Η θεωρία στα Μαθηματικά κατεύθυνσης :

Ορισμοί – Ιδιότητες - Προτάσεις – Θεωρήματα – Αποδείξεις

Γ. Όρια συναρτήσεων

1. Ποια πρόταση συνδέει το όριο της f στο x_o και τα πλευρικά όρια της f στο x_o;

Απάντηση

Ισχύει ότι :

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$$

Παρατηρήσεις στο όριο

α) Ισχύει ότι :

(α)	$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$	$\Leftrightarrow$	$\lim_{x \to x_0} (f(x) - \ell) = 0$
(β)	$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$	$\Leftrightarrow$	$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = \ell$

β) Τους αριθμούς $\ell_1 = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ και $\ell_2 = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ τους λέμε **πλευρικά όρια** της f στο x_0 και συγκεκριμένα το ℓ_1 **αριστερό όριο** της f στο x_0, ενώ το ℓ_2 **δεξιό όριο** της f στο x_0.

γ) — Για να αναζητήσουμε το όριο της f στο x_0, πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε "κοντά στο x_0", δηλαδή η f να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής

$$(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta) \quad \text{ή} \quad (\alpha, x_0) \quad \text{ή} \quad (x_0, \beta).$$

— Το x_0 μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (Σχ. 39α, 39β) ή να μην ανήκει σ' αυτό .

— Η τιμή της f στο x_0, όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριό της στο x_0 (Σχ. 39α) ή διαφορετική από αυτό.

δ) Ισχύει ότι $\lim_{x \to x_0} x = x_0$ και $\lim_{x \to x_0} c = c$

2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f έχει κοντά στο x_o μια ιδιότητα P;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f λέμε ότι έχει **κοντά στο x_0** μια ιδιότητα P, όταν ισχύει μια από τις παρακάτω τρεις συνθήκες:

α) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και στο σύνολο αυτό έχει την ιδιότητα P.

β) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (α, x_0), έχει σ' αυτό την ιδιότητα P, αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (x_0, β).

γ) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (x_0, β), έχει σ' αυτό την ιδιότητα P, αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (α, x_0).

3. Να γράψετε τις ιδιότητες των ορίων ορίου στο x_0 .

Απάντηση

Για το όριο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

α) Θεώρημα 1ο

- Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0
- Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

β) Θεώρημα 2ο

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \le \lim_{x \to x_0} g(x)$$

γ) Θεώρημα 3ο

Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0, τότε:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

2. $\lim\limits_{x \to x_0} (\kappa f(x)) = \kappa \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, για κάθε σταθερά $\kappa \in \mathrm{R}$

3. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ **4.** $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$, εφόσον $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \ne 0$

5. $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = \left| \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \right|$ **6.** $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x) \ge 0$ κοντά στο x_0.

δ) Θεώρημα 4ο

— Έστω τώρα το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $x_0 \in \mathrm{R}$.Είναι τότε :

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$$

—Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathrm{R}$ με $Q(x_0) \ne 0$. Θα είναι τότε

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, \quad \textbf{όπου } Q(x_0) \ne 0$$

ε) Θεώρημα 5ο

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν

- $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$,

τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

Κριτήριο παρεμβολής.

στ) Ισχύει ότι

- $|\eta\mu x| \le |x|$, για κάθε $x \in R$.Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x = 0$.
- $\lim\limits_{x \to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$

4 . Πώς υπολογίζουμε το όριο της σύνθετης συνάρτησης $f \circ g$ στο x_o .

Απάντηση

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο της σύνθετης συνάρτησης $f \circ g$ στο σημείο x_0,δηλαδή το $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x))$, τότε εργαζόμαστε ως εξής:

1. Θέτουμε $u = g(x)$.
2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $u_0 = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ και
3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $\ell = \lim\limits_{u \to u_0} f(u)$.

Αν $g(x) \ne u_0$ κοντά στο x_0, τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με ℓ, δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{u \to u_0} f(u).$$

5 . Να γράψετε τις ιδιότητες του άπειρου ορίου στο x_o .

Απάντηση

Όπως στην περίπτωση των πεπερασμένων ορίων έτσι και για τα άπειρα όρια συναρτήσεων, που ορίζονται σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

α) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$

β) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$.

γ) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, ενώ αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(-f(x))=-\infty$, ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(-f(x))=+\infty$.

ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

στ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$, ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$

και $f(x)<0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$.

ζ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$. η) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)}=+\infty$.

θ) i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ και γενικά $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{2\nu}}=+\infty$, $\nu\in\mathrm{N}^*$

ii) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}=+\infty$, $\nu\in\mathrm{N}$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}=-\infty$, $\nu\in\mathrm{N}$.

ι) Για το άθροισμα και το γινόμενο ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα :

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (όριο αθροίσματος)

Αν στο $x_0\in\circ$						
το όριο της f είναι:	$\alpha\in\mathrm{R}$	$\alpha\in\mathrm{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
τότε το όριο της $f+g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	;	;

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (όριο γινομένου)

Αν στο $x_0\in\mathrm{R}$,										
το όριο της f είναι:	$\alpha>0$	$\alpha<0$	$\alpha>0$	$\alpha<0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
τότε το όριο της $f\cdot g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Σχόλιο

Οι παρακάτω μορφές λέγονται **απροσδιόριστες** μορφές :

$$(+\infty)+(-\infty)\ ,\ 0\cdot(\pm\infty)\ ,\ (+\infty)-(+\infty),\ (-\infty)-(-\infty)\ ,\ \frac{0}{0},\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

6 . Να γράψετε τις ιδιότητες για το όριο στο άπειρο .

Απάντηση

α) Για τον υπολογισμό του ορίου στο $+\infty$ ή $-\infty$ ενός μεγάλου αριθμού συναρτήσεων χρειαζόμαστε τα παρακάτω βασικά όρια:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\nu} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^{\nu}} = 0$, $\quad \nu \in \mathbb{N}^*$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{\nu} = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } \nu \text{ περιττός} \end{cases}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^{\nu}} = 0$, $\quad \nu \in \mathbb{N}^*$.

β) Για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = \alpha_{\nu}x^{\nu} + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0$, με $\alpha_{\nu} \neq 0$ ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty}(\alpha_{\nu}x^{\nu}) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty}(\alpha_{\nu}x^{\nu})$$

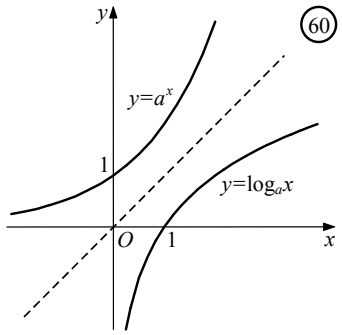
γ) Για τη ρητή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\alpha_{\nu}x^{\nu} + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_{\kappa}x^{\kappa} + \beta_{\kappa-1}x^{\kappa-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0}$, $\alpha_{\nu} \neq 0$, $\beta_{\kappa} \neq 0$ ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha_{\nu}x^{\nu}}{\beta_{\kappa}x^{\kappa}}\right) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\alpha_{\nu}x^{\nu}}{\beta_{\kappa}x^{\kappa}}\right)$$

δ) Για το όριο **εκθετικής - λογαριθμικής** συνάρτησης ισχύει ότι

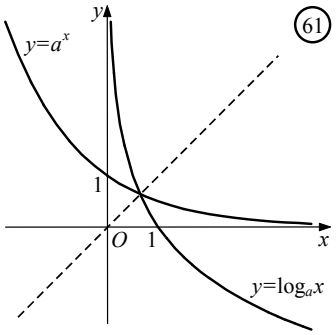
- Αν $\alpha > 1$ (Σχ. 60), τότε

$\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = 0$,	$\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty$
$\lim\limits_{x\to 0} \log_{\alpha} x = -\infty$,	$\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\alpha} x = +\infty$



- Αν $0 < \alpha < 1$ (Σχ. 61), τότε

$\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty$,	$\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$
$\lim\limits_{x\to 0} \log_{\alpha} x = +\infty$,	$\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\alpha} x = -\infty$



Σχόλια

- Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $+\infty$, πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$.
- Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $-\infty$ πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(-\infty,\beta)$.
- Για τα όρια στο $+\infty$, $-\infty$ ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των ορίων στο x_0 με την προϋπόθεση ότι:

— οι συναρτήσεις είναι ορισμένες σε κατάλληλα σύνολα και
— δεν καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή.