεί τη σχέση:

$(\alpha^2+\alpha+1) \cdot \ln(\alpha^2+5) = (\alpha^2+4) \cdot \ln(\alpha^2+\alpha+2)$.

## ΘΕΜΑ 34

**Α)** Έστω η παραγωγίσιμη $f : R \to R$ για την οποία ισχύουν :

$(x^2 + x + 1) \cdot f'(x) + (2x+1)f(x) = e^x$ , για κάθε $x \in R$ και $f(0) = 1$.

α) Να βρείτε τον τύπο της f,

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα,

Να αποδείξετε ότι ισχύει $\int_0^{y_M} f(ex + y_M)dx = \frac{1}{e}\int_1^{1+e} f(x)dx$ όπου $y_M$ το τοπικό μέγιστο της f.

**Β)** Έστω f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει $1 + f(0) = e + f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε να είναι:

$e^{ημξ} \cdot συνξ + \int_1^{f'(\xi)} dx = 0$ .

## ΘΕΜΑ 35

**Α)** Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \alpha\chi^3 + \beta\chi + \gamma$. Αν η f είναι περιττή, παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $\chi_0 = 1$ και $\int_0^2 f(x)dx = 2$, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma$.

**Β)** Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και g πολυωνυμική συνάρτηση τέτοια ώστε $g(0)=0$ και $\int_0^1 f(x)dx = g(1)$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = g'(\xi)$.

## ΘΕΜΑ 36

Δίνεται η $f(x) = (x^2 - 2x + 3)e^x - \frac{1}{3}x^3 - x + 3$.

α) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να δειχθεί ότι $f(x) > 0$ , για κάθε $x \in R$,

β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει $\int_{|z-1|}^{|z-i|} f(x)dx = 0$.

## ΘΕΜΑ 37

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f που ικανοποιεί τη σχέση: $3 - e^x + f(x) + xf'(x) = \int_0^1 (2t+1)dt$ , για κάθε $x \in R$.

α) Να βρεθεί ο τύπος της f,

β) Αποδείξτε ότι $f'(0)=1/2$ και να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο $A(0,f(0))$,

γ) Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\cdot f(t)dt+e^x-x-1}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

## ΘΕΜΑ 38

**Α)** Έστω $f: R\to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, με συνεχή δεύτερη παράγωγο τέτοια ώστε να ισχύει $f'(x^3+x)=4x$ για κάθε $x\in R$. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων τότε :

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $A(2,f(2))$,

β) Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού $\alpha$ ώστε η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z=2\cdot\alpha\cdot i^{52}+i\cdot f'(\alpha^3+\alpha)$ να ανήκει στην παραπάνω εφαπτομένη,

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^2 xf''(x)dx$.

**Β)** Έστω $z\in\mathbb{C}$, $z\neq -2$, και ο μιγαδικός $w=\dfrac{z+2i}{z+2}$. Αν $w\in R$, δείξτε ότι η εικόνα του μιγαδικού z κινείται επί της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(\chi)=-e^{x}\cdot\ln(x+1)-2$ στο σημείο $M(0,g(0))$.

## ΘΕΜΑ 39

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο R για την οποία ισχύει $f'(x)+2xf(x)=e^{x-x^2}$, για κάθε $x\in R$.

α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^{x^2}f(x)-e^x$ είναι σταθερή στο R,

β) Βρείτε την συνάρτηση g εάν $\lim_{x\to 0}\dfrac{xg(x)-\eta\mu x}{x}=-1$,

γ) Να βρείτε τη συνάρτηση f,

δ) Δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$,

ε) Δείξτε ότι η παραπάνω εφαπτομένη είναι μοναδική.

## ΘΕΜΑ 40

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο $(0,+\infty)$, με $f(x)=\dfrac{1}{x}+\int_1^x \dfrac{tf(t)}{x^2}dt, x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$,

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(\chi)=\chi\cdot f(\chi)-\ln\chi$ είναι σταθερή $(0,+\infty)$,

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f,

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f,

ε) Να βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες x =1 , x = e και τον άξονα x'x.

**ΘΕΜΑ 41**

**Α)** Αν $z_0 = \alpha + \beta i$ , να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων M(z) για τους οποίους ισχύουν $\operatorname{Re}(z^2) + 2\operatorname{Im}(z) = \frac{|z_0|^2}{2}$ , όπου $\alpha = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\sigma\upsilon\nu(2\sqrt{x})}{2x}$ και $\beta = f'(0)$ με $x - x^2 \leq f(x) \leq x$ , για κάθε $x \in (-1\ ,1)$.

**Β)** Δίνονται δυο μιγαδικοί αριθμοί z , w καθώς και η συνάρτηση f με τύπο $f\ (x) = |z|x^3 + |w|x^2 - |z+w|$ . Να αποδείξετε με τη βοήθεια του θεωρήματος Bolzano ότι η εξίσωση $f\ (x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $[-1,1]$ .

**ΘΕΜΑ 42**

Δίνεται η συνεχής στο διάστημα $[0,+\infty)$ συνάρτηση f. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt, & \alpha\nu \quad x>0 \\ f(0), & \alpha\nu \quad x=0 \end{cases}$$

. Να δειχθεί ότι:

α) Η g είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ ,

β) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ , τότε η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$.

**ΘΕΜΑ 43**

**Α)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{(\alpha-1)x+6}{x+\beta}$ , με χ>-1 (α,β∈R) η οποία έχει ασύμπτωτες τις ευθείες ψ=2 και χ=-1.

α) Να αποδείξετε ότι ι τύπος της f είναι $f(x) = \frac{2x+6}{x+1}$, χ>-1,

β) Να βρείτε συνάρτηση g τέτοια ώστε να ισχύει g'(χ)=f(χ), για κάθε χ>-1, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο M(0,2),

γ) Να μελετήσετε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης h(χ)=$\frac{g(\chi)}{\chi+1}$ ,χ>-1.

**Β)** Έστω f,g:R→R συναρτήσεις , τέτοιες ώστε να ισχύει f(χ)-g(χ)=χ-4 , για κάθε χ∈R. Αν η ευθεία ψ=3χ-7 είναι ασύμπτωτη της f στο +∞ , να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 2$ , $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)+3x-\eta\mu 2x}{xf(x)-3x^2+1} = -\frac{5}{7}$.

**ΘΕΜΑ 44**

**Α)** Δίνεται η συνάρτηση f(χ)=2χ-ημχ , χ∈[0,π].

α) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f στο $[0,\pi]$,

β) Να δειχθεί ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί το σύνολο τιμών της,

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(\chi)=\chi$,

δ) Αποδείξτε ότι $\int_0^{2\pi} f^{-1}(x)dx = \pi^2 + 2.$

**Β)** Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $h(x)=\int_0^x e^{\sqrt{1+t^2}}dt + \int_{x+1}^1 e^{\sqrt{t^2-2t+2}}dt$ είναι σταθερή στο R και έπειτα να βρείτε τον τύπο της.

## ΘΕΜΑ 45

**Α)** Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο R , με την f'' συνεχή στο R. Αν η f παρουσιάζει ακρότατα στα σημεία $\chi_1=5$ και $\chi_2=8$ και ισχύει $\int_5^8 x\cdot f''(x)dx = 0,$ δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(5,8)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

**Β)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln(xe^2)}{2x}$.

α) Να μελετήσετε τα ακρότατα και τη μονοτονία της f,

β) Να δειχθεί ότι $ex \geq 2+\ln x$, για κάθε $\chi>0$,

γ) Δείξτε ότι $\int_{1/e^4}^1 |f(x)|dx = 2$.

## ΘΕΜΑ 46

**Α)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{ax^2+2\beta x+1}{x^2+1}$, όπου $\alpha = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{2\sigma\upsilon\nu\chi}{\pi-2x}$ και $\beta = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τους άξονας $\chi'\chi$, $\psi'\psi$ και την ευθεία $\chi=2$.

**Β)** Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R\to R$ για την οποία ισχύει $\int_0^x f(t)dt \geq xf(1)$ , για κάθε $x\in R$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(x_0)=0$.

## ΘΕΜΑ 47

**Α)** Έστω $f$ συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$.

α) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $g(x)=\int_\alpha^x e^{-x} f(t)dt, x\in[\alpha,\beta]$,

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=e^{\xi}g(\xi)$.

**Β)** Μία συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ και ισχύει: $100\int_0^1 f(x)dx = 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = \xi^{99}$.

**Γ)** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\Re$ για την οποία ισχύει: $\int_{1/e}^{1} f(x)dx = \frac{2-e}{e}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi > 0$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = \ln \xi$.

## ΘΕΜΑ 48

Θεωρούμε συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$, ώστε να ισχύει $\int_x^{x^3} f(t)dt \le x^3 - x$, για κάθε χ∈R.

α) Να αποδείξετε ότι f(-1)=f(0)=f(1),

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία με τετμημένες $\xi_1$ , $\xi_2$ ∈(-1,1) στα οποία οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f να είναι παράλληλες στον άξονα χ'χ

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο ξ∈(-1,1) τέτοιο ώστε f''(ξ)=0,

δ) Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει καμπή στο σημείο Α(ξ,f(ξ));

## ΘΕΜΑ 49

Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο R συναρτήσεις f,g τέτοιες ώστε να ισχύει $\int_1^x f(t)dt + \int_x^1 g(t)dt = x^2 - 2x + 1$, για κάθε χ∈$\Re$.

Έστω ότι η εξίσωση f(χ)=0 έχει δύο λύσεις $\rho_1$ , $\rho_2$ με $\rho_1<1<\rho_2$.

α)Να αποδείξετε ότι:

i) η εξίσωση g(χ)=0 έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $(\rho_1,\rho_2)$,

ii) υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ∈$(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο ώστε g'(ξ)=-2 ,

β)Δείξτε ότι αν η συνάρτηση g είναι κυρτή στο R τότε και η f είναι κυρτή στο R,

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g και τον άξονα ψ'ψ.

## ΘΕΜΑ 50

**Α)** Δίνεται ο μιγαδικός $z = \sqrt{\frac{e^x}{e^x+1}} + \sqrt{y}i$ με x , y $\in R$ και y > 0 ώστε ο $z^2$ να είναι φανταστικός αριθμός .

α) Να εκφράσετε το y ως συνάρτηση του x, β) Αν η παραπάνω συνάρτηση είναι $y : R \to R$ τότε να δείξετε ότι η $y(x)$ αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη $y^{-1}$,

**Β)** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to R$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \alpha + f(\alpha)i$, $z_2 = \beta + f(\beta)i$. Αν $\frac{z_1}{z_2} \in R$, να δείξετε ότι

α) Ισχύει $|z_1 + iz_2| = |z_1 - iz_2|$,

β) Ισχύει το Θ.Rolle για την συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$,

γ) Υπάρχει $x_o \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_o, f(x_o))$ να διέρχεται από το $O(0,0)$,

δ) Αν $\lim_{x\to\alpha}\int_{a}^{x}\frac{f(t)}{(x-a)t}dt = 1$, να δείξετε ότι η $f'(x) = 1$ έχει λύση στο $(\alpha, \beta)$.

## ΘΕΜΑ 51

**Α)** Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\Re$ για την οποία ισχύει :
$2f(x)+f(2004-x)= -x$, για κάθε $x \in \Re$.

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $g(x)=\frac{f(x)}{\ln x}$.

**Β)** Δίνεται η παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f για την οποία ισχύει : $f'(x)+f(x)=1$, για κάθε $x \in \Re$ και $f(0)=e+1$.

α) Να βρεθεί ο τύπος της f,

β) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο R,

γ) Να βρείτε το όριο $\lim_{y\to+\infty}(\lim_{x\to 2} f(xy))$.

## ΘΕΜΑ 52

**Α)** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει : $[f(x)]^{1821}+\alpha[f(x)]^3= -e^{f(x)}$, $\alpha>0$, για κάθε $x \in \Re$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή και μάλιστα αρνητική,

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $g(x)=\frac{f(x)}{e^x - 1}$.

**Β)** Έστω η παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση g και η συνάρτηση $f(x)=\int_{1}^{2x+1} g(2x-t)dt$.

α) Να δείξετε ότι : $f''(x)+f'(x)=2[g(2x-1)+2g'(2x-1)]$, για κάθε $x \in \Re$.

β) Αν η γραφική παράσταση της g βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x και η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathrm{R}$, να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)= f'(x) +f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathrm{R}$.

## ΘΕΜΑ 53

**Α)** α) Αν $f$ είναι μια παραγωγίσιμη στο $\mathrm{R}$ συνάρτηση και η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει το πολύ $\nu$ διακεκριμένες πραγματικές ρίζες $(\nu \in \mathrm{N})$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ $\nu+1$ διακεκριμένες πραγματικές ρίζες.

β) Να λυθεί η εξίσωση: $4^x = -x^2 + 15x - 10$.

**Β)** α) Έστω $f$ μια συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση στο $[\alpha , \beta]$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει λύση στο $(\alpha , \beta)$ αν και μόνο αν $f(\alpha)f(\beta) < 0$.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^7 + x^5 +2x - \lambda = 0$ έχει λύση στο $(-1 , 1)$ αν και μόνο αν $\lambda \in (-4 , 4)$.

## ΘΕΜΑ 54

**Α)** α) Έστω η συνάρτηση $f$ ορισμένη στο $[\alpha , \beta]$. Αν η $f$ είναι αντιστρέψιμη και έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο $[\alpha , \beta]$, να δείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha).$$

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x +x^5$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_{1}^{e+1} f^{-1}(x)dx$.

**Β)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$ τέτοια ώστε

$$f(x) = \int_{1}^{x} (x - \nu t) f(t)dt,\ \nu \in \mathrm{N}^*,$$ για κάθε $x \in \Re$. Να δείξετε ότι:

α) $f(1) = 0$ και $f'(1) = 0$.

β) $f''(x) = (2 - \nu)f(x) + (1 - \nu)xf'(x)$, για κάθε $x \in \Re$.

γ) $f(x) = 0$, για κάθε $x \in \Re$, αν $\nu = 1$ ή $\nu = 2$.

## ΘΕΜΑ 55

**Α)** α) Αν $f$ συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$ με $f(x) \geq 0$, για κάθε $\chi \in [\alpha,\beta]$ και $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)dx = 0$, να δείξετε ότι $f(x)=0$, για κάθε $\chi \in [\alpha,\beta]$.

β) Έστω συνάρτηση $f$ συνεχής στο $[0 , 1]$, τέτοια ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0 , 1]$

και $\int_0^1 \ln^2 f(x)dx = 2\int_0^1 (\chi^2 \ln f(\chi) - \frac{\chi^4}{2})dx$ .

β1) Να δείξετε ότι f(x) = $e^{x^2}$ , για κάθε $x \in [0\ ,\ 1]$

β2) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^1 \frac{f(x)}{f(1-x)+f(x)}dx$ .

**Β)** Έστω η συνάρτηση f τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$, τέτοια ώστε :

$f'(25) + f'(20) = f'(35) + f'(10)$ .

α) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1$ , $\xi_2 \in (10\ ,\ 35)$ με $\xi_1 < \xi_2$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) = f''(\xi_2)$ .

β) Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (10\ ,\ 35)$ τέτοιο ώστε $f^{(3)}(\xi) = 0$ .

## ΘΕΜΑ 56

**Α)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 5^{\alpha x}+6^{\beta x}+7^{\gamma x}$ με $f(x) \geq 3$ , για κάθε $x \in \Re$ .Αποδείξτε ότι :

α) η f έχει ελάχιστο το 3 , β) $5^{\alpha} \cdot 6^{\beta} \cdot 7^{\gamma} = 1$ .

**Β)** Να λυθεί στο R η εξίσωση :

$(x^2+x+1)^{11} - (2x^2-x+1)^7 + (x^2+x+1)^7 - (2x^2-x+1)^{11} = x^2 - 2x$ .

## ΘΕΜΑ 57

**Α)** Η συνάρτηση $f : R \to R$ είναι συνεχής στο R και ισχύει $f(x) = \int_0^x 2te^{t^2+1-f(t)}dt$ , να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f. Είναι η f ''1-1'' ;

**Β)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 \sigma\upsilon\nu x}{2^x+1}, x \in R$ .

α) να αποδείξετε ότι $f(x) + f(-x) = x^2\sigma\upsilon\nu x, x \in R$

β) να βρείτε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ .

**Γ)** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt$ , χ>0. α) να βρείτε το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{\ln x}{x}dx$ .

β) να βρείτε τη συνάρτηση g με τύπο $g(x)=f(x)+f(\frac{1}{x})$ , x>0.

## ΘΕΜΑ 58

**Α)** Η συνάρτηση $f : [-\pi,\pi] \to R$ είναι συνεχής με την ιδιότητα $\left(\frac{\chi}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{f(\chi)}{e}\right)^2 = 1$, για κάθε $\chi \in [-\pi,\pi]$. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(-\pi,\pi)$.

**Β)** Δίνεται η συνάρτηση f με την ιδιότητα $x^{f(x)} = e^{x-f(x)}$, για κάθε χ>1. Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f με συντελεστή διεύθυνσης 1.

**Γ)** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$ με $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in R$. Αν ισχύει $e^{f(x)} \geq af(x)+1$, για κάθε $x \in R$ και f(1)=0, να βρείτε το $\alpha$.

## ΘΕΜΑ 59

**Α)** Δίνεται η συνάρτηση f(χ)=$e^x \cdot g(x)$, όπου g παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, και οι μιγαδικοί αριθμοί $z = e^x + i$, $w = g(x) + ie$ τέτοιοι ώστε να ισχύει $\frac{1}{wz+\overline{wz}} \geq 0$, για κάθε χ>0.

Αν g(1)=1 να δείξετε ότι

α) η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $\chi_0$=1

β) g'(1)= -1.

**Β)** Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (α,f(α)) σχηματίζει με τον άξονα χ'χ γωνία 60° και στο σημείο (β,f(β)) γωνία 45°. Αν η συνάρτηση f'' είναι συνεχής στο [α,β], να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα I=$\int_{\alpha}^{\beta} f''(x)dx$.

**Γ)** Αν $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-1}{x-3} = 2$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 3}\frac{x^{\nu}\cdot f(x)-3^{\nu}}{x-3}$.

## ΘΕΜΑ 60

**Α)** Δίνεται η συνάρτηση f(χ)= $\int_1^{2x}\frac{dt}{t+1}$, χ≥0. Να αποδείξετε ότι $\frac{4}{15} < f(7) - f(5) < \frac{4}{11}$.

**Β)** Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις f,g στο [0,1] με $f(x) < 0 < g(x)$, για κάθε χ στο [0,1].

Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ξ∈[0,1]: $\int_0^{\xi} f(t)dt = \int_1^{\xi} g(t)dt$

**Γ)** Δίνεται συνεχής συνάρτηση f:[0,+∞)→R με f(χ)>$\int_0^x f(t)dt$, για κάθε χ≥0.

Να αποδείξετε ότι

α) η συνάρτηση g(χ)=$\left(\int_0^x f(t)dt\right)\cdot e^{-x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο [0,+∞)

β) f(χ)>0, για κάθε χ≥0.

## ΘΕΜΑ 61

**Α)** Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο [0,+∞).

α) Αν f(3)=6 , f(5)=10 να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\chi_o \in (3,5)$ τέτοιο ώστε η γραφική παράσταση της f στο σημείο $A(\chi_o, f(\chi_o))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) να αποδείξετε ότι $\int_0^{x_o} x f''(x)dx = f(0)$.

**Β)** Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$ και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(\chi)>1$ , για κάθε $\chi>0$.

α) να δείξετε ότι $f(\chi)\geq \chi+f(0)$, για κάθε $\chi\geq 0$

β) αν $f(0)<0$ δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $\chi_o>0$: $f(\chi_o)=0$.

**Γ)** Έστω συνάρτηση $g:[\alpha,\beta]\to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει $g(\alpha)+g(\beta)=2g(\frac{\alpha+\beta}{2})$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$: $g''(\xi)=0$.

## ΘΕΜΑ 62

**Α)** Έστω η συνάρτηση $f(\chi)=\chi^4-2\chi^2+\alpha$ $(\alpha\in R)$

α) Αν $A(\chi_1,f(\chi_1))$ , $B(\chi_2,f(\chi_2))$ , $\Gamma(\chi_3,f(\chi_3))$ είναι τα τοπικά ακρότατα της f με $\chi_1<\chi_2<\chi_3$ , να αποδείξετε ότι $\vec{AB}\perp\vec{B\Gamma}$

β) Αν $0<\alpha<1$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(\chi)=0$ έχει μοναδική λύση στο $(-1,0)$.

**Β)** Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R με $f'(\chi)\neq 0$ και $g(x)\cdot f'(\chi)=2f(\chi)$, για κάθε $\chi\in R$, όπου g παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής το $A(\chi_o,f(\chi_o))$ να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο A είναι παράλληλη της ευθείας $\psi-2\chi+5=0$.

**Γ)** Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $\psi=1+5\chi$, να βρείτε το όριο $\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot f(x)-3x^2+x\cdot\eta\mu x}{x^2\cdot f(x)-5x^3}$.

## ΘΕΜΑ 63

**Α)** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R\to R$ με $f(\chi)>-1$ και $e^{f(x)}+\sqrt{1+f(x)}=2$, για κάθε $\chi\in R$ (1)

α) να δείξετε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση

β) να βρείτε την f.

**Β)** Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:R\to R$ με $f(2001)=g(2001)$ και $(fg)'(x)=f'(x)f(x)+g'(x)g(x)$, για κάθε $\chi\in R$. Να δείξετε ότι f=g.

**Γ)** Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)=0$ και $f''(\chi)<0$ , για κάθε $\chi\in R$, να δείξετε ότι $f(\chi)>0$ , για κάθε $\chi\in(\alpha,\beta)$.

## ΘΕΜΑ 64

Δίνονται οι συναρτήσεις $g(\chi)=\chi^3-\chi-2\ln\chi+1$ και $f(\chi)=x+\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x^2}$ , $\chi>0$.

α) να βρεθεί η συνάρτηση $g'$

β) να μελετηθεί η $g$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

γ) να βρεθεί το σύνολο τιμών της $g$

δ) να δείξετε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ε) να δείξετε ότι $f'(\chi)=\frac{g(x)}{x^3}$ , για κάθε $\chi>0$

ζ) δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi>0$ : $f(\xi)=\xi$

η) να μελετηθεί η $f$ ως προς τη μονοτονία και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες.

## ΘΕΜΑ 65

**Α)** Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha,\beta$ ώστε το όριο $\lim_{x\to0}\frac{x\cdot(e^x+a)-2(e^x+\beta)}{x^3}$ να υπάρχει στο R.

**Β)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^4+ax^3+\beta x^2+\gamma\chi+\delta$, $\chi\in R$. Αν η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει καμπή σε δύο διαφορετικά σημεία, να δειχθεί ότι $3\alpha^2>8\beta$.

**Γ)** Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1,z_2,z_3$ ισχύει $|z_1|=|z_2|=|z_3|=a^2>0$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_e^{e+1}\left|\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3}{z_1+z_2+z_3}\right|dx$.

## ΘΕΜΑ 66

**Α)** α) Έστω $f:[\alpha,\beta]\to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη, κυρτή συνάρτηση. Δείξτε ότι $f(\frac{\alpha+\beta}{2})<\frac{f(a)+f(\beta)}{2}$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-\ln(\ln x)$, $x>1$. Δείξτε ότι είναι κυρτή στο $(1,+\infty)$ και ότι για $\alpha,\beta>1$ ισχύει $\ln(\frac{a+\beta}{2})\geq\sqrt{\ln a\cdot\ln\beta}$ .

**Β)** Έστω $f:\Delta\to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(\chi)>0$, για κάθε $\chi\in\Delta$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(\chi)=\ln(f(x))$ είναι κυρτή στο $\Delta \Leftrightarrow f(x)f''(x)>(f'(x))^2$, για κάθε $\chi\in\Delta$.

## ΘΕΜΑ 67

**Α)** Έστω $f:[\alpha,\beta]\to R$ συνεχής συνάρτηση με $f(\chi)\neq0$, για κάθε $\chi\in[\alpha,\beta]$. Δίνεται επιπλέον μιγαδικός $z\neq0$ με $z+\frac{1}{z}=f(a)$, $z^2+\frac{1}{z^2}=f^2(\beta)$ και $\mathrm{Im}(z)\neq0$. Να αποδείξετε ότι α) η εξίσωση $x^3 f(a)+f(\beta)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (-1,1)

β) $|z|=1$

γ) $|f(\beta)|<|f(a)|$.

**Β)** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο R με f(1)=0 και $f'(1)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\eta\mu x}$. Αν μιγαδικός z με την ιδιότητα $e^{f(x)}-1\geq |z|\cdot f(x)$, για κάθε χ∈R, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού z.

## ΘΕΜΑ 68

**Α)** Έστω η συνεχής συνάρτηση f στο R με f(χ)>0 και έστω g(χ)=$\int_0^1 t\cdot f(xt)dt$ (t,χ∈R).

Να αποδείξετε ότι

α) g(χ)=$\frac{1}{\chi^2}\int_0^{\chi} t\cdot f(t)dt$, για κάθε χ≠0

β) η g είναι συνεχής στο μηδέν

γ) $\chi\cdot g(x)<\int_0^x f(t)dt$, για κάθε χ>0

δ) Αν $\int_1^2 t\cdot f(t)dt=3\int_0^1 t\cdot f(t)dt$ , τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈( 1,2) τέτοιο ώστε 2g(ξ)=f(ξ).

