Η θεωρία στα Μαθηματικά κατεύθυνσης :

Ορισμοί – Ιδιότητες - Προτάσεις – Θεωρήματα – Αποδείξεις

ΣΤ. Ολοκληρωτικός λογισμός

1. Τι ονομάζουμε αρχική μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;

Απάντηση

Αρχική συνάρτηση ή **παράγουσα** της f στο Δ ονομάζουμε κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$$F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

2. Θεώρημα

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι :

- Όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in R,$$

είναι παράγουσες της f στο Δ .

- Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in R.$$

Απάντηση

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in R$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε , για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν οι σχέσεις $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε :

$$G'(x) = F'(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

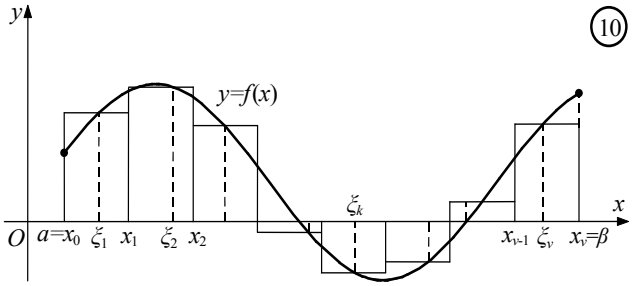
Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε

$$G(x) = F(x) + c, \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

3*. Να δώσετε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνεχούς συνάρτησης f σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f *συνεχής* στο $[\alpha,\beta]$. Με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta$ χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \dfrac{\beta-\alpha}{\nu}$.



Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_\kappa \in [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, για κάθε $\kappa \in \{1,2,\ldots,\nu\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_\kappa)\Delta x + \cdots + f(\xi_\nu)\Delta x$$

το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής:

$$S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x \ .$$

Τα ο όριο του αθροίσματος S_ν, δηλαδή το $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_κ.

Το παραπάνω όριο ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β, συμβολίζεται με $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ και διαβάζεται "ολοκλήρωμα της f από το α στο β". Δηλαδή,

$$\boxed{\int_\beta^\alpha f(x)dx = \lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)}$$

4. Να γράψετε τις ιδιότητες του ολοκληρώματος $\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

Απάντηση

α) Ισχύει ότι :

- $\int_\alpha^\beta f(x)dx = -\int_\beta^\alpha f(x)dx$
- $\int_\alpha^\alpha f(x)dx = 0$
- Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$.

β) Έστω f, g *συνεχείς* συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$ και $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν

- $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx = \lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx$

- $\int_{\alpha}^{\beta}[f(x)+g(x)]dx=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx+\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$

και γενικά

- $\int_{\alpha}^{\beta}[\lambda f(x)+\mu g(x)]dx=\lambda\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx+\mu\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$

γ) Αν η f είναι *συνεχής* σε διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$, τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=\int_{\alpha}^{\gamma}f(x)dx+\int_{\gamma}^{\beta}f(x)dx$$

δ) Έστω f μια *συνεχής* συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx>0.$$

5. Να γράψετε την παράγωγο της συνάρτησης $F(x)=\int_{\alpha}^{x}f(x)dx$, $x\in\Delta$, όπου f είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα Δ .

Απάντηση

Ισχύει ότι :

$$F'(x)=\left(\int_{a}^{x}f(t)dt\right)'=f(x),\quad \text{για κάθε}\quad x\in\Delta.$$

Σχόλια

α) Γενικότερα έχουμε το εξής θεώρημα :

Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση

$$F(x)=\int_{\alpha}^{x}f(t)dt,\ x\in\Delta,$$

είναι μια παράγουσα της f στο Δ. Δηλαδή ισχύει:

$$\left(\int_{a}^{x}f(t)dt\right)'=f(x),\quad \text{για κάθε}\quad x\in\Delta.$$

β) Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης προκύπτει ότι:

$$\left(\int_{a}^{g(x)}f(t)dt\right)'=f'(g(x)\cdot g'(x),$$

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

Θεώρημα

5. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Απόδειξη

Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει $c \in \circ$ τέτοιο, ώστε

$$G(x) = F(x) + c. \qquad (1)$$

Από την (1), για $x = \alpha$, έχουμε $G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c = c$, οπότε $c = G(\alpha)$.

Επομένως,

$$G(x) = F(x) + G(\alpha),$$

οπότε, για $x = \beta$, έχουμε

$$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + G(\alpha)$$

και άρα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha).$$

6. Να γράψετε τους τύπους της παραγοντικής ολοκλήρωσης και της αντικατάστασης για το ορισμένο ολοκλήρωμα.

Απάντηση

α) Ισχύει ότι :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx,$$

όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$.

β) Ισχύει ότι :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du,$$

όπου f, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ και $u_1 = g(\alpha)$, $u_2 = g(\beta)$.

7.α) Να γράψετε τον τύπο που δίνει το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα $x'x$,όταν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής .

β) Να αποδείξετε ότι αν για τις συναρτήσεις f,g είναι $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$,$x=\beta$ δίνεται από τον τύπο :

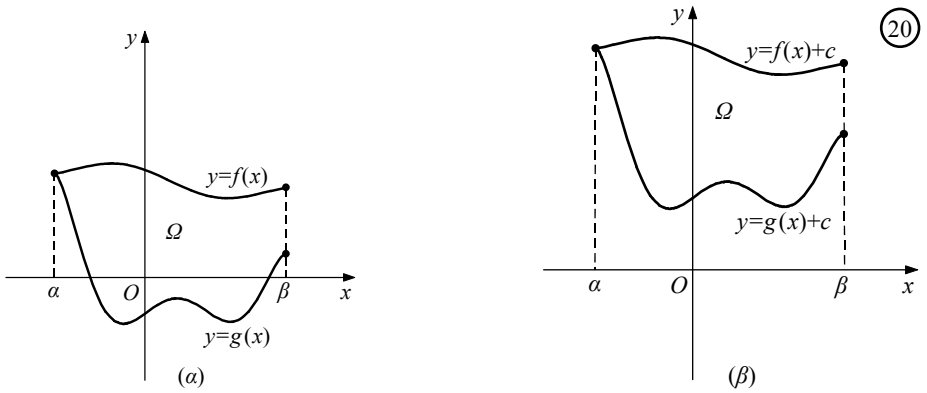
$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}(\mathrm{f}(\mathrm{x})-\mathrm{g}(\mathrm{x}))\mathrm{dx}$$

Απάντηση

α) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα $x'x$ είναι

$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{dx}$$

β) Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει αριθμός $c\in\mathrm{R}$ τέτοιος, ώστε $f(x)+c\geq g(x)+c\geq 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Είναι φανερό ότι το χωρίο Ω (Σχ. 20α) έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο Ω' .



Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο (1), έχουμε:

$$\mathrm{E}(\Omega)=\mathrm{E}(\Omega')=\int_{\alpha}^{\beta}[(\mathrm{f}(\mathrm{x})+\mathrm{c})-(\mathrm{g}(\mathrm{x})+\mathrm{c})]\mathrm{dx}=\int_{\alpha}^{\beta}(\mathrm{f}(\mathrm{x})-\mathrm{g}(\mathrm{x}))\mathrm{dx}\,.$$

Άρα

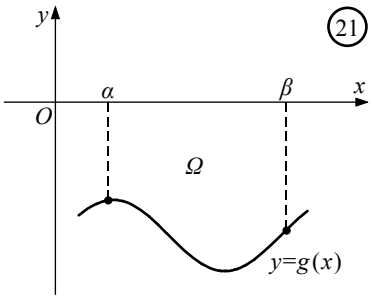
$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}(\mathrm{f}(\mathrm{x})-\mathrm{g}(\mathrm{x}))\mathrm{dx}$$

Σχόλια

α) Όταν η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ είναι ίσο με $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx$

β) Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τον άξονα $x'x$, τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g, με $g(x)\le 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ είναι ίσο με :

$$E(\Omega)=-\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$$



Απόδειξη

Πράγματι, επειδή ο άξονας $x'x$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=0$, έχουμε

$$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}[-g(x)]dx=-\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx.$$

Επομένως, αν για μια συνάρτηση g ισχύει $g(x)\le 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε

$$\boxed{E(\Omega)=-\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx}$$