Η θεωρία στα Μαθηματικά κατεύθυνσης :

Ορισμοί – Ιδιότητες - Προτάσεις – Θεωρήματα – Αποδείξεις

Α. Μιγαδικοί αριθμοί

1. Πότε δυο μιγαδικοί είναι ίσοι και πότε ένας μιγαδικός είναι ίσος με 0 ;

Απάντηση

Δύο μιγαδικοί αριθμοί $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι ίσοι, αν και μόνο αν $\alpha=\gamma$ και $\beta=\delta$. Δηλαδή ισχύει:

$$\boxed{\alpha+\beta i=\gamma+\delta i \Leftrightarrow \alpha=\gamma \text{ και } \beta=\delta .}$$

Επειδή $0=0+0i$, έχουμε

$$\boxed{\alpha+\beta i=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \text{ και } \beta=0 .}$$

2. Πώς ορίζονται οι πράξεις με μιγαδικούς αριθμούς ;

Απάντηση

- Για την **πρόσθεση** δύο μιγαδικών αριθμών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ έχουμε:

$$\boldsymbol{(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i} \text{ .}$$

- Για την **αφαίρεση** του μιγαδικού αριθμού $\gamma+\delta i$ από τον $\alpha+\beta i$, επειδή ο αντίθετος του μιγαδικού $\gamma+\delta i$ είναι ο μιγαδικός $-\gamma-\delta i$, έχουμε:

$$(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha+\beta i)+(-\gamma-\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i \text{ .}$$

Δηλαδή

$$\boldsymbol{(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i} \text{ .}$$

- Για τον **πολλαπλασιασμό** δύο μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ έχουμε:

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)&=\alpha(\gamma+\delta i)+\beta i(\gamma+\delta i)=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i+(\beta i)(\delta i)=\\&=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i+\beta\delta i^2=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i-\beta\delta=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i\end{aligned}$$

Δηλαδή είναι :

$$\boldsymbol{(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i} \text{ .}$$

- Τέλος, για να εκφράσουμε το **πηλίκο** $\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$, όπου $\gamma+\delta i\neq 0$, στη μορφή $\kappa+\lambda i$, πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με το συζυγή του παρονομαστή και έχουμε:

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)}=\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\beta\gamma-\alpha\delta)i}{\gamma^2+\delta^2}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i\,.$$

Δηλαδή,

$$\boldsymbol{\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i}\,.$$

3. Τι ονομάζουμε συζυγή ενός μιγαδικού αριθμού $z=\alpha+\beta i$ και τι ιδιότητες έχει ;

Απάντηση

Συζυγή του μιγαδικού αριθμού $z=\alpha+\beta i$ λέμε τον αριθμό $\bar{z}=\alpha-\beta i$.

Ο συζυγής του z συμβολίζεται επίσης και με $\overline{\alpha+\beta i}$. Είναι δηλαδή :

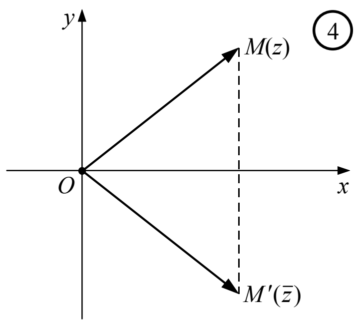
$$\boldsymbol{\overline{\alpha+\beta i}=\alpha-\beta i}\ .$$

Επειδή είναι και $\overline{\alpha-\beta i}=\alpha+\beta i$, οι αριθμοί $\alpha+\beta i$, $\alpha-\beta i$ λέγονται **συζυγείς μιγαδικοί**.

4. Να γράψετε τις ιδιότητες των συζυγών αριθμών και να αποδείξετε ότι $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$.

Απάντηση

- Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες $M(\alpha,\beta)$ και $M'(\alpha,-\beta)$ δύο συζυγών μιγαδικών $z=\alpha+\beta i$ και $\bar{z}=\alpha-\beta i$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.



- Για δύο συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς $z=\alpha+\beta i$ και $\bar{z}=\alpha-\beta i$ μπορούμε εύκολα, με εκτέλεση των πράξεων, να διαπιστώσουμε ότι:

$$\boldsymbol{z+\bar{z}=2\alpha}$$
$$\boldsymbol{z-\bar{z}=2\beta i}\,.$$

- Αν $z_1=\alpha+\beta i$ και $z_2=\gamma+\delta i$ είναι δυο μιγαδικοί αριθμοί, τότε:

1. $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$
2. $\overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2$
3. $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$
4. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.
5. $\boldsymbol{\overline{z_1+z_2+\cdots+z_\nu}=\bar{z}_1+\bar{z}_2+\cdots+\bar{z}_\nu}$
6. $\boldsymbol{\overline{z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_\nu}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2\cdot\ldots\cdot\bar{z}_\nu}$

Θεώρημα

5. Να αποδειχθεί ότι : $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$

Απόδειξη

Η απόδειξη της ιδιότητας $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$ γίνεται ως εξής :

Αν $z_1=\alpha+\beta i$ και $z_2=\gamma+\delta i$, τότε έχουμε :

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)}=\overline{(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i}$$

$$=(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)i=(\alpha-\beta i)+(\gamma-\delta i)=\bar{z}_1+\bar{z}_2$$

6. Πώς υπολογίζουμε τις δυνάμεις του i ;

Απάντηση

Για να υπολογίσουμε συγκεκριμένη δύναμη του i, γράφουμε τον εκθέτη ν στη μορφή $\nu=4\rho+\upsilon$, όπου ρ είναι το πηλίκο και υ το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του ν με το 4, οπότε έχουμε:

$$i^\nu=i^{4\rho+\upsilon}=i^{4\rho}i^\upsilon=(i^4)^\rho i^\upsilon=1^\rho i^\upsilon=i^\upsilon=\begin{cases}1 &, \text{ αν } \upsilon=0\\ i &, \text{ αν } \upsilon=1\\ -1 &, \text{ αν } \upsilon=2\\ -i &, \text{ αν } \upsilon=3\end{cases}$$

$$=(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)i=(\alpha-\beta i)+(\gamma-\delta i)=\bar{z}_1+\bar{z}_2\,.$$

Θεώρημα

7. Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών την εξίσωση $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ **με** $\alpha,\beta,\gamma\in R$ και $\alpha\neq 0$.

Απόδειξη

Έστω η εξίσωση $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$, με $\alpha,\beta,\gamma\in R$ και $\alpha\neq 0$.

Μετασχηματίζουμε την εξίσωση , με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων, στη μορφή:

$$\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\Delta}{4\alpha^2},$$

όπου $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ είναι η διακρίνουσα της εξίσωσης. Έτσι, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $\Delta>0$, τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές λύσεις: $z_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- Αν $\Delta=0$, τότε έχει μια διπλή πραγματική λύση: $z=\dfrac{-\beta}{2\alpha}$
- Αν $\Delta<0$, τότε, επειδή $\dfrac{\Delta}{4\alpha^2}=\dfrac{(-1)(-\Delta)}{4\alpha^2}=\dfrac{i^2(\sqrt{-\Delta})^2}{(2\alpha)^2}=\left(\dfrac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2$, η εξίσωση γράφεται:

$$\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2.$$

Άρα οι λύσεις της είναι: $z_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$, οι οποίες είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί.

Να αποδείξετε το παρακάτω κριτήριο :

Για ένα μιγαδικό αριθμό z ισχύει ότι:

- Ο z είναι πραγματικός, αν και μόνο αν $z=\bar{z}$
- Ο z είναι φανταστικός, αν και μόνο αν $z=-\bar{z}$.

Απόδειξη

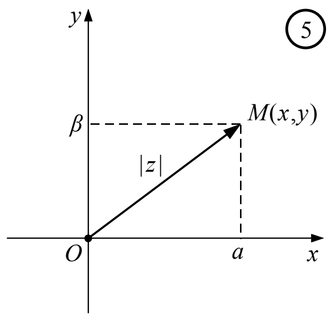
Δες το τετράδιό σου ή να γίνει ξανά στην τάξη.

8. Τι λέμε μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού ;

Απάντηση

Έστω $M(x,y)$ η εικόνα του μιγαδικού $z=x+yi$ στο μιγαδικό επίπεδο. Ορίζουμε ως **μέτρο** του z την απόσταση του M από την αρχή O, δηλαδή

$$\boxed{|z|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2}}$$



9. Να γράψετε τις ιδιότητες του μέτρου μιγαδικού αριθμού.

Απάντηση

Ισχύει ότι :

- $|z|=|\bar{z}|=|-z|$
- $|z|^2=z\cdot\bar{z}$
- $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$
- $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$
- $|z^\nu|=|z|^\nu$.
- $\boxed{\big||z_1|-|z_2|\big|\le|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|}$

Θεώρημα

10. Να αποδείξετε ότι : $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

Απόδειξη

Έχουμε:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow |z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$$
$$\Leftrightarrow (z_1 \cdot z_2)(\overline{z_1 \cdot z_2}) = z_1 \cdot \overline{z}_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z}_2$$
$$\Leftrightarrow z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2 = z_1 \cdot \overline{z}_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z}_2$$

και επειδή η τελευταία ισότητα ισχύει, θα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική.

11.α) Τι εκφράζει γεωμετρικά το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών , δηλαδή ο αριθμός

$$\boxed{|z_1 - z_2|}$$

β) Τι παριστάνει η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, $\rho > 0$;

γ) Τι παριστάνει η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$;

Απάντηση

α) "Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους".

Δηλαδή:

$$\boxed{(M_1M_2) = |z_1 - z_2|}$$

β) Η εξίσωση

$$|z - z_0| = \rho \text{ , } \rho > 0$$

παριστάνει τον **κύκλο** με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ.

γ) Η εξίσωση

$$|z - z_1| = |z - z_2|$$

παριστάνει τη **μεσοκάθετο** του τμήματος με άκρα τα σημεία $A(z_1)$ και $B(z_2)$.