**Β)** Δίνονται οι μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί $z_1$,$z_2$ και οι συναρτήσεις f,g με $f(x)=\int_0^x |2tz_1+z_2|dt$, $g(x)=x^2|z_1|+x|z_2|$, χ≥0. Να αποδείξετε ότι f(χ)≤g(χ), για κάθε χ≥0.

**Γ)** Αν η εφαπτομένη της συνάρτησης $f(x)=x^2+|xz+w|$, όπου z,w∈**C** με $|z|=|w|=1$, στο σημείο A(0,f(0)) είναι κάθετη στην ευθεία ψ=-χ+2, να βρεθεί ο τύπος της f.

## ΘΕΜΑ 69

**Α)** Έστω f:[-2,2]→R παραγωγίσιμη συνάρτηση με f(-2)=-2 , f(2)=2. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in$(-2,2): $\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}=2$.

**Β)** Έστω f στο συνεχής [α,β] και παραγωγίσιμη στο (α,β) με f(α)=α , f(β)=β. Να αποδείξετε ότι

α) υπάρχει γ∈(α,β): f(γ)=α+β-γ

β) υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in$ (α,β) με $\xi_1\neq\xi_2$: $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=1$.

**Γ)** Έστω f παραγωγίσιμη στο [0,3] με f(0)=f(3). Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\alpha,\beta,\gamma \in (0,3)$ : $f'(a)+f'(\beta)+f'(\gamma)=0$.

## ΘΕΜΑ 70

**Α)** Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$ με $f''(x)-2f'(x)+4f(x)=0$, για κάθε $\chi \in R$. Δείξτε ότι η f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο R και ότι ισχύει $f'''(x)+8f(x)=0$, για κάθε $\chi \in R$.

**Β)** Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,1]\to R$ για την οποία ισχύει $f'(x) \geq \dfrac{f^2(1)+f^2(0)+2}{2}$ για κάθε $x \in [0,1]$. Να βρεθούν οι αριθμοί f(0) και f(1).

**Γ)** Αν για την συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$ , με $f(0) = 0$ ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$ να αποδείξετε ότι $f'(x) > \dfrac{f(x)}{x}$, $x > 0$.

## ΘΕΜΑ 71

**Α)** Έστω $f:[-1,1]\to R$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με f(1)=0 και $\int_0^x f(t)dt \geq x$, για κάθε $x \in [-1,1]$. Να αποδείξετε ότι

α) f(0)=1

β) υπάρχει $\chi_o \in (0,1)$ : $f(\chi_o)= \chi_o$

γ) υπάρχει $\xi \in (0,1)$ : $\int_0^{\xi} f(t)dt = \dfrac{1}{2}$.

**Β)** Έστω $f: R \to R$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $e^x - e^{f(x)} = e^{x+f(x)}$, για κάθε $\chi \in R$.

α) να βρείτε τον τύπο της f

β) να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) να αποδείξετε ότι $|f(a)-f(\beta)| < |a-\beta|$, για κάθε $\alpha,\beta \in R$ με $a \neq \beta$.

δ) να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 e^{f(x)-x}dx$.

## ΘΕΜΑ 72

**Α)** Έστω $f:[0,1]\to R$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με f' συνεχής, για την οποία ισχύει $\int_0^1 x^2 f'(x)dx = f(1)-4$.

α) να δείξετε ότι υπάρχει $\chi_o \in (0,1)$ : $f(\chi_o)= \dfrac{2}{x_o}$

β) να δείξετε ότι υπάρχει $\chi_1 \in (0,\chi_o)$: $f(x_1)+x_1 f'(x_1) = \dfrac{2}{x_o}$

γ) αν επιπλέον ισχύει $\int_0^1 f^2(x)dx = 12$ να βρείτε τον τύπο της f.

**Β)** Δίνεται συνεχής συνάρτηση f:(0,+∞)→R με f(χ) ≠ 0 για κάθε χ>0 και

$f(x) = 1 + \int_1^x \frac{f^2(t)+f(t)}{t^2+t}dt$ . Να αποδείξετε ότι

α) $f(x) > 0$, για κάθε χ>0

β) η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0,+∞)

γ) f(χ)=χ, για κάθε χ>0.

## ΘΕΜΑ 73

**Α)** Έστω η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(0)}{x}, x \neq 0 \\ f'(0), x = 0 \end{cases}$ , όπου η f είναι μια παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση με f' συνεχής στο R. Δείξτε ότι $g(x) = \int_0^1 f'(xt)dt$

**Β)** Δίνεται ο μιγαδικός και μη πραγματικός αριθμός z με |z|=1. Έστω η συνάρτηση f: R →R με $f(x) = |x+z| + |x-z|$.

α) να βρείτε τους αριθμούς f(0) και f '(0)

β) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της γραφικής παράστασης της f στο A(0,f(0))

γ) να δείξετε ότι η f είναι κυρτή

δ) να βρείτε την ασύμπτωτη στης γραφικής παράστασης της f στο +∞.

## ΘΕΜΑ 74

**Α)** Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f,g: R →R για τις οποίες ισχύει f(0)=0 , g(0)=1 και $f'(x)\cdot f(x) + g'(x)\cdot g(x) = g'(x)$, για κάθε χ∈R. Να αποδείξετε ότι

α) οι συναρτήσεις f,g είναι σταθερές

β) $\int_{10}^{14} \frac{2g(x)}{1+g^2(x)}dx = 4$

γ) ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $g(x)z\bar{z} - 16g(x) + if(x) = 0$ είναι κύκλος, ο οποίος και να βρεθεί.

**Β)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a\cdot \ln x + \beta x^2 + 3$ , χ>0 και το σημείο A(1,f(1)). Αν η ευθεία ψ=2χ+4 είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο A, να βρείτε τους αριθμούς α,β.

## ΘΕΜΑ 75

**Α)** Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύουν $x^3 f''(x) = e^{\frac{1}{x}}$, για κάθε χ>0, f(1)=e και f'(1)=0.

α) να βρείτε τον τύπο της f

β) να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) να αποδείξετε ότι $\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq \frac{1}{e}$, για κάθε χ>0

δ) να αποδείξετε ότι f(10)+f(12)>2f(11).

**Β)** Έστω f: R→R παραγωγίσιμη στο [1,2] συνάρτηση και ''1-1'' με $\int_{f(1)}^{f(2)} f^{-1}(x)dx = \int_{2}^{1} f(x)dx$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1,2)$: $f(x_0) + x_0 f'(x_0) = 0$.

## ΘΕΜΑ 76

**Α)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_0^1 \varepsilon\phi(xt)dt$, $x \in [0,\frac{\pi}{2})$.

α) είναι η f συνεχής;

β) να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία

γ) αν $0 < a < \beta < \frac{\pi}{2}$ δείξτε ότι $(\sigma\upsilon\nu\alpha)^\beta > (\sigma\upsilon\nu\beta)^\alpha$.

**Β)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \ln x$, χ>0.

α) να δειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα χ'χ

β) να δειχθεί ότι $\ln x^{x^2} \geq -\frac{1}{2e}$, για κάθε χ>0

γ) να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα χ'χ και τις ευθείες χ=1 και $x=x_0$, όπου $x_0$ είναι το σημείο στο οποίο η f παρουσιάζει ακρότατο.

## ΘΕΜΑ 77

**Α)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln x + x - 1$, χ>0.

α) να βρείτε τη μονοτονία και το σύνολο τιμών της f

β) δείξτε ότι για κάθε κ∈R η εξίσωση $f(x) = k$ έχει μοναδική ρίζα

γ) να λυθεί η εξίσωση $f(x) = e$

δ) να βρείτε τις τιμές του λ∈R για τις οποίες ισχύει η ισότητα $e^{\lambda^2+1} - e^{2\lambda} = \ln(2\lambda) - \ln(\lambda^2+1) - \lambda^2 + 2\lambda - 1$

**Β)** Έστω f:R →R συνεχής συνάρτηση με f(8)=6 και $f(x)\cdot f(f(x)) = 2$, για κάθε χ∈R. Να βρεθεί ο αριθμός f(2).

## ΘΕΜΑ 78

**Α)** Αν η συνάρτηση $f:[0,1]\to(0,+\infty)$ έχει συνεχή παράγωγο και f(0)=1 , f(1)=2, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^1 \frac{f'(x)}{f^2(x)+f(x)}dx$.

**Β)** Αν f:R →R συνεχής συνάρτηση f(0)=0 , f'(0)=1 να βρεθεί το όριο $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\int_0^x x\cdot f(t)dt}{x-\eta\mu x}\right)$.

**Γ)** Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση f:R →R με την ιδιότητα $\eta\mu\left(\int_{\pi/2}^{x} f(t)dt\right)=\sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $\chi\in$R.

## ΘΕΜΑ 79

**Α)** Να αποδείξετε ότι $\int_x^{1/x}\frac{\ln t}{t^2+1}dt=0$, για κάθε χ>0.

**Β)** Να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to 0}\left(1+x^2e^x\right)^{\frac{1}{1-\sigma\upsilon\nu x}}=e^2$.

**Γ)** Να βρεθεί το $\alpha\in$R ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών της εξίσωσης $2x^2+2(1-a)x-a=0$ να είναι ελάχιστο.

## ΘΕΜΑ 80

**Α)** Αν η συνάρτηση $f(x)=x^3+ax^2+\beta x+\gamma$ παρουσιάζει δύο τοπικά ακρότατα διαφορετικού είδους τα οποία βρίσκονται πάνω σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, δείξτε ότι αβ=9γ.

**Β)** Έστω η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R τέτοια, ώστε για κάθε $\chi\in$R να ισχύει $f^2(x)+xf(x)+x^2=5f(x)$. Δείξτε ότι το διάγραμμα της f δεν παρουσιάζει σημείο καμπής.

## ΘΕΜΑ 81

**Α)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\chi^3-\alpha\chi^2+(\beta-1)\chi+\gamma$.

α) δείξτε ότι η f έχει μοναδικό σημείο καμπής ($\chi_o$,f($\chi_o$))

β) αν ισχύει $\alpha^2+3>3\beta$ να δείξετε ότι η f παρουσιάζει δύο τοπικά ακρότατα στις θέσεις $\chi_1,\chi_2$ και ισχύει $\chi_1+\chi_2=2\chi_o$

**Β)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^{\lambda x}}{x^2+\lambda^2}$, $(0\neq\lambda<1)$. Αν $\chi_1,\chi_2$ οι ρίζες της $f'(x)=0$ να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{\lambda\to 0}\left(\dfrac{1+x_1x_2}{1-x_1x_2}\right)^{\frac{(x_1+x_2)^2}{4}}$.

**Γ)** Αν η συνάρτηση $f(x)=x\cdot\eta\mu x$ παρουσιάζει σημεία καμπής, δείξτε ότι αυτά βρίσκονται πάνω στην καμπύλη $x^2-\psi^2=\left(\dfrac{x\psi}{2}\right)^2$.

## ΘΕΜΑ 82

**Α)** Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(1)=1$ και $x\cdot\left(f'(x)\right)^3=f(x)$, για κάθε $\chi>0$. Αν $f(\chi)\neq 0$ για κάθε $\chi>0$, τότε

α) δείξτε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$

β) δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

γ) να βρεθεί ο τύπος της f.

**Β)** Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με $x\cdot f'(x)=f(x)+x^2$, για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

## ΘΕΜΑ 83

**Α)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} ax+\beta, x\leq 0 \\ 6\cdot\dfrac{(x-1)e^x+1}{x^2}, x>0\end{cases}$

α) να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη

β) δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

γ) να λυθεί η εξίσωση $f(\chi)=6$

δ) να δειχθεί ότι η f' είναι συνεχής.

**Β)** Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f(x+\psi)=f(x)+f(\psi)+2x\psi$ ,για κάθε $\chi,\psi\in\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1)=2$, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f εφάπτεται στον άξονα $\chi'\chi$ στην αρχή των αξόνων.

## ΘΕΜΑ 84

**Α)** Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_0=0$ με $f'(0)>0$ και $\left|f^2(x)-4x^2\right|\leq x^2-\eta\mu^2 x$ για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$, να βρεθεί

α) η $f'(0)$

β) το όριο $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(3x)-f(2x)}{f(2x)-f(x)}$.

**Β)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=6x^2+16\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu 2x-15$, $\chi\in[0,\pi]$.

α) να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα

β) να λυθεί η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu^2 x-8\sigma\upsilon\nu x+4=3(x^2-1)$, $\chi\geq 0$.

**ΘΕΜΑ 85**

**Α)** Αν η συνάρτηση f:R →R είναι συνεχής στο $\chi_o$=0 και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2x}{x^2}=4$, να αποδείξετε ότι

α) η f είναι παραγωγίσιμη στο $\chi_o$

β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}=8$.

**Β)** Έστω f:[1,2]→R παραγωγίσιμη συνάρτηση με f(1)=1 , f(2)=2. Να δειχθεί ότι υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

**Γ)** Ένας κύκλος (O,R) τέμνει τη γραφική παράσταση μια συνάρτησης f:(0,+∞)→R στα σημεία Α(α,f(α)) , Β(β,f(β)). Να δειχθεί ότι υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάποιο σημείο της Μ η οποία είναι κάθετη στην ΟΜ.

**ΘΕΜΑ 86**

**Α)** Να βρεθεί η θετική παραγωγίσιμη συνάρτηση f:R→R με την ιδιότητα $2^{f(x)}+\ln(f(x))=2$, για κάθε χ∈R.

**Β)** Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f:R →R με την ιδιότητα $\ln\left|1+\int_0^x f(t)dt\right|=x$, για κάθε χ∈R.

**Γ)** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $\left(f(x^2)\right)^3+2f(x^3)=3$, για κάθε χ∈R, μα βρεθεί το όριο $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{xf(x)-1}{x-1}$.

**ΘΕΜΑ 87**

**Α)** Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f,g: R→R για τις οποίες ισχύει f(3)=g(3)=1 και $f'(x)\cdot f(x)+g'(x)\cdot g(x)=f'(x)+g'(x)$, για κάθε χ∈R.

Να αποδείξετε ότι f=g.

**Β)** Αν είναι 0<α<β, να αποδείξετε ότι $\ln a-\ln\beta>\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\beta}$.

**Γ)** Να λυθεί η εξίσωση $(\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x}=(\sigma\upsilon\nu x)^{\eta\mu x}$, $\chi\in(0,\frac{\pi}{2})$.

**ΘΕΜΑ 88**

**Α)** Έστω ότι για τη συνάρτηση g:R→R ισχύουν $g'(0)=g(0)=0$. Αν $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{1+e^{1/x}}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$, να βρεθεί η f'(0).

**Β)** Έστω ότι για τις παραγωγίσιμες στο $\chi_o=0$ συναρτήσεις f,g:R→R ισχύει $\left(f(x)\right)^2+\left(g(x)\right)^2=x^4$, για κάθε $\chi\in$R. Να αποδείξετε ότι $f'(0)=g'(0)=0$.

**Γ)** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f(\ln x)=e^x$, για κάθε $\chi\geq 1$, να δειχθεί ότι $f'(0)=e$.

## <u>ΘΕΜΑ 89</u>

**Α)** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z=α+βi-1 , όπου $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+2x\right)^{1/x}$ , $\beta=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}$.

Επίσης δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\ln(x+\beta-1)+\dfrac{\ln^2(x+1)}{|z|}$, χ>-1.

α) να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία

β) να λυθεί η εξίσωση $2x+\ln^2(x+1)=2\ln(x+1)$

γ) να βρεθεί το σύνολο τιμών της f

δ) να λυθεί η εξίσωση $x^x=\left(f(0)+2\right)^{x+(f(0)+2)^2}$, χ>0.

**Β)** Δίνεται η συνάρτηση f: R →R συνεχής στο $\chi_o=0$ με την ιδιότητα $\left(f(x)\right)^7+f(x)+x=0$, για κάθε $\chi\in$R.

α) να δείξετε ότι η f είναι ''1-1'' και να βρεθεί η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}$

β) δείξτε ότι $f'(0)=-1$

γ) αν η f είναι παραγωγίσιμη στο R δείξτε ότι δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

## <u>ΘΕΜΑ 90</u>

**Α)** Έστω f: R→R τρεις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με $2f(x)=x\cdot(1+f'(x))$, για κάθε $\chi\in$R. Δείξτε ότι η f'' είναι σταθερή.

**Β)** Να βρείτε συνάρτηση f:R→R για την οποία ισχύουν $f'(1)=f(1)=0$, f(χ)>0 και $x^3f''(x)-xf'(x)+2f(x)=0$ ,για κάθε χ>0.

**Γ)** Αν για κάθε $\chi\in$R ισχύει $f(x)\cdot f'(x)=0$ να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

## <u>ΘΕΜΑ 91</u>

**Α)** Δίνονται οι συναρτήσεις $f:(-\infty,-1]\to R$ με $f(x)=x^2+2x+3$ και $g(x)=e^{2x}+2$, $\chi\in$R.

Να βρείτε τη συνάρτηση $f^{-1}og$ και το σύνολο τιμών της.

**Β)** Αν για τη συνεχή συνάρτηση f: R→R ισχύουν οι σχέσεις $f^2(x)+2xf(x)-2=0$, για κάθε χ∈R και f(-1)< 1 , να βρείτε

α) τον τύπο της f

β) το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$  γ) τις ασύμπτωτες της f.

## ΘΕΜΑ 92

**Α)** α) Δίνεται f: R →R περιττή συνάρτηση. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

β1) δείξτε ότι η f είναι ορισμένη στο R και συνεχής

β2) δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R

β3) δείξτε ότι η f είναι περιττή

β4) να βρεθούν τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

β5) και να βρεθεί η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}$

**Β)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(x^2+a\right)\cdot e^x$ με $\alpha\in$R. Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha$ ώστε η f να μην έχει σημεία καμπής.

## ΘΕΜΑ 93

**Α)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-\dfrac{x^2}{2}$, χ>0.

α) να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

β) δείξτε ότι $\ln x \le \dfrac{x^2-1}{2}$, για κάθε χ>0

γ) δείξτε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής

δ) να βρεθεί το σύνολο τιμών της f

ε) να βρεθούν οι ασύμπτωτες της f

ζ) δείξτε ότι για κάθε χ∈R ισχύει $\ln\left(\dfrac{2x^2+3}{x^2+2}\right)<3x^4+8x^2+5$.

**Β)** Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x+\beta^x}{2}\right)^{1/x}=\sqrt{a\beta}$ (με α,β>0).

## ΘΕΜΑ 94

**Α)** Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με $f(x)=\left(e^x+1\right)^{1/x}$ και $g(x)=xe^x-(1+e^x)\ln(1+e^x)$.
Να αποδείξετε ότι

α) η g είναι γνησίως φθίνουσα στο R

β) g(x)<0, για κάθε χ>0

γ) η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

**Β)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_{-x}^{x}\frac{e^t+\sigma\upsilon\nu t}{1+e^t}dt$, $\chi\in R$.

α) να βρεθεί η $f'(\chi)$

β) να δείξετε ότι $f(\chi)=\chi+\eta\mu\chi$

γ) να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}:[0,\pi]\to[0,\pi]$

δ) να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των $f,f^{-1}$ και των ευθειών $\chi=0$, $\chi=\pi$ είναι ίσο με 4 τ.μ.

## ΘΕΜΑ 95

**Α)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{e^x}{x^2+1}$, $\chi\in R$.

α) να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

β) να βρεθεί το σύνολο τιμών της f

γ) να λυθεί η ανισότητα $e^{x^3-x}>\frac{x^6+1}{x^2+1}$

δ) να βρεθεί το όριο $L=\lim_{x\to 0}\left(\int_{\eta\mu x}^{0}\frac{tf(t)-t}{x^2}dt\right)$

ε) δείξτε ότι η γραφική παράσταση της f έχει μοναδικό κοινό σημείο με την ευθεία $\psi=1$.

**Β)** Να βρεθεί το $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ αν ισχύει ότι $\int_{0}^{a}\left(\varepsilon\phi^2x+\varepsilon\phi x\right)\cdot e^x dx=1$.

## ΘΕΜΑ 96

**Α)** Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R^*$ με $f'(0)=1$ και $f(x+\psi)=f(x)\cdot f(\psi)+3x\psi$, για κάθε $\chi,\psi\in R$.

α) να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R

β) να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^{-x}\cdot\left(f(x)+3x+3\right)$ είναι σταθερή στο R

γ) να βρεθεί ο τύπος της f

δ) να βρεθούν τα όρια $\lim_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{|\eta\mu x|}$.

**Β)** Αποδείξτε ότι $\int_{19}^{99}x^x dx\geq\int_{19}^{99}e^{x-1}dx$.

## ΘΕΜΑ 97

**Α)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$, $\chi>0$.

α) να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f

β) να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

γ) να βρεθούν οι τιμές των α,β ώστε η συνάρτηση $\dfrac{a\ln x+\beta}{x}$ να είναι μια αρχική της f

δ) να βρείτε το $\lim\limits_{k\to+\infty}E(k)$, όπου Ε(κ) είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες χ=1 , χ=κ (κ>1) και τον άξονα χ'χ.

**Β)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=xe^{1-x}$, $\chi\in$R. Να δειχθεί ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(2,f(2)) δεν έχει άλλο κοινό σημείο με την γραφική παράσταση της f.

## ΘΕΜΑ 98

**Α)** Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=xe^{x-2005}$ και $g(x)=kxe^{x-2005}-\lambda e^{x-2005}$ (κ,$\lambda\in$R).

α) αν η g είναι παράγουσα της f να βρεθούν οι αριθμοί κ,λ

β) να λυθεί η εξίσωση $3^{x^2-4x}-3^{-x+4}=-(x^2-4x)^3+(-x+4)^3$

γ) αν $\chi_1<\chi_2$ οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $\chi=\chi_1+2$ και $\chi=\chi_2+2001$.

**Β)** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο R για την οποία ισχύει f'(χ)<χ, για κάθε $\chi\in R$. Δείξτε ότι $f(4)-f(2)<6$.

## ΘΕΜΑ 99

**Α)** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ με $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-2x}{x-2}=3$ και f(3)=4.

α) να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο (2,f(2))

β) αν η f είναι κυρτή στο R να δείξετε ότι f(χ)-5χ+6 $\geq 0$

γ) να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(2,3)$ στο οποίο η f παρουσιάζει ελάχιστο.

**Β)** Έστω η συνάρτηση f:(0,+$\infty$)→R για την οποία ισχύουν f'(1)=1 και $f(x\psi)=xf(\psi)+\psi f(x)$, για κάθε χ,ψ>0.

α) δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο (0,+$\infty$)

β) να βρεθεί ο τύπος της f

γ) να βρεθεί το όριο $L=\lim\limits_{x\to}\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ δ) δείξτε ότι η εξίσωση f(χ)=χ-1 έχει μοναδική ρίζα.

## ΘΕΜΑ 100

**Α)** Να βρεθεί το όριο $L=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{a}{x^3}\displaystyle\int_0^x\dfrac{t}{t^2+1}dt\right)$, για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in$R.

**Β)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^{\frac{1}{x}}, x>0 \\ \lambda, x=0 \end{cases}$.

α) να βρεθεί το λ ώστε η f να είναι συνεχής στο R

β) να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

γ) να δείξετε ότι οι μόνοι θετικοί ακέραιοι α,β για τους οποίους ισχύει $\sqrt[a]{a}=\sqrt[\beta]{\beta}$ είναι οι $\alpha$=2 , β=4

δ) να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\sqrt[4]{4},\sqrt[5]{5}$

ε) να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\dfrac{1}{27}$ στο διάστημα (0,e].

## ΘΕΜΑ 101

**Α)** Έστω $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$ οι εικόνες των οποίων στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος $\chi^2+\psi^2=1$.

α) να αποδείξετε ότι $|z_1+z_2+z_3|=\left|\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}+\dfrac{1}{z_3}\right|$

β) να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\displaystyle\int_0^x x\cdot\frac{e^{|z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3|\cdot x+x^2}}{e^{|z_1+z_2+z_3|\cdot x}}dx$

**Β)** Έστω η συνάρτηση f:R→R με $\left(f'(x)-f(x)\right)\left(x^2+1\right)=2xf(x)$, για κάθε $\chi\in$R της οποίας η γραφική παράσταση της f έχει στο σημείο Α(0,f(0)) εφαπτομένη κάθετη στην ευθεία (ε):ψ=-x+3

α) να βρεθεί ο τύπος της f

β) να αποδείξετε ότι δεν μπορεί η ευθεία (ε) να έχει με τη γραφική παράσταση της f δύο κοινά σημεία

γ) αν $g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$, $\chi\geq 0$, να βρεθεί το όριο $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{g'(x)}{e^{2x}}$

δ) να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα χ'χ και τις ευθείες χ=0 , χ=$\alpha$>0.

## ΘΕΜΑ 102

**Α)** Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχή στο $\chi_o\in R$ με $\displaystyle\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-2x+3}{x-x_o}=0$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε): ψ=2χ-3 εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο Α($\chi_o$,f($\chi_o$)).

**Β)** Έστω η συνάρτηση f: R→R παραγωγίσιμη με f'(0)=2, $f(x+\psi)=f(x)f(\psi)e^{2x\psi}$ και $f(x)\neq 0$, για κάθε $\chi,\psi\in R$. Να αποδείξετε ότι

α) f(0)=1 και $f'(x)=2(x+1)f(x)$

β) η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^{x^2+2x}}$ είναι σταθερή στο R

γ) να βρεθεί ο τύπος της f

δ) δείξτε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει ασύμπτωτες.

