ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ
ΣΤΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. θεωρία ,θεώρημα σελ. 262

Α2. Ορισμός σελ 141

Α3. Διατύπωση θεωρήματος σελ.246

Α4. Σ, Σ , Λ, Σ, Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αφού w είναι φανταστικός αριθμός $\bar{w}=-w$ και μετά τις πράξεις θα έχουμε $z\bar{z}=1$ άρα $|z|=1$

Β2. Για να δείξουμε ότι ο αριθμός $u=(z-1/z)^4$ είναι πραγματικός θα πρέπει να δείξουμε ότι $u=\bar{u}$ που είναι ευκολο να δειχθεί αφού ισχύει $z\bar{z}=1$ και άρα $\bar{z}=1/z$

Β3. Η ζητούμενη σχέση είναι ισοδύναμη με $(\overline{z_1+z_2})(z_1+z_2)\leq 4$ ή αν θέσουμε $\omega= z_1+z_2$ η σχέση γίνεται $\bar{\omega}.\omega\leq 4$ ή $|\omega|\leq 2$ δηλαδή ισοδύναμα $|z_1+z_2|\leq 2$ που ισχύει αφού λόγω της τριγωνικής ανισότητας θα έχουμε $|z_1+z_2|\leq |z_1|+|z_2|=1+1=2$

B4. Αφού ο w είναι φανταστικός αριθμός θα είναι της μορφής $w=\alpha i$ ($\alpha\epsilon R$). Θέτοντας $u=x+yi$ ($x,y\ \epsilon R$) θα έχουμε μετά τις πράξεις $(x+y)+(y-x)i=1/\alpha-\alpha i$ και άρα $x+y=1/\alpha$ και $y-x=-\alpha$ ή $x-y=\alpha$ ($\alpha\neq0$) και με απαλοιφή της παραμέτρου α θα έχουμε την ισοσκελή υπερβολή $x^2-y^2=1$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από την σχέση $xf(x)+1=e^x$ έχουμε $f(x)=e^x-1/x$, αν $x\neq0$ και για

$x=0$ αφού η f είναι συνεχής και στο 0 θα έχουμε

$\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$ και άρα με τον κανόνα του D'L καταλήγουμε στο $f(0)=1$

Γ2. Μπορούμε ν.δ το 1-1 αποδεικνύοντας ότι η f είναι γν. μονότονη
Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη(ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) για $x\neq0$ με

$f'(x)=e^x(x-1)+1/x^2$, $x\neq0$ τώρα θεωρώντας την $g(x)=e^x(x-1)+1$, $x\neq0$

που είναι παραγωγίσιμη (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) έχουμε ότι $g'(x)=xe^x$ και αν $x>0$ τότε $g'(x)>0$ και αν $x<0$ τότε $g'(x)<0$ και άρα η g έχει ελάχιστο στο $x_o=o$ άρα

$g(x)\geq g(0)=0$ και τελικά $f'(x)>0$ άρα η f είναι γν. αύξουσα συνάρτηση και άρα 1-1 και συνεπώς ορίζεται η f^{-1}.

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f:
Έτσι αφού $D_f=(-\infty,0]U(0,\infty)$ θα έχουμε

$(\lim_{x\to-\infty} f(x),f(0)]\ U\ (f(0),\lim_{x\to\infty} f(x))=(0,1]\ U\ (1,\infty)=(0,\infty)$

θα έχουμε $D_{f-1}=[0,\infty)$

Γ3. Η εξίσωση της εφαπτομένης της Cf στο σημείο Α(0, f(0)) είναι

Ψ-1= f΄(0) x (1). Το f΄(0) προκύπτει από τον ορισμό με το όριο και μετά με τον κανόνα του D΄ L και είναι ίσο με ½ άρα η (1) γίνεται

Ψ-1=x/2 ή ψ=x/2 +1

Αφού η f είναι κυρτή θα ισχύει f(x)≥ψ για x πραγματικό και άρα

$f(x) \geq x/2 + 1$ (2)

Για ν.δ.ο η εξίσωση 2f(x)=x+2 έχει ακριβώς μια λύση πρέπει ν.δ.ο η K(x)=2f(x)-x-2 έχει ακριβώς μια λύση που όμως, λόγω της (2), είναι K(x) ≥0 και το = ισχύει μόνο για το σημείο επαφής δηλαδή το x=0. Άρα έχει μοναδική ρίζα το 0 και για τα άλλα x, K(x)>0

Γ4.A= $\lim\limits_{x\to 0+} [x (\ell n x) \ell n(f(x))]$ θα έχουμε

$\lim\limits_{x\to 0+} x (\ell n x) = \lim\limits_{x\to 0+} \ln x / x =$

=D΄L=….0 και άρα A=0 .0=0 (διότι $\ell n(f(x)=\ln f(0)=0$ (f συνεχής)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της δοθείσας σχέσης θα έχουμε (είναι παραγωγίσιμες αφού οι υπό ολοκλήρωση συναρτήσεις είναι συνεχείς):

