Η θεωρία στα Μαθηματικά κατεύθυνσης :

Ορισμοί – Ιδιότητες - Προτάσεις – Θεωρήματα – Αποδείξεις

Δ. Συνέχεια συνάρτησης

1. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο σημείο x_o του πεδίου ορισμού της ;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της , όταν

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Σχόλια

α) Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, μια συνάρτηση f **δεν είναι** συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν:

i) Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή

ii) Υπάρχει το όριό της στο x_0, αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της, $f(x_0)$, στο σημείο x_0.

β) Μία συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέγεται, **συνεχής συνάρτηση**.

γ) — **Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση *P* είναι συνεχής**, αφού για κάθε $x_0 \in R$ ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0).$$

— **Κάθε ρητή συνάρτηση $\frac{P}{Q}$ είναι συνεχής**, αφού για κάθε x_0 του πεδίου ορισμού της ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

— **Οι συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχείς**, αφού για κάθε $x_0 \in R$ ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0.$$

— **Οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha^x$ και $g(x) = \log_\alpha x$, $0 < \alpha \neq 1$ είναι συνεχείς**.

2. Να διατυπώσετε πρόταση που αφορά τη συνέχεια και τις πράξεις συναρτήσεων .

Απάντηση

Για τη συνέχεια και τις πράξεις συναρτήσεων ισχύει το παρακάτω θεώρημα :

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0, τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις:

$$f+g, \quad c\cdot f, \quad \text{όπου} \quad c\in \mathrm{R}, \quad f\cdot g, \quad \frac{f}{g}, \quad |f| \quad \text{και} \quad \sqrt[\nu]{f}$$

με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0.

2. Να διατυπώσετε πρόταση που αφορά τη συνέχεια σύνθετης συνάρτησης .

Απάντηση

Για τη συνέχεια σύνθετης συνάρτησης ισχύει το παρακάτω θεώρημα :

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0.

3. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β) και πότε στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$

Απάντηση

- Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β)**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β).
- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x)=f(\alpha) \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to\beta^-} f(x)=f(\beta)$$

Σχόλιο

Ανάλογοι ορισμοί διατυπώνονται για διαστήματα της μορφής $(\alpha,\beta]$, $[\alpha,\beta)$.

4. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f(x_0)=0.$$

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα (α,β).

Σχόλια

— Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x\in\Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x\in\Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

— Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από το διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Θεώρημα

5. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών .

Απάντηση

Το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών είναι το παρακάτω :

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_0)=\eta$$

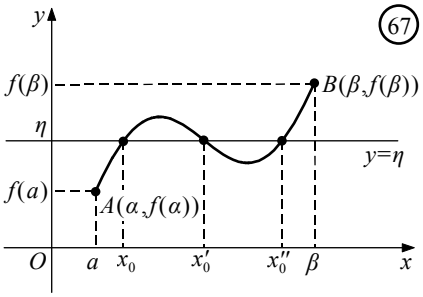
Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$ (Σχ. 67). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta$, $x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta)<0$,

αφού
$g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και
$g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$. ■



Σχόλια

α) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

β) Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** και **συνεχής** σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A,B), όπου

$$A=\lim_{x\to\alpha^+}f(x) \quad \text{και} \quad B=\lim_{x\to\beta^-}f(x).$$

Αν, όμως, η f είναι **γνησίως φθίνουσα** και **συνεχής** στο (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B,A) .

6. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης – ελάχιστης τιμής .

Απάντηση

Το θεώρημα μέγιστης – ελάχιστης τιμής διατυπώνεται ως εξής :

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει

$$\boldsymbol{m \le f(x) \le M}, \quad \textbf{για κάθε} \quad \boldsymbol{x \in [\alpha, \beta]}.$$

Σχόλιο

Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το **σύνολο τιμών** μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha, \beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $\boldsymbol{[m, M]}$, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.