**ΘΕΜΑ 103**

**Α)** Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f:(0,+∞)→R. Αν $g(x)=\int_1^x \dfrac{f(\frac{x}{u})}{u}du$, χ>0 και οι μιγαδικοί z=f(β)+iβ , w=α+if(α) (α,β>0)

α) να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο (0,+∞) και να βρεθεί η g'(χ)

β) αν $\int_a^\beta g''(x)dx=0$ δείξτε ότι ο μιγαδικός zw είναι φανταστικός

γ) αν $\int_1^e f'(x)\cdot \ln x dx=\int_e^1 g'(x)dx$ και η g είναι κυρτή στο (0,+∞) δείξτε ότι

γ1) f(e)=0  γ2) $g(x)\geq g(e)$, για κάθε χ>0.

**Β)** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f:R→R και για κάθε χ∈R ισχύει $f(x^3)=3x^4+kx$, όπου $k=6\cdot\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{x+7}}{x-1}$, να βρείτε τις τιμές f'(1) και f'(27).

**ΘΕΜΑ 104**

**Α)** Έστω ότι για τη συνάρτηση f: R*→R ισχύει $|\psi f(x)-xf(\psi)|\leq (x-\psi)^2$, για κάθε χ,ψ$\in R^*$.

α) δείξτε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, χ≠0, είναι σταθερή

β) να βρεθεί ο τύπος της f.

**Β)** Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: R →R με τις ιδιότητες

- f(χ)>0, για κάθε χ∈R
- f(0)=1
- f γνησίως φθίνουσα στο R
- f[lnf(x)]$\geq e^x$ , για κάθε χ∈R.

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο A(0,f(0)).

**ΘΕΜΑ 105**

**Α)** Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$ με $(x^2+1)f''(x)+4xf'(x)+2f(x)=0$, για κάθε $\chi \in R$. Αν η ευθεία $\psi=\chi-1$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο A(0,f(0))

α) να βρεθεί ο τύπος της f

β) να βρεθεί το όριο $L=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\eta\mu^4 x+\sigma\upsilon\nu^4 x\right)\cdot f(x)\right]$

γ) να βρεθούν οι ασύμπτωτες της f

δ) δείξτε ότι η f δεν έχει σημείο καμπής στο σημείο A(0,f(0)).

**Β)** Να βρεθεί το όριο $L=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}+ax}{\left(x-1\right)^3}$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in R$.

## ΘΕΜΑ 106

**Α)** Να βρεθούν οι αριθμοί $\alpha,\beta$ για τους οποίους ισχύει $\lim_{x\to 0}\frac{a\cdot\eta\mu x+\beta|x|}{x^2+x}=2-a$.

Στη συνέχεια να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I=\int_{\beta}^{\pi a/2}\frac{\eta\mu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}dx$.

**Β)** Δίνεται συνάρτηση $f: R \to R$ με την ιδιότητα $f'(0)=1$ και $f(a+\beta)=e^a\cdot f(\beta)+e^\beta\cdot f(a)$, για κάθε $\alpha,\beta \in R$.

α) δείξτε ότι $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$

β) να δειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R, με $f'(x)=f(x)+e^x$, για κάθε $\chi \in R$.

δ) να βρεθεί ο τύπος της f.

## ΘΕΜΑ 107

**Α)** Αν f συνεχής και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$ και $f(1) = 2001$ τότε να βρείτε το όριο

$L_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(f(2001)+1\right)x^{2001}+x^4+x^3+1}{-\left(f(-1)\right)^{2004}x^2-2}$.

**Β)** Αν η f είναι συνεχής στο R με $f(2003) = -2004$ και $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in R$.

Να δείξετε ότι $L_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left[f(a)-2005\right]x^5+6x^4-3x+4}{f(a)x^3+x^2-9}=+\infty$, όπου $\alpha \in R$.

**Γ)** Αν $\alpha, \beta, \gamma$ είναι θετικοί και για κάθε $x\in R$ είναι $(\alpha\beta)^x + \beta^{-x} +(\beta\gamma)^x \geq 3\beta^x$, να αποδειχθεί ότι οι $\alpha,\beta,\gamma$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

## ΘΕΜΑ 108

**Α)** Θεωρούμε τη συνεχή f στο R με σύνολο τιμών $f(R) = \left[\frac{5}{2},+\infty\right)$.

Έστω η g ορισμένη στο R\{1} με g(x)=$\dfrac{xf^2(x)-5f(x)+6}{x-1}$. Αν το $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ είναι πραγματικός αριθμός να βρείτε το f(1).

**Β)** Αν για τις f ,g ισχύει $f^2(x) + \ln^2 x + e^{2x} = 2e^x f(x) - g^2(x) + 2g(x)\ln x$ , για κάθε x>0 να δείξετε ότι οι f, g είναι συνεχείς στο (0, +∞) και να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)}$ , $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f(x)^{g(x)}\right)$ και $\int_2^1 (fog)(2x-1)dx$.

**Γ)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{e^{yx}+e^x}{3e^{yx}+2e^x+1}, x\in R$

α) να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια

β) να υπολογίσετε το $\lim\limits_{a\to-\infty}\left(f(x)\right)^a$ όταν x < 0.

γ) είναι η f παραγωγίσιμη στο μηδέν;

## <u>ΘΕΜΑ 109</u>

**Α)** Έστω η συνεχής f: R→R η οποία είναι και γνησίως αύξουσα. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in R$ ώστε $f(x_0)=\dfrac{f(1)+2f(2)+...+\nu f(\nu)}{1+2+...+\nu}$, $\nu\geq 2$ γνωστός ακέραιος.

**Β)** α) Να αποδειχθεί ότι $\ln\theta < \theta + 4$ για κάθε $\theta > 0$.

β) Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + (\ln\theta - 2x)\ln\theta + 4y + \ln\theta - \theta = 0$ , θ>0.Να αποδειχθεί ότι για κάθε θ > 0 η εξίσωση παριστάνει κύκλο του οποίου να βρεθεί η ακτίνα και το κέντρο.

γ) να βρεθεί η τιμή του θ για την οποία η ακτίνα γίνεται ελάχιστη.

## <u>ΘΕΜΑ 110</u>

**Α)** α) Να αποδειχθεί ότι $e^x \geq x+1$, για κάθε $x\in R$

β) να δείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση f: R→R με την ιδιότητα $e^{f(x)} = f(x)$

γ) να βρείτε τη συνάρτηση g για την οποία ισχύει $e^{g(x)} = e\cdot g(x)$, για κάθε $x\in R$.

**Β)** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 -1$ και $g(x) = 1 - x^2$

α) Αποδείξτε ότι το σημείο Μ(ημθ,συν²θ) , $\theta\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ ανήκει στη $C_g$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_g$ στο Μ .

β) Αν η εφαπτομένη τέμνει τη $C_f$ στα σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ να υπολογίσετε τα $x_1\cdot x_2$ , $x_1 + x_2$ , $y_1 + y_2$

γ) Να μελετήσετε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης

$\phi(\theta) = x_1 + x_2 + 4\, x_1 \cdot x_2 + y_1 + y_2$ , $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

## ΘΕΜΑ 111

**Α)** Η f είναι παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση. Αν η εξίσωση $e^x f(x) = 1$ έχει δύο ρίζες, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x f'(x) = -1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο R.

**Β)** Η f είναι παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση με f(χ)>0, για κάθε $x \in R$. Αν f(0)=1 και η f' είναι συνεχής στο $\chi_0$=0, να βρεθεί το όριο L= $\lim\limits_{x \to 0^+} \left[ f(x) \right]^{\frac{1}{e^x - 1}}$.

**Γ)** α) Δείξτε ότι για κάθε $x \in R$ ισχύει $e^x \geq x$

β) να βρείτε το σημείο του διαγράμματος της $f(x) = e^x$ το οποίο απέχει την ελάχιστη δυνατή απόσταση από την ευθεία ψ=χ. Ποια είναι η απόσταση αυτή;

## ΘΕΜΑ 112

**Α)** Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_{\pi}^{\rho} \frac{\sqrt{e^x + x^4 + 1}}{e^{\eta\mu x}} dx$ αν είναι γνωστό ότι $0 < \rho \leq \pi$ και $\lim\limits_{\omega \to +\infty} \left( \sqrt{\omega^2 + 1} - \omega - \eta\mu\rho \right) = 0$.

**Β)** Αν $\alpha, \beta, \gamma \in R$ και ισχύει $\eta\mu(\alpha x) \leq \eta\mu(\beta x) + \eta\mu(\gamma x)$, για κάθε $x \in R$ να αποδειχθεί ότι $\alpha = \beta + \gamma$.

**Γ)** Δίνεται συνάρτηση $f:[0,\pi] \to R$ με την ιδιότητα $1 + 2\sqrt{\eta\mu x} \leq f(x) \leq 2 + \eta\mu x$, για κάθε $x \in [0,\pi]$.

α) να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\pi/2$

β) να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{f(x) - 3}$

γ) να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{|3 - f(x)| - x f(x) - 3}{f(x) - 3}$.

## ΘΕΜΑ 113

**Α)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + x e^{-x}$, $x \in R$.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την ευθεία ψ=χ, τον άξονα ψ'ψ και την ευθεία χ=λ (λ>0)

β) να βρεθεί το $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} E(\lambda)$

γ) να βρεθεί η τιμή του λ αν ισχύει $E(\lambda) = 1 - \frac{7}{e^6}$

**Β)** α) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu x \geq x - \frac{x^3}{6}$ , για κάθε $\chi \geq 0$

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(\chi)=\eta\mu\chi$ , $g(\chi)= x - \frac{x^3}{6}$ και τις ευθείες $\chi=0$ και $\chi=\pi/2$ .

## ΘΕΜΑ 114

**Α)** Δίνεται η συνάρτηση $F(\chi)=\int_x^{2x} \frac{dt}{t^2+8}$ , $x\in R$.

α) να μελετήσετε την F ως προς τη μονοτονία

β) να δείξετε ότι η F είναι περιττή

γ) να δείξετε ότι $\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot F(x)\right] = 1/2$ .

**Β)** Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f:[0,\frac{\pi}{4}]\to R$ με $f(\chi)=\int_1^2 \frac{\eta\mu(xt)}{t}dt$ είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

## ΘΕΜΑ 115

**Α)** Έστω η συνεχής συνάρτηση f: $R\to(0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{\int_0^x t\cdot f(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$ , $\chi>0$. α) είναι γνησίως αύξουσα β) δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

**Β)** Δίνεται η συνάρτηση f: $R^*\to R$ με $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$ , $x\in R^*$.

α) να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία , τα ακρότατα και τα σημεία καμπής

β) να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f

γ) αν E(t) είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την ευθεία $\psi=0$ και τις ευθείες $\chi=2$, $\chi=t$ $(t>0)$, να βρεθούν τα όρια $\lim_{t\to+\infty} E(t)$, $\lim_{t\to 0^+} E(t)$, $\lim_{t\to 1^+} E(t)$.

## ΘΕΜΑ 116

**Α)** Αν z,w μιγαδικοί με $|w|=1$ και $|z|^2 - 2\begin{vmatrix}\mathrm{Re}(z) & -\mathrm{Im}(w) \\ \mathrm{Im}(z) & \mathrm{Re}(w)\end{vmatrix} = 0$, τότε να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z.

**Β)** Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με f(1)=f(3) και $f(x^3) \geq f(3x)$, για κάθε $\chi \in$R. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f''(\chi)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,3).

**Γ)**α)Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x(x-1)...(x-2002)$ και $g(x) = -x(x-1)...(x-2002)(x-2003)$. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f,g δέχονται κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο Α(2002,0).

β) Αν $h(x) = f(x) + g(x)$, να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (2001,2004)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της h στο M(ξ,h(ξ)) να είναι παράλληλη στον άξονα χ'χ.

γ) Να λυθεί (ως προς χ) η εξίσωση $x^{2\nu} - 2\nu x + 2\nu - 1 = \int_1^{2004} x^{\nu} \cdot h'(t)dt$ (ν=1,2,…).

## ΘΕΜΑ 117

**Α)** Αν το $f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha \neq 0$, έχει δύο άνισες ρίζες $\rho_1,\rho_2$, να αποδείξετε ότι:

i) $f'(\rho_1)+ f'(\rho_2) = 0$ ii) $f'(\rho_1).f'(\rho_2) \neq 0$ iii ) $\rho_1/f'(\rho_1)+ \rho_2/f'(\rho_2) = 1/\alpha$.

**Β)** Για τη συνάρτηση f που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R ισχύουν:

- $f'(-1) = 2$ και η f είναι περιττή,
- $g(x) = f(x)\sigma\upsilon\nu x - f(\sigma\upsilon\nu x)$, $x \in$R.

