Λύσεις του Διαγωνίσματος Νο 2 (Όρια συνάρτησης)
Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης

Θέμα Α

Α1) Θεωρία-Θεώρημα σελ. 169 σχολικού βιβλίου

Α2) **1**. Λ

2. Σ

3. Σ

4. Λ

5. Σ

Α3) Το ιιι)

Θέμα Β

Β1.

Αν στη δοθείσα σχέση θέσουμε όπου x το $\frac{\pi}{2}$ θα έχουμε τελικά $3 \le f(\frac{\pi}{2}) \le 3$ και άρα $f(\frac{\pi}{2})=3$

Β2) Από την δοθείσα σχέση διαδοχικά έχουμε:

$$\frac{2\sqrt{\eta\mu x}-2}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \le \frac{f(x)-3}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \le \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

και αφού $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\sqrt{\eta\mu x}-2}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = ... = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2(1-\sqrt{\eta\mu x})}{1-\eta\mu^2 x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2(1-\eta\mu x)}{(1-\eta\mu x)\,(1+\eta\mu x)\,(1+\sqrt{\eta\mu x})} = \ldots \frac{-1}{2}$

Όπως ακόμα και $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x-1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{-1}{2}$

Έτσι από το κριτήριο της παρεμβολής θα έχουμε $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)-3}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{-1}{2}$

Β3. Αφού $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{f(x)-3}=-2<0$ τότε και $\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{f(x)-3}<0$ κοντά στο $\frac{\pi}{2}$. Καθώς $\sigma\upsilon\nu^2 x>0$ θα πρέπει

$3-f(x)>0$ και άρα το ζητούμενο όριο (χωρίς τις απόλυτες τιμές) γράφεται:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3-f(x)-xf(x)-3}{f(x)-3}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (-f(x)-xf(x)) \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{f(x)-3}=+\infty$$ αφού $f(x)-3<0$

<u>Θέμα Γ</u>

Γ1. Θα πρέπει $x\neq 0$ και $\frac{x^2+\kappa^2}{x}>0 \Leftrightarrow x\,(x^2+\kappa^2)>0 \Leftrightarrow x>0$ και άρα $A_f=(0,\infty)$

Γ2. θέτω $u=\frac{x^2+\kappa^2}{x}$ όταν $x\to 0^+$ τότε $u\to\infty$ και άρα το ζητούμενο όριο γίνεται $\lim_{u\to\infty} u=\infty$

Γ3. $f(x)-\ln x=\ln \frac{x^2+\kappa^2}{x^2}>0$ αφού $\frac{x^2+\kappa^2}{x^2}>1$

Έτσι αν θέσουμε $u=\frac{x^2+\kappa^2}{x^2}$ τότε αν $x\to\infty$ το $u\to 1$ και άρα το ζητούμενο όριο γίνεται

$\lim_{u\to 1} \ln u=0.$

Γ4. $\lim_{x\to\infty}(f(x)-2\ln x)=\lim_{x\to\infty}(\ln \frac{x^2+\kappa^2}{x}-\ln x^2)=\lim_{x\to\infty} \ln \frac{x^2+\kappa^2}{x^3}$

Θέτουμε $u=\frac{x^2+\kappa^2}{x^3}$ και όταν $x\to\infty$ τότε $u\to 0^+$ και άρα το ζητούμενο όριο γίνεται $\lim_{u\to 0^+} u=+\infty$

Θέμα Δ

Δ1. Το πεδίο ορισμού της f είναι το R. Η f γράφεται και ως $f(x)=x^3+2-\frac{5}{3^x}$

Για την μονοτονία της f έχουμε: Έστω $x_1,x_2 \in R$ με $x_1<x_2$ τότε $x_1^3+2< x_2^3+2$ και

$3^{x_1}<3^{x_2}$ και παίρνουμε $\frac{-5}{3^{x_1}} < \frac{-5}{3^{x_2}}$ και με πρόσθεση αυτών των ανισοτήτων κατά μέλη θα έχουμε

$f(x_1)<f(x_2)$ που σημαίνει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R

Δ2. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim[x^3+2-\frac{5}{3^x}]=\ldots=-\infty$

Δ3. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}[x^3+2-\frac{5}{3^x}]=\ldots =\infty$