$2e^{f(x)}=x+1/x+c$ και το c προσδιορίζετε από την δοθεία σχέση για x=1. που δίνει $2f(1)+2e^{f(1)}=2$ ή $f(1)+e^{f(1)}=1$. Τώρα

- Αν f(1)>0 τότε $1- e^{f(1)}>0$ και $e^{f(1)}<e^0$ άρα f(1)<0 άτοπο
- Αν f(1)<0 τότε $1- e^{f(1)}<0$ και $e^{f(1)}>e^0$ άρα f(1)>0 άτοπο

Άρα f(1)=0

Τώρα για x=1 έχουμε c=0 και συνεπώς η συνάρτηση έχει τύπο
$f(x)= \ln x^2+1/2x$, για $x>0$

Δ2.Για να δείξουμε ότι η F έχει σημείο καμπής θα βρούμε την $F''(x)$.
Η f είναι συνεχής για $x>0$ άρα η F είναι παραγωγίσιμη για $x>0$ με $F'(x)=f(x)$.Τώρα $F''(x)=f'(x)=1-x^2/x(x^2+1)$, $x>0$. Η $f(x)=0$ δίνει λύση την x=1 και άρα ο πίνακας μεταβολών της f δίνει:

x	0	1 ∞
F΄΄	+	-
F	Κοίλα άνω	Κοίλα κάτω
	Σ.Κ	

Άρα η F έχει μοναδικό σημείο καμπής το (1,F(1))=(1,0)

Για να είναι η εφαπτομένη της C_F στο σημείο $M(\xi,F(\xi))$ παράλληλη προς την ευθεία ε: $F(\beta)\,x-(\beta-1)y+2012\,(\beta-1)=0$ θα πρέπει $F'(\xi)=F(\beta)/\beta-1$.Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. του διαφορικού λογισμού στο διάστημα $[1,\beta]$ για τη συνάρτηση F (ισχύουν οι προϋποθέσεις που τις αναφέρουμε).

Το ξ είναι μοναδικό αφού η συνάρτηση F΄ είναι γν. αύξουσα λόγω του ότι η F είναι κοίλη στο $[1,\beta]$.

Δ3. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$H(x)=(x-3)\,[F(\beta)+(1-\beta)f(\beta)]\,x^3+(x-1)\,(\beta-1)(x+1)^2$ και εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano στο [1,3].
Η H(x) είναι συνεχής στο [1,3] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

- $H(1)=-2[F(\beta)+(1-\beta)f(\beta)]<0$ αφού $\xi<\beta$ και η F΄ είναι γν.φθίνουσα $F'(\xi)>F'(\beta)$ που από το Δ2 έχουμε $F(\beta)/\beta-1>f(\beta)$ δηλ. $[F(\beta)+(1-\beta)f(\beta)]>0$
- $H(3)=32(\beta-1)>0$

Άρα υπάρχει $\xi \in (1,3)$ τέτοιο ώστε $H(\xi)=0$ που δίνει άμεσα το ζητούμενο.

Δ4. Για το ολοκλήρωμα του α΄μέλους κάνουμε την αντικατάσταση $u=t/x$ και με αλλαγή των άκρων ολοκλήρωσης παίρνουμε:
Για $t=x$ $u=1$ και για $t=x^2$ $u=x$ οπότε το ολοκλήρωμα του α΄μέλους

γίνεται: $x\int_1^x f(u)du$ οπότε αρκεί ν.δ.ο $x\int_1^x f(u)du \le \int_1^x u\, f(u)du$

Για το σκοό αυτό θεωρούμε την συνάρτηση $\Pi(x)= x\int_1^x f(u)du-\int_1^x u\, f(u)du$, $x>0$ και $\Pi(1)= 0$

Η συνάρτηση $\Pi(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων επειδή η $f(x)$ είναι συνεχής για $x>0$ με

$\Pi'(x)=\int_1^x f(u)du=F(x)$ για $x>0$. Επειδή $2x/x^2+1 <1$ θα είναι $\ln(2x/x^2+1)<0$
δηλαδή

$f(x)<0$.

Άρα για $x>1$ $\Pi'(x)<0$ και για $0<x<1$ $\Pi'(x)>0$ και έτσι η $\Pi(x)$ έχει μέγιστο στο 1 το

$\Pi(1)= 0$. Άρα $\Pi(x) \ge \Pi(1)$ ή $\Pi(x) \ge 0$ που αποδεικνύει το ζητούμενο