Να υπολογίσετε τον αριθμό $g''(0)$ και το ολοκλήρωμα $I = \int_{g''(0)-2}^{g(0)+f(1)} \frac{t+e^{-t}}{t+e^{t}}dt$

**Γ)** Με τη βοήθεια το Θ.Μ.Τ. να αποδείξετε ότι: $\left|\ln\left(\frac{a^2+1}{\beta^2+1}\right)\right| \leq |a-\beta|$, για κάθε α,β∈R.

## ΘΕΜΑ 118

**Α)** Αν f(x) πολυώνυμο βαθμού $\nu \geq 2$, να αποδειχθεί ότι:

α) $f(x) = (x-\rho)^2\pi(x) \Leftrightarrow f(\rho) = f'(\rho) = 0$.

(δηλαδή το $(x-\rho)^2$ είναι παράγοντας του f(x) $\Leftrightarrow$ $f(\rho) = f'(\rho) = 0$)

β) Να αποδείξετε ότι το $(\chi-1)^2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου

$f(x) = \nu\chi^{\nu+1}-\chi^{\nu-1}-(\nu^2+1)\chi+\nu^2-\nu+2$ με $\nu \geq 2$.

γ) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta \in \Re$ για τις οποίες το πολυώνυμο $(x-1)^2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $f(x) = \alpha x^8+ \beta x^3+4$.

**Β)** Από όλα τα ορθογώνια τρίγωνα με σταθερό εμβαδόν $9m^2$ να βρεθεί αυτό που έχει την ελάχιστη υποτείνουσα και στη συνέχεια να υπολογισθούν και οι άλλες πλευρές του.

**Γ)** Έστω f μία συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β) για την οποία ισχύει: $[f(x)]^2 = 2x(x-2)$, για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$. Να δείξετε ότι η f δεν έχει σημείο καμπής.

## ΘΕΜΑ 119

**Α)** Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$ τέτοια ώστε $f(1)=1$. Αν για κάθε $x \in R$, ισχύει: $g(x) = \int_1^{x^3} |z| f(t)dt - 3\left|z + \frac{1}{z}\right|(x-1) \geq 0$ όπου $z=\alpha+\beta i \in C$, με $\alpha,\beta \in R^*$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g$ είναι παραγωγίσιμη στο $R$ και να βρείτε τη $g'$.

β) Να αποδείξετε ότι $|z| = \left|z + \frac{1}{z}\right|$

γ) Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος β) να αποδείξετε ότι $\mathrm{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}$

δ) Αν επιπλέον $f(2)=\alpha>0$, $f(3)=\beta$ και $\alpha>\beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

**Β)** α) Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f$ η οποία είναι κυρτή στο διάστημα $\Delta$. Αν $\alpha,\beta,\gamma \in \Delta$ και $\alpha \prec \beta \prec \gamma$ να δείξετε ότι: $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \prec \frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x\ln x$ είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της

γ)Αν $0 \prec \alpha \prec \beta \prec \gamma$ και $\alpha,\beta,\gamma$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να δείξετε ότι: $\beta^\beta \prec \sqrt{\alpha^\alpha \gamma^\gamma}$.

## <u>**ΘΕΜΑ 120**</u>

**Α)** Έστω $f:R \to R$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f^3(x)+4f(x)=4x$, για κάθε $x \in R$

α) δείξτε ότι $f(0)=0$ , $f(-4)=-2$ και $f'(0)=1$

β) Να μελετήσετε την $f$ ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το πρόσημό της.

γ)Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η $f$ είναι κυρτή ή κοίλη και τα σημεία καμπής

δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $f$ στο σημείο $(0,0)$ και να αποδείξτε ότι $f(\chi)<\chi \Leftrightarrow \chi>0$. Στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση $f(x^2-x-2)+x \prec x^2-2$

**Β)** Αν η $f:[-1,1] \to \Re$ είναι συνεχής με $f(-1) = -2$, $f(1) = 2$ και $|f'(x)| \leq 2$ για κάθε $x \in (-1,1)$, να υπολογίσετε τον $f(0)$. Στη συνέχεια να βρείτε τον αριθμό $\mathrm{Re}\left(\frac{\int_{|f(0)+i|}^{-1} \eta\mu(\eta\mu\chi))dx}{1+i}\right)$.

**Γ)** Σε ένα σφαιρικό μπαλόνι διοχετεύεται αέριο με ρυθμό εισροής $20cm^3/min$. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της ακτίνας του, τη χρονική στιγμή $t_0$ που η ακτίνα είναι ίση με $3cm$; Ποιος είναι ο ρυθμός αύξησης της επιφάνειας του την ίδια χρονική στιγμή $t_0$;

## ΘΕΜΑ 121

**Α)** Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(\chi)=\int_{x}^{2x}\frac{1+\sigma\upsilon\nu t}{\sqrt{t^4-t^2+4}}dt$ είναι περιττή, παραγωγίσιμη στο R και ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\chi_o \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\chi_o)=0$.

**Β)** Έστω η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ και η $g(x) = xf(e^{-x})$. Αν η ευθεία $\psi = 2x+1$ εφάπτεται της $C_f$ στο $x_0 = 0$, να βρείτε την ασύμπτωτη της $C_g$ στο $+\infty$.

**Γ)** Το εμβαδόν της περιοχής ανάμεσα σε δύο ομόκεντρους κύκλους είναι πάντα $9\pi$ $cm^2$. Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του μεγαλύτερου κύκλου είναι $10\pi$ $cm^2/sec$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του μήκους του μικρού κύκλου , όταν αυτός έχει εμβαδόν $16\pi$ $cm^2$.

## ΘΕΜΑ 122

**Α)** Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f, με $f''(x)<0$, για κάθε $x\in R$.

α) Να αποδείξετε ότι αν $\alpha\in R$, τότε ισχύει $f(x) \le f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha)$, για κάθε $x\in R$.

< δηλ. η $C_f$ βρίσκεται ''κάτω'' από την εφαπτομένη της στο (α,f(α)) >

β)Αν $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ είναι διαδοχικοί όροι μιας γνησίως αύξουσας αριθμητικής προόδου, να δειχθεί ότι: $f(a_1)+f(a_4)<f(a_2)+f(a_3)$

**Β)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^{2\nu}-2x^{\nu}$, ν=1,2,….

Εξετάστε αν υπάρχει πραγματικός αριθμός λ, ώστε το $L=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-\lambda}{(x-1)^6}$ να υπάρχει στο $\Re$.

**Γ)** Σε μια δεξαμενή που έχει σχήμα κώνου χύνεται νερό με ρυθμό $2m^3/min$. Το ύψος του κώνου είναι 4m και η ακτίνα της βάσης του είναι 2m. Να βρείτε πόσο γρήγορα ανέρχεται το επίπεδο του νερού στη δεξαμενή κατά τη χρονική στιγμή $t_0$ που το νερό έχει βάθος 2m;

## ΘΕΜΑ 123

**Α)** Αν $\nu\in N^*$ και $|\alpha_1\eta\mu x + \alpha_2\eta\mu(2x) + \alpha_3\eta\mu(3x) +\ldots+\alpha_\nu\eta\mu(\nu x)| \le |\eta\mu x|$ , για κάθε $x\in\Re$ (όπου $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots\alpha_\nu$ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί), να αποδείξετε ότι: $|\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3+\ldots+\nu\alpha_\nu| \le 1$.

**Β)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) =\ln x$, $x\succ 0$ και το σημείο της $M(\alpha,\ln\alpha)$, $\alpha\succ 0$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_f$ στο σημείο M.

β) Για ποια τιμή του α η εφαπτόμενη διέρχεται από την αρχή των αξόνων;

γ) Αν το σημείο M απομακρύνεται από τον άξονα $\chi'\chi$ με σταθερή ταχύτητα 2m/sec, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου M ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή $t_0$ κατά την οποία η εφαπτομένη στο M διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

**Γ)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\varepsilon\varphi 1)^x + (\varepsilon\varphi 2)^x +\ldots+(\varepsilon\varphi 89)^x + 1908$ , $x\in\Re$.

α) να εξετάσετε την f αν είναι κυρτή ή κοίλη

β) δείξτε ότι $f'(0) =0$

γ) να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο $(0,f(0))$

δ) Να δείξετε ότι $f(x) \geq 1997$ , για κάθε $x \in R$.

**ΘΕΜΑ 124**

**Α)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}$ , $x \in IR$

α) Να βρείτε το πρόσημο της $f''$

β) Να βρείτε το πρόσημο της $f'$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $e^x-1=x\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}\right)$

δ)Να αποδείξετε ότι: $e^x \geq 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ , για κάθε $x \in IR$

ε) Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f$ και τα ολικά ακρότατα.

**Β)** Έστω $x \succ 0$ και Ε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ, το οποίο έχει κορυφές τα σημεία $O(0,0)$, $A(4x,0)$ και $B(0,\sqrt{x}-2)$. Αν το x μεταβάλλεται με ρυθμό 2 cm/sec, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του Ε τη χρονική στιγμή $t_o$ όπου $x(t_o) = 9$ cm.

**ΘΕΜΑ 125**

**Α)** Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(\chi)=e^{\lambda\chi}$ , $\lambda>0$

α) να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R

β) δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η $\psi=\lambda e\chi$. Στη συνέχεια να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής Μ.

γ) δείξτε ότι το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, της εφαπτομένης της στο σημείο Μ και του άξονα $\psi'\psi$, είναι $E(\lambda)=\frac{e-2}{2\lambda}$

δ) υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda^2\cdot E(\lambda)}{2+\eta\mu\lambda}$

**Β)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3$ και το σημείο της $M(\alpha,\alpha^3)$, $\alpha \succ 0$, που απομακρύνεται από τον άξονα $\psi'\psi$ με σταθερή ταχύτητα 3 m/sec.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_f$ στο σημείο Μ.

β) Να αποδειχθεί ότι η παραπάνω εφαπτόμενη τέμνει τη $C_f$ και σε δεύτερο σημείο Ν.

γ) Να εκφραστεί το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΜΒΝ (με διαγώνιο ΜΝ και πλευρές παράλληλες προς τους άξονες) ως συνάρτηση του $\alpha$.

δ) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή $t_0$ κατά την οποία το Μ απέχει από τον άξονα ψ'ψ απόσταση 2m.

## **ΘΕΜΑ 126**

**Α)** Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο [0,1] με f' συνεχής στο [0,1] και με την ιδιότητα $\int_0^1 f^2(x)dx + 6\int_0^1 x^2 f'(x)dx = 24$. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του f(1). Στη συνέχεια για αυτή την τιμή του f(1) να βρεθεί ο τύπος της f.

**Β)** Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει $2f'(\chi)=e^{\chi-f(\chi)}$, για κάθε $x \in IR$ και f(0)=0.

α) να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$

β) υπολογίστε το όριο $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\int_0^{\chi} f(\chi-t)dt}{\eta\mu\chi}\right)$

γ) δίνονται οι συναρτήσεις $h(\chi)=\int_{-x}^{x} t^{2005}\cdot f(t)dt$ και $g(\chi)=\frac{x^{2007}}{2007}$. Δείξτε ότι $h(\chi)= g(\chi)$, για κάθε $x\in R$.

δ) δείξτε ότι η εξίσωση $\int_{-x}^{x} t^{2005}\cdot f(t)dt = \frac{1}{2008}$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα (0,1).

## **ΘΕΜΑ 127**

**Α)** Να βρεθούν οι τιμές των πραγματικών αριθμών α,β ώστε να ισχύει $\lim_{x\to 0}\frac{(\sigma\upsilon\nu\chi)^{2004} - \alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\chi + \beta - 1}{\sigma\upsilon\nu\chi - 1} = 0$. Για τις τιμές αυτές των α,β να δείξετε ότι η εξίσωση $(\alpha-\chi)(\chi-\beta)+\ln(\chi+1)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,2004).

**Β)** α) Υπολογίστε τον αριθμό $k=\lim_{\chi\to 1}\frac{|\chi^3-\chi+2|-2}{\chi-1}$.

β) Ευθεία (ε) με συντελεστή διεύθυνσης λ>0 στρέφεται γύρω από το σημείο Μ(6,k) με ρυθμό $\frac{d\lambda}{dt}=10^{-3}$ rad/sec. Αν η (ε) τέμνει τους άξονες χ'χ ,ψ'ψ στα σημεία Α,Β αντίστοιχα, να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΒ ως προς το χρόνο t, τη χρονική στιγμή $t_0$ που η (ε) περνά από το σημείο Σ(k,-k). (όπου k ο αριθμός του α) ερωτήματος).

## ΘΕΜΑ 128

**Α)** Δίνεται η συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(\chi)\neq 0$, για κάθε $x\in R$

α) να δείξετε ότι η f είναι 1-1 συνάρτηση

β) αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία Α(1,2005) και Β(-2,1) να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(-2004+f(\chi^2-8))=-2$

γ) να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο Μ της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι κάθετη στην ευθεία $\psi=-\dfrac{1}{668}\chi+2005$

**Β)** Δίνεται η συνεχής στο R συνάρτηση f για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=2005$

α) να δείξετε ότι f(0)=0 και f'(0)=1

β) να βρείτε τον αριθμό λ ώστε να ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\lambda\cdot(f(x))^2}{2x^2+(f(x))^2}=3$

γ) αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο R και ισχύει $f'(x)>f(x)$, για κάθε $x\in R$, να δείξετε ότι

γ1) η συνάρτηση $m(x)=e^{-x}\cdot f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο R

γ2) $xf(x)>0$, για κάθε $\chi\neq 0$ γ3) $\int_0^1 f(x)dx<f(1)$

## ΘΕΜΑ 129

**Α)** Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\Re$ ώστε $f(\sqrt{x})=\sqrt{x}\eta\mu\sqrt{x}+e^x\quad\forall\, x\geq 0$

α) Δείξτε ότι: $f'(x)=\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x+2xe^{x^2}$

β) Υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-1}{x^{\mu}}$, όπου $\mu=\lim\limits_{\chi\to 1}\dfrac{\eta\mu(\pi\chi)}{\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi\chi}{2})}$

**Β)** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: $(0,+\infty)\to R$ τέτοια ώστε $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{e}$ και ο μιγαδικός αριθμός z η εικόνα του οποίου κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της f .

Το μέτρο του z γίνεται ελάχιστο όταν η εικόνα του βρίσκεται στο σημείο $A\left(\dfrac{1}{e},-\dfrac{1}{e}\right)$. Θέτουμε $|z|=g(x)$. Να δείξετε ότι:

α) $g'(x)g(x)-f'(x)f(x)=x$ , για κάθε x>0.

β) Η εφαπτομένη ευθεία (ε) της γραφικής παράστασης της f στο A είναι κάθετη στην ευθεία ΟΑ, όπου Ο η αρχή των αξόνων.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) του β ερωτήματος.

δ) Αν επιπλέον ισχύει $f'(x)\cdot e^{e\cdot f(x)+1}=1$, για κάθε χ>0 τότε:

δ1)Να δείξετε ότι $f(x)=\dfrac{\ln x}{e}$.

δ2)Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f την ευθεία (ε) και τον χ'χ.

**<u>ΘΕΜΑ 130</u>**

**Α)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-e-x(\ln x-1)$ , x>0.

α) Να μελετήσετε την $f$ ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της

β) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0\ ,\ 1)$ ώστε $f(x_o)=0$.

γ)Να δείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)=e^x$, $h(x)=\ln x$ και τις ευθείες $x = x_0$ και $x = 1$, όπου $x_0$ ο αριθμός του β ερωτήματος, είναι ίσο με 1 τ.μ.

**Β)** Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,1]\to\Re$ τέτοια ώστε για κάθε $\chi\in[0,1]$ να ισχύει: $f^{2003}(\chi)+2002f(\chi)=2003\chi$.

α) Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη της f και να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f^{-1}$

β)Να δείξετε ότι: $f^{-1}(\chi)=\dfrac{\chi^{2003}+2002\chi}{2003}$, για κάθε $\chi\in D_{f^{-1}}$

γ) Με τη βοήθεια της αντικατάστασης $f^{-1}(\chi)=u$ να δείξετε ότι:

$\int_0^1 f^{-1}(\chi)d\chi=1-\int_0^1 f(\chi)d\chi$

δ) Να δείξετε ότι $f(\chi)>\chi$ , για κάθε $\chi\in(0,1)$

ε) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f$ και $f^{-1}$ να δείξετε ότι Ε = $\dfrac{1001}{1002\cdot 2003}$ τετραγωνικές μονάδες.

## ΘΕΜΑ 131

**Α)** Δίνονται οι συναρτήσεις f , g παραγωγίσιμες στο $(0\ ,+\infty)$ για τις οποίες ισχύει: $f(\chi)=g(\chi)+\alpha\chi e^{\frac{1}{\chi}}$, για κάθε χ>0. Αν α<0<β και $\lim\limits_{\chi\to+\infty} g(\chi)=\beta$ τότε:

α)Να δείξετε ότι η ευθεία ψ = αχ + α + β είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f όταν $\chi\to+\infty$.

β) Αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z = α + βi βρίσκεται στην ασύμπτωτη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f όταν $\chi\to+\infty$ να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{|x+2|+|x-1|-x^2+2x}{x^2+4x+3}$

γ) Να δείξετε ότι: $f(\chi)\le g(\chi)+\alpha e$, για κάθε για κάθε χ>0.

**Β)** Αντλούμε νερό από μια δεξαμενή σχήματος ανάποδου κώνου με ακτίνα βάσης 5m και βάθους 12m με σταθερό ρυθμό 5 $m^3$/h. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του βάθους του νερού, όταν η γενέτειρα του κώνου που σχηματίζει το νερό της δεξαμενής είναι 6m.

## ΘΕΜΑ 132

**Α)** Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f και μια ευθεία (ε) με συντελεστή διεύθυνσης λ. Αν η (ε) τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε τρία διαφορετικά σημεία, δείξτε ότι υπάρχει $\chi_0\in R$ τέτοιο ώστε $f''(\chi_0)=0$.

**Β)** Ένα σημείο Α κινείται στον ημιάξονα Οχ με ταχύτητα 2m/sec . Αν σημείο Β(0,10) , να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας $O\hat{B}A$, ως προς το χρόνο t, κατά την χρονική στιγμή $t_0$ που το Α βρίσκεται στο σημείο (20,0) .

**Γ)** Ένας ποντικός βρίσκεται στην κορυφή μιας σκάλας ύψους 13m η οποία είναι στερεωμένη πλάγια σε ένα τοίχο. Αν η βάση της σκάλας γλιστράει με ταχύτητα 3m/sec τη στιγμή που βρίσκεται σε απόσταση 5m από τον τοίχο, να βρεθεί ο ρυθμός πτώσης του ποντικού.

## ΘΕΜΑ 133

**Α)** Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(\chi)=\sqrt{\chi^2+\kappa+e^{\frac{1}{\chi}}}-2\chi\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\beta$ , όπου $\alpha,\beta\in(0,\pi)$ και κ= $\lim\limits_{x\to\frac{\pi^+}{2}}(\eta\mu\chi)^{\varepsilon\varphi\chi}$

α) να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β) να υπολογίσετε τους α,β ώστε να ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(\chi)=-1$

**Β)** Θεωρούμε τη συνεχή και γνησίως μονότονη συνάρτηση f στο [0,1] με $f^2(0)+f^2(1)+13=6f(0)+4f(1)$. Δείξτε ότι

α) η f είναι γν.φθίνουσα,

β) υπάρχει μοναδικό $\chi_o \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\frac{f(\chi_o)}{\chi_o} = 3$.

## ΘΕΜΑ 134

**Α)** Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με f(0)=1 και $f'(\chi) = \frac{1}{3f^2(\chi)+1}$, για κάθε $\chi \in R$

α) να αποδείξετε ότι

α1) για κάθε $\chi \in R$ ισχύει $f^3(\chi)+f(\chi)=\chi+2$

α2) η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η $f^{-1}$

α3) f(-2)=0

β) να βρείτε τα σημεία καμπής της f

γ) να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τους άξονες $\chi'\chi$, $\psi'\psi$ και τη γραμμή $\chi=-2$.

**Β)** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[\alpha,\beta]$, ώστε $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$. Δίνονται επιπλέον οι μιγαδικοί $z_x = x + i\sqrt{f(x)}$, $x \in [\alpha,\beta]$. Εαν $|z_\alpha| = \sqrt{3}|\alpha|$, $|z_\beta| = \sqrt{3}|\beta|$, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\theta \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\theta) = 2\theta + \alpha + \beta$.

## ΘΕΜΑ 135

**Α)** Βρείτε τη μέγιστη δυνατή τιμή της παράστασης $A=2\chi+\psi$, αν τα $\chi$ και $\psi$ είναι τα μήκη των κάθετων πλευρών ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα $\sqrt{5}$.

**Β)** Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi)=\chi^2$ και το σημείο Μ(3,0). Να βρείτε το σημείο Ρ της γραφικής παράστασης της f του οποίου η απόσταση από το Μ να είναι η ελάχιστη δυνατή. Στη συνέχεια να δείξετε ότι η ευθεία ΜΡ είναι κάθετη στην εφαπτόμενη στης γραφικής παράστασης της f στο Ρ.

**Γ)** Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα [0,4], παραγωγίσιμη στο (0,4) και f(1)=f(2)=0. Αν η f στρέφει τα κοίλα άνω στο [0,4] να αποδείξετε ότι

α) $f(0) \cdot f(4) > 0$ β) η f παρουσιάζει ελάχιστο στο (0,4).

## ΘΕΜΑ 136

**Α)** Δίνεται η παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(\chi^2) \geq f^2(\chi) + \frac{1}{4}$, για κάθε $\chi \in R$. Να δείξετε ότι

α) η f δεν αντιστρέφεται

β) υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$

γ) αποδείξτε ότι $f'(0)=0$ και $\lim_{\chi \to 0} \frac{2f(\chi)-1}{2\chi} = 0$.

**B)** Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση του σημείου A(0,4) από την παραβολή $\psi^2 = \frac{2\chi}{\sqrt{6}}$.

## ΘΕΜΑ 137

**A)** α) Να βρείτε το όριο $\kappa = \lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu 2\chi - \varepsilon\phi 2\chi}{\chi^2 \eta\mu\chi}$

β) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης $f(\chi) = \chi \cdot \ln\frac{1}{\chi}$ και να δείξετε ότι για κάθε χ>0 ισχύει $-\frac{\kappa}{4\chi} \le e^{\frac{1}{e\chi}}$, όπου κ ο αριθμός του α) ερωτήματος.

**B)** Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο ξ και ισχύει $\lim_{h\to 0} \frac{f(\xi - h)}{h} = 2$, αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ με f'(ξ)=-2.

## ΘΕΜΑ 138

**A)** Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \alpha \ln x + \frac{\beta}{\ln \chi}$ (β>0)

α) αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(\frac{1}{e}, 0)$ να δείξετε ότι το σημείο αυτό είναι σημείο καμπής της f

β) αν επιπλέον $f(e^2)=3/2$ να βρείτε το α και το σύνολο τιμών της f

γ) να δείξετε ότι οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία που έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης f(χ)=0 τέμνονται στον άξονα ψ'ψ.

**B)** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(\chi) = \chi^{\chi}$ και $g(\chi) = \beta + \alpha \ln \chi$, με χ>0.

α) να βρεθούν τα α,β έτσι ώστε οι γραφικές παραστάσεις των f,g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο $\chi_o=1$. Ποια η εξίσωση της εφαπτομένης αυτής;

β) για α=β=1:

β1) να μελετήσετε τις f,g ως προς την κυρτότητα

β2) να δείξετε ότι $f(\chi) \ge g(\chi)$, για κάθε χ>0.

## ΘΕΜΑ 139

**A)** α) Αν $f, g : \Re \to \Re$ συναρτήσεις με fog ''1-1'' συνάρτηση, να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση g είναι ''1-1''

β) αν α,β,γ∈R και για τη συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ ισχύει $f(ax^2 + \beta x + \gamma) = x$, για κάθε χ∈R, να αποδείξετε ότι f(0)= -γ/β

**B)** α) Να βρείτε τους αριθμούς α,β∈R για τους οποίους ισχύει $\lim_{\chi\to 0} \frac{\alpha\chi + \eta\mu 5\chi}{\sqrt{\chi^4 + \chi^2}} = \beta$

β) Αν $\kappa,\lambda \in R$ με $\kappa \cdot \lambda < \beta$ , να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f , όπου $f(x) = \kappa x^2 + \lambda \ln x + a$ δεν έχει τρία σημεία συνευθειακά (όπου $\alpha,\beta$ οι αριθμοί του α) ερωτήματος)

## <u>ΘΕΜΑ 140</u>

**Α)** Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,1] \to \Re$ για την οποία ισχύει $f'(x) \geq \dfrac{f^2(1) + f^2(0) + 2f(0) + 5}{2}$ , για κάθε $\chi \in [0,1]$. Να βρείτε

α) τους αριθμούς f(0) , f(1)

β) τον τύπο της f

**Β)** Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty) \to \Re$ με $f'(0)=f(0)=0$ και για την οποία ισχύει $f''(x) \succ f'(x)$ , για κάθε $\chi \geq 0$. Να αποδείξετε ότι

α) η συνάρτηση h: $[0,+\infty) \to \Re$ με τύπο $h(x) = f(x) \cdot e^{-x}$ είναι γνησίως αύξουσα

β) η συνάρτηση $f^2$ είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$

γ) $\lim\limits_{\chi \to +\infty} f(x) = +\infty$

## <u>ΘΕΜΑ 141</u>

**Α)** Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: $[\alpha,\beta] \to \Re$ με $f(\alpha)=2\alpha$ και $f(\beta)=2\beta$. Να αποδείξετε ότι

α) υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f παράλληλη στην ευθεία $\psi=2\chi+3000$

β) αν $\alpha>0$, τότε υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

γ) η εξίσωση $f(\chi)=\alpha+\beta$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $(\alpha,\beta)$

δ) υπάρχουν $\xi_1,\xi_2$ στο $(\alpha,\beta)$ τέτοια, ώστε $\dfrac{1}{f'(\xi_1)} + \dfrac{1}{f'(\xi_2)} = 1$

**Β)** Αν ισχύει $f'(x) > x^2$, για κάθε $\chi \leq 0$, να βρείτε το $\lim\limits_{\chi \to -\infty} f(x)$

**Γ)** Αν ισχύει $f'(x) > 1$, για κάθε $\chi \in R$, να βρείτε το $\lim\limits_{\chi \to +\infty} f(x)$.

## <u>ΘΕΜΑ 142</u>

**Α)** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re \to \Re$ για την οποία ισχύουν $f(0)=1/2$ και $e^x\left[f(x) + f'(x)\right] + \eta\mu x = -f'(x)$, για κάθε $\chi \in R$

α) δείξτε ότι $f(x) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1+e^x}$ και ότι ισχύει $f(x) + f(-x) = \sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $\chi \in R$

β) να βρείτε το $\lim\limits_{\chi \to +\infty} f(x)$

γ) να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathrm{I} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)dx$

δ) να δείξετε ότι $0 \le \int_0^{\pi/2} f(x)dx \le \frac{\pi}{4}$

**Β)** Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f: $[0,4] \to \Re$ με f(2)<0 και ο μιγαδικός αριθμός $z = f(2) + \frac{f(0)+f(4)}{2}i$ για τον οποίο ισχύει $(z-1)^{2004} = (z-i)^{2004}$

α) δείξτε ότι $f(2) = \frac{f(0)+f(4)}{2}$

β) δείξτε ότι υπάρχει $\chi_o \in (0,4)$ με $f''(\chi_o)=0$

## ΘΕΜΑ 143

**Α)** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = e^x + (x-1)i$, $\chi \in$ R.

α) να αποδείξετε ότι $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Im}(z)$ , για κάθε $\chi \in$ R

β) να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_o$ στο $(0,1)$ τέτοιο ώστε ο αριθμός $w = z^2 + z + 2i$ να είναι πραγματικός

γ) να βρείτε το μιγαδικό z του οποίου το μέτρο να γίνεται ελάχιστο.

**Β)** Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο R με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύει $f'(x) \ge \frac{e^x}{e^x+1} + 2$, για κάθε $\chi \in$ R και f(0)=ln2. Να αποδείξετε ότι

α) $\lim\limits_{\chi \to +\infty} f(x) = +\infty$ , $\lim\limits_{\chi \to -\infty} f(x) = -\infty$

β) η f δεν παρουσιάζει ακρότατα

γ) η γραφική παράσταση της f έχει με τον άξονα $\chi'\chi$ ένα μόνο κοινό σημείο

δ) $f(1) \ge \ln(1+e) + 2$

## ΘΕΜΑ 144

**Α)** Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση : $\int_0^1 e^{1-x} f(x)dx = f(x) + e^x$, για κάθε $x \in \Re$ .

**Β)** Έστω η συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ για την οποία ισχύει $f^2(x) - 2f(x) + \sigma\upsilon\nu^2 x = 0$, για κάθε $x \in \Re$ .

α) να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\chi_o$=0

β) να βρείτε το $\lim\limits_{\chi \to 0}\left[ x^2 \cdot f(\frac{1}{x}) \right]$

**Γ)** Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης $f(x)=(x^2-2x+3)^{\frac{1}{x}}$ στο $+\infty$.

**ΘΕΜΑ 145**

**Α)** Δίνεται η συνάρτηση $F(\chi)=\int_0^{\chi}(t^4-2t^3+t^2)dt$

α) να εξετάσετε αν ισχύουν τα θεωρήματα Bolzano,Rolle και μέσης τιμής για τη συνάρτηση $F'$ στο διάστημα $[-1,2]$

β) να αποδείξετε ότι η απόσταση των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της $F'$ στα σημεία που έχουν τετμημένες τα σημεία στα οποία ισχύει το θεώρημα του Rolle για την $F'$ στο $[-1,2]$ και τα οποία είναι διαφορετικά από το $0$, είναι $1/16$

γ) να δείξετε ότι το μέγιστο της $F'$, το σημείο καμπής της $F''$ και το ελάχιστο της $F'''$ είναι συνευθειακά σημεία

δ) να δείξετε ότι η ευθεία του ερωτήματος γ) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{2h(x)}{2x-1}$, όταν η συνάρτηση $h$ είναι παραγωγίσιμη στο $\Re-\{1/2\}$ και $\lim_{\chi\to 1/2}h(x)=5$

**Β)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln(ax)}{\sqrt{x}}$ $(\alpha>0)$

α) αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f$ στο σημείο $M(1,f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\chi-\psi=0$, να βρείτε την τιμή του $\alpha$

β) για $\alpha=1$ να μελετήσετε την $f$ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και το σύνολο τιμών της

γ) για $\kappa\in N$ με $\kappa>7$ να αποδείξετε ότι $\left(\sqrt{\kappa}\right)^{\sqrt{\kappa+1}}>\left(\sqrt{k+1}\right)^{\sqrt{k}}$.

**ΘΕΜΑ 146**

**Α)** Να βρεθεί κάθε συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με $f(1)>1$ και $f^2(x)-2xf(x)=1$, για κάθε $x\in\Re$. Στη συνέχεια να βρείτε τα όρια $\lim_{\chi\to+\infty}\dfrac{f(x)-x}{x}$ και $\lim_{\chi\to-\infty}\dfrac{f(x)-x}{|x|}$

**Β)** Δίνεται η συνάρτηση $f$ με $f''$ συνεχή στο $R$, τέτοια ώστε να ισχύει

$\int_0^{\chi}\left(t^2+1\right)\cdot f''(t)dt=2\int_{\chi}^{0}t\cdot f'(t)dt-4\int_0^1 x\cdot t\cdot f(x)dt$, για κάθε $x\in\Re$ με $f(0)=0$ και $f'(0)=2$

α) να αποδείξετε ότι ο τύπος της $f$ είναι $f(x)=\dfrac{2\chi}{\chi^2+1}$

β) έστω $E(\alpha)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f$, τον άξονα $\chi'\chi$ και τις ευθείες $\chi=0$ και $\chi=\alpha>0$.

Αν το $\alpha$ μεταβάλλεται με ρυθμό $\dfrac{10}{3}$cm/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(\alpha)$ τη χρονική στιγμή $t_0$ κατά την οποία $\alpha(t_0)=3$ cm γ) θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση g για την οποία ισχύει $|g(x)+x-2| \le |f(x)|$ , για κάθε $x \in \Re$

γ1) να αποδείξετε ότι η ευθεία ψ=-χ+2 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g στο $+\infty$

γ2) αν Ε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g , την πλάγια ασύμπτωτη της στο $+\infty$ και τις ευθείες χ=0 και χ=2 , να δείξετε ότι $E \le \ln 5$

## ΘΕΜΑ 147

**Α)** Δίνονται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [α,β] με 0<α<β και οι μιγαδικοί αριθμοί z=α+βi , w= f(α)+f(β)i με $f(\beta) \neq 0$.

α) δείξτε ότι ο αριθμός $z_1 = \dfrac{1+\beta - i\cdot \bar{z}}{1+f(\beta)-i\cdot \overline{w}}$ είναι πραγματικός ⇔ f(α)=α

β) αν ισχύει z = - iw τότε οι εικόνες των z,w στο μιγαδικό επίπεδο και η αρχή Ο των αξόνων είναι κορυφές ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου

γ) αν επιπλέον ισχύει $|z-iw|^2 = |z|^2 + |iw|^2$ να αποδείξετε ότι

γ1) αf(β)=βf(α)

γ2) οι εικόνες των z,w στο μιγαδικό επίπεδο και η αρχή Ο των αξόνων είναι συνευθειακά σημεία

γ3) υπάρχει $\chi_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\chi_0, f(\chi_0))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων

**Β)** Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re \to \Re$ για την οποία ισχύει $x^2 f''(x) + 4xf'(x) + 2f(x) \succ 0$ , για κάθε $x \in \Re$ . Δείξτε ότι

α) η συνάρτηση $g:\Re \to \Re$ με τύπο $g(x) = x^2 f(x)$ στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο R

β) η συνάρτηση g του α) ερωτήματος έχει ελάχιστο

γ) f(χ)>0 , για κάθε $x \in \Re$ .

## ΘΕΜΑ 148

**Α)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{2\cdot e^x}$

α) δείξτε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η συνάρτηση $f^{-1}$

β) να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{\chi\to+\infty} f(x)$ , $\lim\limits_{\chi\to-\infty} f(x)$ , $\lim\limits_{\chi\to-\infty} e^{f^{-1}(x)}$

**Β)** Έστω οι μη μηδενικοί μιγαδικοί $z_1, z_2$ για τους οποίους ισχύουν $|z_1| = 1$ και $4\cdot\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1} = 2$ (1) Να αποδείξετε ότι $|z_2| = 1$ (<u>υπόδειξη</u>: στη σχέση (1) να θέσετε z=$\dfrac{z_1}{z_2}$ και να βρείτε το μιγαδικό z) β) το τρίγωνο που έχει κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών $O$ , $z_1$ , $z_2$ (όπου $O$ η αρχή των αξόνων) είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα $|z_2|$

γ) η εξίσωση $|x \cdot z_1 + (1-x) \cdot z_2| = e^x$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0,1)$

## ΘΕΜΑ 149

**Α)** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(\chi)=\ln\chi$ και η συνεχής συνάρτηση $g : R \to R$ για την οποία ισχύει $g(1)>1$ και $g^2(\chi)-2\chi g(\chi)=1$ , για κάθε $\chi \in R$.

α) αποδείξτε ότι $g(\chi) = x + \sqrt{x^2+1}$ .

β) να δείξετε ότι η συνάρτηση $fog$ ορίζεται στο $R$

γ) δείξτε ότι η $fog$ είναι αντιστρέψιμη

δ) να βρεθεί η συνάρτηση $(fog)^{-1}$

ε) δείξτε ότι η $fog$ είναι περιττή

στ) δείξτε ότι $\int_{-\alpha}^{\alpha} (fog)(x) = 0$ , για κάθε $\alpha \in R$.

**Β)** Ορθογωνίου τριγώνου η υποτείνουσα εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f : R \to (0,+\infty)$ για την οποία ισχύει

$2\int_2^x e^t f(t)dt = e^x f(x) - e^4$ , για κάθε $\chi \in R$. Η μια κάθετη πλευρά έχει μήκος $\beta$ και βρίσκεται στο θετικό ημιάξονα $O\chi$. Η άλλη κάθετη πλευρά έχει μήκος $\alpha$.

α) προσδιορίστε τη συνάρτηση f

β) να δειχθεί ότι αν $M(\chi_o,\psi_o)$ είναι το σημείο επαφής , τότε ισχύει η σχέση $\beta \cdot \psi_o=\alpha$

γ) αν $\alpha=e^2$ και $\beta=1$ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει η σχέση $2\chi_o z - (z-\bar{z})^2 i = 2\chi_o z\bar{z}i + \frac{\chi_o \psi_o}{e^2}(z+\bar{z})$.

## ΘΕΜΑ 150

**Α)** Έστω ο μιγαδικός z που η εικόνα του στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκεται στο μοναδιαίο κύκλο και η συνάρτηση $f(x) = |xz + \bar{z}^2|$ , $\chi \in R$

α) να αποδείξετε ότι $f(x) = x^2 + 2x\,\text{Re}(z^2) + 1$

β) αν $f(x) \geq 1$ για κάθε $\chi \in R$

β1) να δείξετε ότι ο $z^2$ είναι φανταστικός

β2) να βρείτε το όριο $\lim_{\chi \to +\infty} \left[ \frac{f(x)}{e^x} \cdot \eta\mu \frac{1}{f(x)} \right]$

**Β)** Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ για την οποία ισχύει $2f(2x)-f(x)=2x$ , για κάθε $\chi \in R$

α) να δείξετε ότι υπάρχουν $\chi_1 \in (0,1)$ και $\chi_2 \in (1,2)$ τέτοια ώστε $f'(x_1) + 2f'(x_2) = 2$

β) δείξτε ότι η F είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της

γ) αποδείξτε ότι $\int_1^4 f(x)dx = 5$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -