ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ ΤΗΣ ΡΟΔΟΥ ΤΗΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ ΣΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1^{Ο}

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων του επί το ύψος του. **Μονάδες 13**

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη "**Σωστό**" ή "**Λάθος**" δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Το Ρ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (Ο, R), αν και μόνο αν $\Delta^{P}_{(O,R)} > 0$, όπου $\Delta^{P}_{(O,R)}$ η δύναμη του σημείου Ρ ως προς τον κύκλο (O,R). **Μονάδες 3**

β. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισοδυναμία:

$\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} < 90°$. **Μονάδες 3**

γ. Το εμβαδόν Ε κάθε τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο $E = \frac{1}{2}\alpha\beta\,\eta\mu B$.

Μονάδες 3

δ. Το 1ο θεώρημα των διαμέσων σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ εκφράζεται από τον τύπο: $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2 + \frac{\mu_\alpha^2}{2}$. **Μονάδες 3**

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Α. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Ι** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης ΙΙ**, που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Ι: κανονικό πολύγωνο	**Στήλη ΙΙ: πλευρά λ_ν**
α. κανονικό εξάγωνο **β.** ισόπλευρο τρίγωνο **γ.** τετράγωνο	**1.** $R\sqrt{2}$ **2.** $\frac{R\sqrt{2}}{2}$ **3.** $R\sqrt{3}$ **4.** $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ 5. R

όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του κανονικού πολυγώνου. **Μονάδες 15**

B. Για τις επόμενες δύο ερωτήσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό τους και δίπλα να σημειώσετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

α. Το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι $24cm^2$ ενώ η βάση του είναι 12cm. Το αντίστοιχο ύψος είναι:

Α. 6cm **Β.** 5cm **Γ.** 4cm **Δ.** 2cm **Ε.** 12cm **Μονάδες 5**

β. Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι 4cm και 9cm.

Η πλευρά του τετραγώνου το οποίο έχει το ίδιο εμβαδόν με το ορθογώνιο αυτό είναι:

Α. 36cm **Β.** 6cm **Γ.** 6,5cm **Δ.** 13cm **Ε.** 5cm **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ 3^{ο}

Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται: ΑΒ=3, ΒΓ=5 και ΑΓ=7.

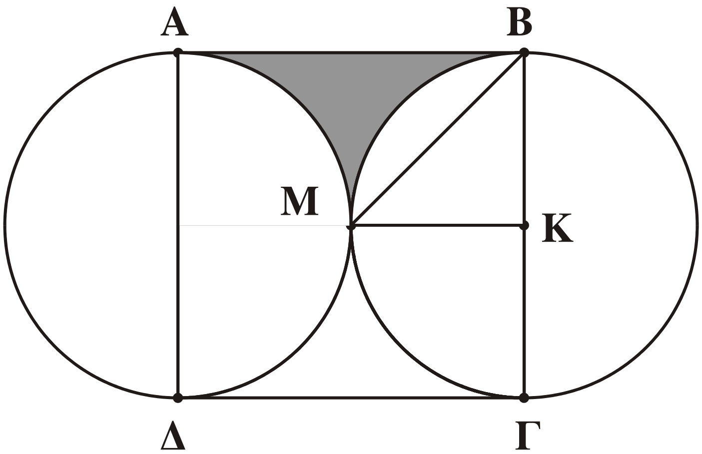
α) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις γωνίες του. **Μονάδες 8**

β) Να υπολογίσετε σε μοίρες την γωνία του τριγώνου ΑΒΓ που βρίσκεται απέναντι από την μεγαλύτερη πλευρά του **Μονάδες 9**

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ. **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ 4^{ο}

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 4cm . Με διαμέτρους ΑΔ και ΒΓ γράφουμε κύκλους που εφάπτονται στο σημείο Μ, όπως φαίνεται στο σχήμα:



Να υπολογίσετε:

α. Το εμβαδόν του τριγώνου ΜΚΒ, όπου Κ το μέσο της ΒΓ. **Μονάδες 9**

β. Το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΜΒ. **Μονάδες 8**

γ. Την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΜΒ. **Μονάδες 8**

<u>ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2^{o}</u>

<u>ΘΕΜΑ 1^{o}</u>

Α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του επί το ύψος του. Μονάδες 9

Β. Δίνεται το οξυγώνιο τρίγωνο του παρακάτω σχήματος.

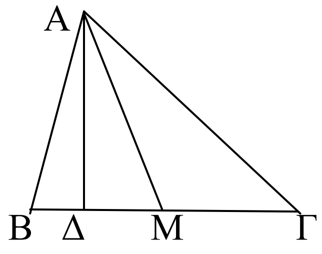
Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις

i) $\beta^2+\gamma^2=$ …… +……..

ii) $\beta^2-\gamma^2=$ …………… (β>γ)

iii) $\beta^2=a^2+......-......\Delta B$

iv) $.....=......+......-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$



ΒΜ=ΜΓ , ΑΔ ύψος

Μονάδες 8

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση. Μονάδες 8

i) Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια με λόγο ομοιότητας λ τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο ομοιότητας τους λ.

ii) Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90°$) ισχύει $\beta^2<\alpha^2+\gamma^2$

iii) Αν δύο τρίγωνα είναι ισοδύναμα, τότε πάντα είναι ίσα.

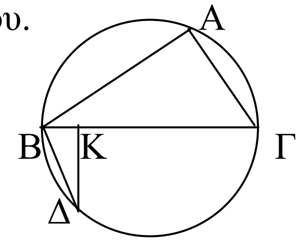
iv) Το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο $E=\frac{1}{2}\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$

<u>ΘΕΜΑ 2^{o}</u>

Στο διπλανό σχήμα η ΒΓ είναι διάμετρος του κύκλου.

Δίνονται ΑΒ=4 , ΑΓ=3 και ΒΔ=2. (ΔΚ $\perp$ ΒΓ)

Να υπολογίσετε :



i) την ακτίνα του κύκλου Μονάδες 5

ii) τα μήκη των τμημάτων ΔΓ, ΚΓ, ΚΒ ,ΔΚ Μονάδες 20

<u>ΘΕΜΑ 3^{o}</u>

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με β=7, γ=5. Αν η διάμεσος ΑΜ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου στο Ε με ΑΜ=$\sqrt{21}$, τότε να υπολογίσετε το μήκος

i) της πλευράς α του τριγώνου Μονάδες 12

ii) του τμήματος ΜΕ Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές β=6, γ=4, $E = 6\sqrt{3}$.

i) Να αποδείξετε ότι $A = 60°$

Μονάδες 10

ii) Να υπολογίσετε το ύψος υ_β Μονάδες 7

iii) Να υπολογίσετε το ύψος υ_α Μονάδες 8

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 3Ο

ΘΕΜΑ 1ο

Α) Έστω ένας κύκλος (O,R) . (3Χ4=12μονάδες)

α. Στον κύκλο (O,R) να εγγράψετε τετράγωνο.

β. Να αποδείξετε ότι $\lambda_4 = R\sqrt{2}$ όπου λ_4 είναι η πλευρά του τετραγώνου .

γ. Να αποδείξετε ότι $a_4 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$, a_4 είναι το απόστημα του τετραγώνου.

Β) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις που ακολουθούν ,γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη ¨**Σωστό**¨ αν η πρόταση είναι **σωστή** και ¨**Λάθος**¨ αν η πρόταση είναι **λάθος** , δίπλα στο **γράμμα** που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο ομοιότητάς τους.

β. Η δύναμη σημείου Ρ ως προς τον κύκλο (O,R) ορίζεται από τον τύπο: $\Delta^{P}_{(O,P)} = OP^2 + R^2$.

γ. Η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών ,αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς.

δ. Ένα τρίγωνο χωρίζεται σε δύο ισεμβαδικά σχήματα από την διχοτόμο μίας γωνίας του. (4Χ3=12μονάδες)

Γ) Πότε δύο πολύγωνα με ίσο αριθμό πλευρών είναι όμοια; (3μονάδες)

ΘΕΜΑ 2^{ο} :

Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α,β,γ τέτοιες ώστε να ισχύει $\beta^2+\gamma^2=3\alpha^2$. Αν η διάμεσος ΑΜ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ στο Ε.

α. Να εκφράσετε τη διάμεσο ΑΜ συναρτήσει της πλευράς α. (12μονάδες)

β. Να αποδείξετε ότι : $AM \cdot AE = \frac{3a^2}{2}$ (13 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3^{ο} :

Αν ΑΒΓΔ ορθογώνιο και Μ τυχαίο σημείο

α. να αποδείξετε ότι $MA^2+M\Gamma^2=MB^2+M\Delta^2$

β. Αν ΑΒΓΔ τετράγωνο και σημείο στο εσωτερικό του ,ώστε ΜΑ =1 ΜΒ=$\sqrt{2}$ και ΜΓ= $\sqrt{3}$ να βρεθεί η πλευρά του τετραγώνου. (9 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4^{ο} :

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με Α=90^{o} με Β= 60^{o} και ΒΓ=4. Με κέντρο το Β και ακτίνα ΒΑ γράφουμε τόξο που τέμνει την ΒΓ στο σημείο Μ και με κέντρο το Γ και ακτίνα ΓΜ γράφουμε τόξο που τέμνει την ΑΓ στο Ν . Να βρεθούν :

Α. Να βρεθεί η θέση του σημείου Μ στην ΒΓ . (15 μονάδες)

Β. Η περίμετρος του μεικτόγραμμου τριγώνου ΑΜΝ. (10 μονάδες)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 4^{Ο}

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α) α) Να εγγραφεί κανονικό εξάγωνο σε κύκλο (O,R) και να αποδείξετε ότι $\lambda_6=R$, όπου λ_6 η πλευρά του εξαγώνου (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha_6=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$, όπου α_6 το απόστημα του εξαγώνου. (Μονάδες 8)

Β) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στη κόλλα σας τη λέξη **ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση

α) Το P είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (O,R), αν και μόνο αν $\Delta^{P}_{(O,R)}>0$, όπου $\Delta^{P}_{(O,R)}$ η δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (O,R).

β) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισοδυναμία $\alpha^2<\beta^2+\gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A}<90^0$.

γ) Το εμβαδόν Ε κάθε τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο $E=\dfrac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu B$.

δ) Το 1^{ο} θεώρημα των διαμέσων σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ εκφράζεται από τον τύπο

$$\beta^2+\gamma^2=2\alpha^2+\frac{\mu_\alpha^2}{2}.$$

ε) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση : $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma$ (Μονάδες 5.2=10)

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Α. Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση για καθένα από τα ερωτήματα A_1 και A_2 (<u>με αιτιολόγηση</u>)

Δίνεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^0$) με ύψος ΑΔ, για το οποίο έχουμε ΒΔ=3 και ΒΓ=4

A_1. Το μήκος του ύψους ΑΔ είναι:

α. 2 β. $\sqrt{3}$ γ. $\sqrt{2}$ δ. $2\sqrt{3}$ (Μονάδες 8)

A_2. Το μήκος της πλευράς ΑΓ είναι

α. $\sqrt{3}$ β. 2 γ. $\sqrt{2}$ δ. 1 (Μονάδες 8)

Β. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=60^o$, $\alpha=5$ και $\gamma=3$.Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 3^o

Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι ΑΒ = 3 , ΒΓ = 6 ΓΑ = 4

α) Να εξεταστεί το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου ΑΜ (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της πλευράς ΑΒ πάνω στην πλευρά ΑΓ

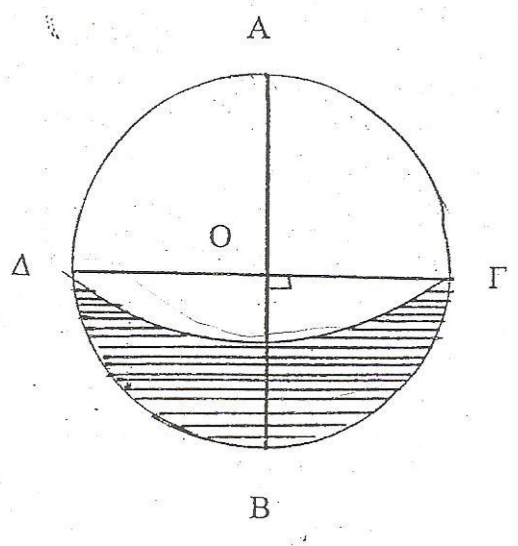
(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4^o

Σε κύκλο (O, R) φέρουμε δυο κάθετες διαμέτρους ΑΒ και ΓΔ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΓ γράφουμε μέσα στο κύκλο το τόξο ΓΔ. Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R

α) την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου μηνίσκου (Μονάδες 11)

β) το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μηνίσκου (Μονάδες 14)



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 5$^{\text{Ο}}$

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι ίσο με το ημιγινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος . Μονάδες 13

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

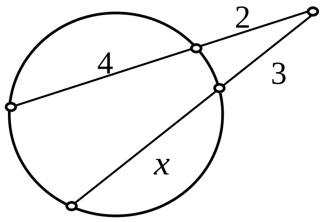
α. Το εμβαδόν ενός τραπεζίου είναι ίσο με $\text{E} = \frac{\text{B} \cdot \beta}{2} \cdot \upsilon$. Μονάδες 3

β. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{4}$. Μονάδες 3

γ. Η δύναμη σημείου Ρ ως προς κύκλο (O, R) δίνεται από τον τύπο $\Delta^{\text{P}}_{(\text{O},R)} = \delta^2 - R^2$.

Μονάδες 3

δ. Στο διπλανό σχήμα , $x = \frac{8}{3}$.



Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Οι πλευρές ενός τριγώνου ΑΒΓ έχουν μήκη $\text{AB} = 9cm$, $\text{B}\Gamma = 7cm$ και $\text{A}\Gamma = 12cm$.

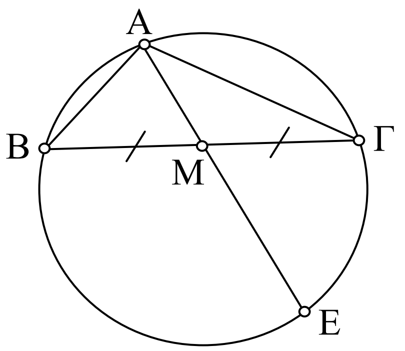
1. Να βρεθεί το είδος του τριγώνου . Μονάδες 7
2. Να υπολογιστεί το μήκος της προβολής της ΒΓ πάνω στην ΑΒ . Μονάδες 6
3. Να υπολογιστεί το μήκος της διαμέσου μ_α . Μονάδες 6
4. Να υπολογιστεί το ύψος υ_γ . Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3$^{\text{ο}}$

Αν οι διάμεσοι ΑΔ και ΒΕ τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο Θ , να αποδείξετε ότι :

1. $(\text{ABE}) = (\text{BE}\Gamma)$.**Μονάδες 9** **2.** $(\text{A}\Theta\text{B}) = (\Delta\Gamma\text{E}\Theta)$.**Μονάδες 8**

3. $(\text{B}\Theta\Delta) = (\text{A}\Theta\text{E})$.**Μονάδες 8**



ΘΕΜΑ 4ο

Αν η διάμεσος ΑΜ ενός τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο Ε και ισχύει $\beta^2+\gamma^2=2\alpha^2$, να αποδείξετε ότι :

1. $\mathrm{AM}\cdot\mathrm{ME}=\dfrac{\mathrm{B\Gamma}^2}{4}$. **Μονάδες 8**

2. $\mathrm{ME}=\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{6}$. Μονάδες 8

3. $\alpha^2=\mathrm{AM}\cdot\mathrm{AE}$. Μονάδες 9

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 6$^{\text{Ο}}$

ΘΕΜΑ 1$^{\text{ο}}$

Α. Να αποδείξετε ότι αν οι προεκτάσεις δύο χορδών ΑΒ, ΓΔ ενός κύκλου τέμνονται σένα σημείο Ρ, τότε ισχύει: ΡΑ.ΡΒ=ΡΓ.ΡΔ. Μονάδες 10

Β. Να διατυπώσετε το 2$^{\text{ο}}$ Θεώρημα των διαμέσων. Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη σωστό (Σ) ή λάθος(Λ) δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση. Μονάδες 10

i. Ένα τρίγωνο χωρίζεται από ένα ύψος του σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα.

ii. Η σχέση που συνδέει τα στοιχεία α_ν και λ_ν(αποστήματος και πλευράς κανονικού ν-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι: $\dfrac{\alpha^2_{\ \nu}}{2}+\lambda^2_{\ \nu}=R^2$

iii. Αν το σημείο Ρ είναι εξωτερικό του κύκλου (Ο,R) και ΡΕ εφαπτόμενο τμήμα τότε ισχύει: ΡΕ^2=$\Delta^{\mathrm{P}}(\mathrm{O},R)$.

iv.Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\alpha^2+\gamma^2=2\mu^2_\beta+\dfrac{\beta^2}{2}$.

v. Δύο πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

ΘΕΜΑ 2^o

Οι πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ είναι α=7, β=5 και γ=$4\sqrt{2}$.

(i) Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι οξυγώνιο Μονάδες 9

(ii) Να υπολογισθεί η προβολή ΔΓ της πλευράς β πάνω στη πλευρά α. Μονάδες 8

(iii) Να υπολογισθεί το μήκος του ύψους ΑΔ. Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3^o

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι: Α=90^o, ΑΒ=8, ΒΔ=10,ΔΓ=5 ,όπου ΑΔ το ύψος του ΑΒΓ.

και ΔΕ διχοτόμος της $B\hat{\Delta}\Gamma$.

i.Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ Μονάδες 8

ii.Να αποδείξετε ότι (ΒΔΕ)=2(ΔΕΓ) Μονάδες 8

iii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΓ. Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4^o

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R και το ύψος του ΒΒ΄ που τέμνει τον κύκλο στο Ε.

i) Να δείξετε ότι ΕΒ΄=$\frac{1}{4}$ΕΒ. Μονάδες 8

ii) Να δείξετε ότι 3(ΒΔΓ)=(ΑΒΓ), όπου Δ το μέσο του τόξου ΒΓ. Μονάδες 8

iii) Να βρεθεί το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που ορίζεται από τη χορδή ΒΔ και το κυρτογώνιο τόξο ΒΔ . Μονάδες 9

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 7^{O}

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι: Αν οι προεκτάσεις δύο χορδών ΑΒ και ΓΔ ενός κύκλου (O,R) τέμνονται σε ένα σημείο Ρ, τότε ισχύει $ΡΑ\cdot ΡΒ = ΡΓ\cdot ΡΔ$. **Μονάδες 10**

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Το εμβαδόν ενός τραπεζίου είναι ίσο με το ημιγινόμενο της διαμέσου επί το ύψος του τραπεζίου.

β. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, τότε το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.

γ. Αν η δύναμη σημείου Μ ως προς τον κύκλο (O,R) είναι θετικός αριθμός, τότε το σημείο Μ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου.

δ. Ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων τρίγωνων είναι ίσος με το λόγο ομοιότητας τους.

ε. Έστω ΑΒΓ ορθογώνιο τρίγωνο με $\hat{A} = 90^o$ και ΑΔ ύψος του. Τότε ισχύει $ΑΔ^2 = ΒΔ\cdot ΔΓ$.

Μονάδες 5x3=15

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται τρίγωνο με $ΑΒ = 6$, $ΑΓ = 8$ και $\hat{A} = 60^o$. **Μονάδες 9+8+8=25**

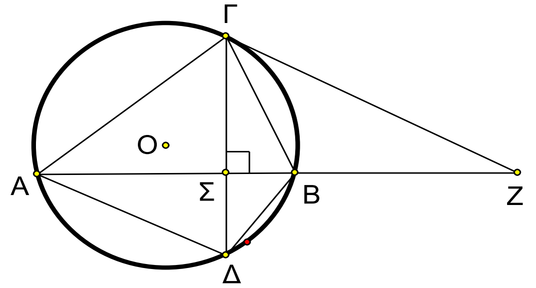
1. Να αποδείξετε ότι $ΒΓ = \sqrt{52}$.

2. Υπολογίστε την διάμεσο ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ.

3. Υπολογίστε την προβολή της διαμέσου ΑΜ στη ΒΓ.

ΘΕΜΑ 3^o

Σε κύκλο (O,R) θεωρούμε δύο **κάθετες** χορδές ΑΒ και ΓΔ οι οποίες τέμνονται στο Σ με $ΣΑ = 8$, $ΣΒ = 3$ και $ΣΔ = 4$.



1. Να αποδείξετε ότι $ΣΓ = 6$.

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΓΒΔ.

3. Αν η εφαπτομένη του κύκλου στο Γ τέμνει

την ευθεία AB στο σημείο Z και $(\Gamma BZ)=27$, να αποδείξετε ότι $Z\Gamma = 6\sqrt{5}$.

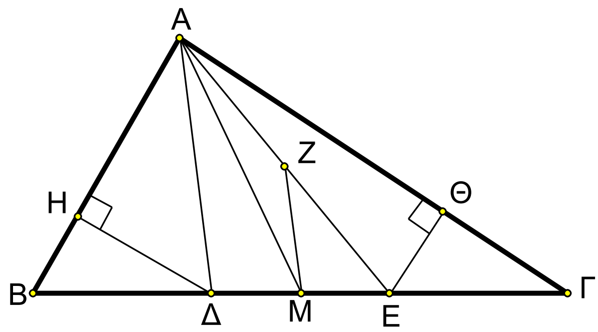
Μονάδες 6+7+12=25

ΘΕΜΑ 4ο

Στη πλευρά $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε σημεία Δ, E ώστε $B\Delta = \Delta E = E\Gamma$.

1. Να αποδείξετε ότι

$$(AB\Delta) = (A\Delta E) = (AE\Gamma) = \frac{1}{3}(AB\Gamma).$$



2. Αν H η προβολή του Δ στη AB και Θ η προβολή του E στην $A\Gamma$, να αποδείξετε ότι $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{\Theta E}{\Delta H}$.

3. Αν M μέσο της $B\Gamma$ και Z μέσο της AE να αποδειχθεί ότι $(AB\Gamma) = 12(MZE)$.

Μονάδες 8+8+9=25

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 8^{Ο}

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α. Να δείξετε ότι αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δυο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Μονάδες 10

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση. Μονάδες 10

1. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$ είναι αμβλυγώνιο.
2. Η δύναμη κάθε σημείου του επιπέδου ως προς κύκλο(Ο,ρ) είναι πάντα θετικός αριθμός.
3. Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του επί το ύψος του.

4. **4.** Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο της ομοιότητας.
5. **5.** Η πλευρά ενός κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο,R) είναι $\lambda_6 = R\sqrt{3}$

Γ. . Ποιο πολύγωνο λέγεται κανονικό; Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Κανονικό πολύγωνο έχει ακτίνα $R=8cm$ και πλευρά $\lambda_\nu = 8\sqrt{2}$.Να βρείτε:

i. Το πλήθος των πλευρών του. Μονάδες 8

ii. Το απόστημά του . Μονάδες 8

iii. Το εμβαδόν του. Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\alpha=5$, $\gamma=3$ και $\mu_\beta = \dfrac{\sqrt{19}}{2}$. μονάδες 12+13=25

i. Να βρείτε την πλευρά β και το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

ii. Να υπολογίσετε την γωνία B και την προβολή της διαμέσου μ_α στην πλευρά α .

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α=4. Φέρουμε την εξωτερική διχοτόμο Γ_X και την κάθετο ΑΜ στην Γ_X.

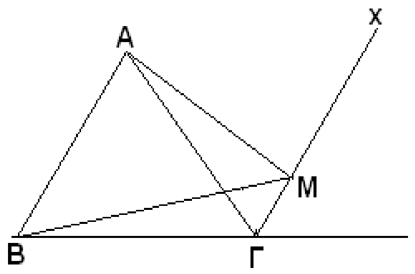
Να αποδείξετε ότι:

i) (ΑΓΜ) = $2\sqrt{3}$ τ.μ.

ii) (ΑΒΓ) = 2(ΑΓΜ)

iii)(ΒΓΜ) = (ΑΓΜ)

μονάδες: 8+8+9=25



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 9^{O}

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι: σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα. **Μονάδες 10**

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η γωνία φ_ν ενός κανονικού ν-γώνου δίνεται από τον τύπο $\hat{\varphi}_\nu = \dfrac{360^0}{\nu}$.

β. Αν Κ σημείο του κύκλου $\left(\mathrm{O},R\right)$ τότε $\Delta^{K}_{(O,R)} = 0$.

γ. Για την πλευρά λ_3 ισόπλευρου τριγώνου εγγε-γραμμένου σε κύκλο ακτίνας R ισχύει $\lambda_3 = R\sqrt{3}$.

δ. Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μιας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

ε. Το εμβαδόν ενός τετραπλεύρου με κάθετες δια- γωνίους ισούται με το γινόμενο των διαγωνίων του. **Μονάδες 5x2=10**

Γ. Τι λέγεται κανονικό πολύγωνο; **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ 2ο

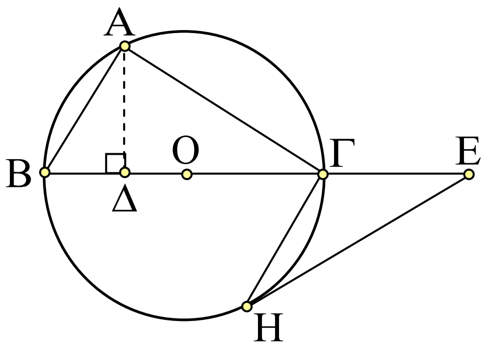
Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου **ΑΒΓ** είναι **ΑΒ=6, ΒΓ=12, ΓΑ=8.**

1. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο αυτό είναι αμβλυγώνιο.
2. Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου **ΑΜ.**
3. Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της διαμέσου **ΑΜ** στην πλευρά **ΒΓ**.

Μονάδες 7+9+9=25

ΘΕΜΑ 3ο

Στο διπλανό σχήμα η $ΒΓ$ είναι διάμετρος του κύκλου (O,R), $ΑΒ=6$ και $(ΑΒΓ)=24$.



1. Να αποδείξετε ότι $R=5$.

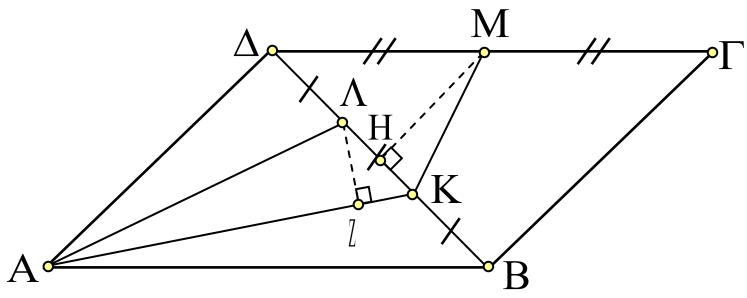
2. Να υπολογίσετε το ύψος $ΑΔ$.

3. Αν $Ε$ σημείο στην προέκταση του $ΒΓ$, ώστε το εφαπτόμενο τμήμα $ΕΗ=R\sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι $ΓΕ=R$.

4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $(ΓΗΕ)$. **Μονάδες 8+6+5+6=25**

ΘΕΜΑ 4ο

Στη διαγώνιο $ΒΔ$ παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$ θεωρούμε τα σημεία $Κ$ και $Λ$ ώστε $ΒΚ=ΚΛ=ΛΔ$, και έστω $Μ$ το μέσο της $ΓΔ$.



1. Να αποδείξετε ότι

$$(ΑΚΒ)=(ΚΜΔ)=\frac{1}{6}(ΑΒΓΔ).$$

2. Να αποδείξετε ότι $(ΚΒΓΜ)=\frac{1}{3}(ΑΒΓΔ)$.

3. Αν $ΛΖ\perp ΑΚ$ και $ΜΗ\perp ΒΔ$, να αποδείξετε ότι $ΑΚ\cdot ΛΖ=ΚΔ\cdot ΜΗ$.

Μονάδες 10+9+6=25

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 10ο

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα. **Μονάδες 10**

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i. Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του.

ii. Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο ομοιότητας τους.

iii. Η γωνία ενός κανονικού ν-γώνου δίνεται από τον τύπο $\phi_\nu = 180^o - \frac{360^o}{\nu}$

iv. Η σχέση που συνδέει τα στοιχεία α_ν και λ_ν(αποστήματος και πλευράς κανονικού ν-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι: $\frac{\alpha^2{}_\nu}{2} + \lambda^2{}_\nu = R^2$

v. Η πλευρά ενός κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο,R) είναι λ_6=R$\sqrt{3}$ Μονάδες 10

Γ. Τι λέγεται δύναμη του σημείου Ρ ως προς τον κύκλο $\left(\mathrm{O},R\right)$; Αν $\Delta^{\mathrm{P}}_{\left(\mathrm{O},R\right)}$ είναι θετική , αρνητική ή μηδέν ποια είναι τη θέση του Ρ ως προς τον κύκλο $\left(\mathrm{O},R\right)$ . .

Μονάδες 5

<u>ΘΕΜΑ 2ο</u>

Δίνετε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με γ =6, διάμεσο ΑΜ $=4\sqrt{2}$ και γωνία $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{M}$=45ο. Να υπολογίσετε:

i. Την πλευρά α Μονάδες 9

ii. Την πλευρά β Μονάδες 8

iii. Την προβολή της διαμέσου ΑΜ στην πλευρά ΒΓ. Μονάδες 8

<u>ΘΕΜΑ 3ο</u>

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{\mathrm{A}}=90^o)$ με ΑΒ =9 και ΑΓ =12.

Κατασκευάζουμε έξω από αυτό ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΔ.

i. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 9

ii. Να δείξετε ότι (ΑΒΓ) =2(ΔΑΓ). Μονάδες 8

iii. Να δείξετε ότι (ΔΒΓ) – (ΔΑΓ) =(ΔΑΒ) Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R), του οποίου η πλευρά ΑΒ είναι ίση με την πλευρά του εγγεγραμμένου, στον κύκλο τετραγώνου και η ΑΓ είναι ίση με την πλευρά του εγγεγραμμένου ισοπλεύρου τριγώνου. Αν Δ είναι το σημείο στο οποίο το ύψος ΑΗ του τριγώνου τέμνει τον κύκλο, να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R:

i. Τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. **Μονάδες 9**

ii. Το ύψος ΑΗ και τις πλευρές του ΑΒΓ. **Μονάδες 12**

iii. **Το ΗΔ** **Μονάδες 4**

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 11Ο

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε να αποδείξετε ότι ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. **(Μονάδες 11)**

Β. Να γίνει η αντιστοίχηση κάθε στοιχείου της στήλης Α με ένα στοιχείο της στήλης Β.

Δύναμη σημείου ως προς κύκλο	Θέση σημείου ως προς κύκλο
1. 0	Α. Εσωτερικό του κύκλου
2. Θετικός αριθμός	Β. Εξωτερικό του κύκλου
3. $-R^2$	Γ. Πάνω στον κύκλο
4. Αρνητικός αριθμός	Δ. Στο κέντρο του κύκλου

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Ο λόγος του εμβαδού ενός κυκλικού δίσκου προς το μήκος του κύκλου ισούται με το $\frac{1}{4}$ της διαμέτρου. **(Μονάδες 2)**

β) Η γωνία $\hat{\phi}$ κανονικού ν-γώνου είναι $\hat{\phi}=180^o-\frac{360^o}{\nu}$ **(Μονάδες 2)** γ) Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια , τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο ομοιότητάς τους. **(Μονάδες 2)**

δ) Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} > 90^o$. Τότε ισχύει ότι : $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$ **(Μονάδες 2)**

ε) Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\alpha \cdot \beta \cdot \sigma\upsilon\nu\Gamma$ **(Μονάδες 2)**

<u>ΘΕΜΑ 2^o</u>

Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται $A\Gamma = 5$, $AB = 3$ και $AM = \frac{7}{2}$, όπου ΑΜ η διάμεσος του τριγώνου που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΓ.

Α. Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΒΓ **(Μονάδες 8)**

Β. Να βρείτε το είδος του τριγώνου **(Μονάδες 8)**

Γ. Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\hat{A}$. **(Μονάδες 9)**

<u>ΘΕΜΑ 3^o</u>

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΔ∥ΒΓ) με : ΑΒ = 13 , ΔΓ = 15 , ΑΔ = 11 , ΒΓ = 25.

Από το Γ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Ε.

α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΔΓΕ είναι ίσο με 84 τ.μ. **(Μονάδες 8)**

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ. **(Μονάδες 8)**

γ) Αν Κ το μέσο της ΑΒ και Λ το μέσο της διαγώνιου ΒΔ, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΚΛΒ **(Μονάδες 9)**

<u>ΘΕΜΑ 4^O</u>

Δίνεται κύκλος (0,R) και τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο στον κύκλο , με ΒΓ διάμετρο. Φέρνουμε το ύψος ΑΔ.

α) Αν ΑΒ = 6 και (ΑΒΓ) = 24 , να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ΒΓ , ΒΔ , ΑΔ. **(Μονάδες 9)**

β) Αν προεκτείνουμε την ΒΓ προς το μέρος του Γ και πάρουμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΓΕ = R και ΕΗ είναι το εφαπτόμενο τμήμα από το Ε προς τον κύκλο, να αποδείξετε ότι $EH = \lambda_3$. **(Μονάδες 8)**

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΓΕΗ. **(Μονάδες 8)**

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 12^{Ο}

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών τριγώνου είναι ίσο με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών , αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς .

Μονάδες 11

Β. *Να γράψετε στην κόλλα σας τα γράμματα της στήλης* **Α** *και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της στήλης* **Β** *που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
Δύναμη σημείου P	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ
α) $\Delta^{P}_{(O,R)} > 0$	1) Το P είναι σημείο του κύκλου (O,R)
β) $\Delta^{P}_{(O,R)} = 0$	2) Το P είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (O,R)
γ) $\Delta^{P}_{(O,R)} < 0$	3) Το P είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (O,R)

Μονάδες 6

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Το απόστημα ενός κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο(O,R) είναι ίσο με $\frac{R}{2}$.

Μονάδες 2

β. Το εμβαδόν τραπεζίου ύψους υ και μήκος διαμέσου δ δίνεται από τον τύπο $E = \delta \cdot \upsilon$.

Μονάδες 2

γ. Αν ΑΒΓ ορθογώνιο τρίγωνο με $\hat{A} = 90^o$ τότε $\beta^2 < \alpha^2 + \gamma^2$.

Μονάδες 2

δ. Σε κύκλο (O,R) το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα μ^o δίνεται από τον τύπο $E = \frac{\pi R \mu}{360}$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται κανονικό ν-γωνο με κεντρική γωνία $\hat{\omega}_\nu = 60^o$ εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας $R = 2$.

Α. Να βρείτε το πλήθος ν των πλευρών, την πλευρά λ_ν, το απόστημα α_ν και τη γωνία $\hat{\varphi}_\nu$ του ν -γώνου.

Μονάδες 9

Β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ν -γώνου.

Μονάδες 8

Γ. Να υπολογίσετε το μήκος του εγγεγραμμένου κύκλου στο ν-γωνο.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται κύκλος (O,R) και μία χορδή του $AB=\lambda_3$. Στα άκρα Α και Β της χορδής φέρνουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου, που τέμνονται στο σημείο Γ.

Α. Να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 8

Β. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΟΒΓΑ συναρτήσει του R.

Μονάδες 8

Γ. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει του R.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R). Η προέκταση της διαμέσου ΑΜ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο Δ. Αν $AM=5$, $M\Delta=1$ και $R=\sqrt{10}$:

Α. Να αποδείξετε ότι $B\Gamma=2\sqrt{5}$.

Μονάδες 6

Β. Να αποδείξετε το τρίγωνο ΒΟΓ είναι ορθογώνιο και ότι $B\hat{A}\Gamma=45^o$.

Μονάδες 6

Γ. Να αποδείξετε ότι $AB^2+A\Gamma^2=60$.

Μονάδες 8

Δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 5

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 13^{Ο}

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α. Να αποδείξετε ότι η πλευρά και το απόστημα τετραγώνου εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R) δίνονται αντίστοιχα από τους τύπους

$\lambda_4 = R\sqrt{2}$ και $\alpha_4 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$ **(Μονάδες 17)**

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Η δύναμη του σημείου Ρ ως προς τον κύκλο (Ο, R) ορίζεται με τον τύπο:
$\Delta^{\mathrm{P}}_{(\mathrm{O},R)} = R^2 + \mathrm{OP}^2$.

β) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ ισχύει η σχέση $\beta^2 > \gamma^2 + \alpha^2$ τότε η γωνία Β είναι οξεία.

γ) Η γωνία φ_ν ενός κανονικού ν-γώνου και η κεντρική του γωνία ω_ν είναι παραπληρωματικές.

δ) Αν δυο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας **λ** τότε ισχύει
$\dfrac{(\mathrm{AB\Gamma})}{(\mathrm{A'B'\Gamma'})} = \lambda$. **(Μονάδες 4)**

Γ. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β**, έτσι ώστε να προκύπτει ισότητα.

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) και ΑΔ το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
α. AB^2	**1.** $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2$
β. $\mathrm{A\Gamma}^2$	**2.** $\mathrm{B\Delta} \cdot \Delta\Gamma$
γ. $\mathrm{A\Delta}^2$	**3.** $\mathrm{B\Gamma} \cdot \mathrm{A\Delta}$
δ. $\mathrm{B\Gamma}^2$	**4.** $\mathrm{B\Gamma} \cdot \mathrm{B\Delta}$

	5. $B\Gamma^2 - AB^2$
	6. $AB \cdot B\Gamma$

(Μονάδες 4)

<u>ΘΕΜΑ 2°</u>

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές β=2, γ=8 και $\hat{A} = 60^o$.

Α. Να υπολογίσετε την πλευρά α του τριγώνου ΑΒΓ. **(Μονάδες 12)**

Β. α) Να υπολογίσετε την πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου που είναι ισοδύναμο με το ΑΒΓ. **(Μονάδες 7)**

β) Να υπολογίσετε το ύψος του ισοπλεύρου τριγώνου του ερωτήματος **(α)**.

(Μονάδες 6)

<u>ΘΕΜΑ 3°</u>

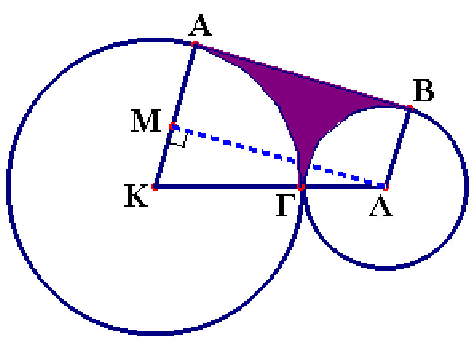
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών α=3, β=6 και μήκος διαμέσου από την κορυφή Γ $\mu_\gamma = \frac{\sqrt{41}}{2}$. Τότε:

α) Να αποδείξετε ότι **γ = 7**. **(Μονάδες 8)**

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.**(Μονάδες 8)**

γ) Να υπολογίσετε την προβολή της διαμέσου μ_γ πάνω στην πλευρά γ. **(Μονάδες 9)**

<u>ΘΕΜΑ 4°</u>



Στο διπλανό σχήμα , οι κύκλοι (Κ,3R) και (Λ,R), εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Γ και το τμήμα ΑΒ είναι εφαπτόμενο και στους δύο κύκλους. Αν το τμήμα ΛΜ είναι κάθετο στην ακτίνα ΚΑ

α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{AK\Gamma} = 60^o$ και $\widehat{B\Lambda\Gamma} = 120^o$. **(Μονάδες 6)**

β) Να αποδείξετε ότι $\Lambda M = AB = 2R\sqrt{3}$. **(Μονάδες 6)**

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΚΛΒ είναι : $(AK\Lambda B) = 4R^2\sqrt{3}$.

(Μονάδες 6)

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν Ε του μικτόγραμμου σκιασμένου χωρίου ΑΓΒ.

<u>ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 14^{Ο}</u>

<u>ΘΕΜΑ 1ο</u>

Α. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του , είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

(Μονάδες 13)

Β. Ποιο πολύγωνο ονομάζεται κανονικό ;

(Μονάδες 6)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος ,** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α Το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ με πλευρές α, β , γ ισούται με $\frac{\alpha\beta\gamma}{4\rho}$ όπου ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ .

(Μονάδες 1)

β. Το εμβαδόν κάθε τριγώνου ισούται με : $\frac{1}{2}\alpha\beta\cdot\eta\mu\Gamma$ **(Μονάδες 1)**

γ. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α,β,γ ισχύει : $\alpha^2 > \beta^2 - \gamma^2$ τότε $\hat{B} < 90°$.

(Μονάδες 1)

Δ. Να αντιστοιχίσετε κάθε γράμμα της στήλης **Α** , με ένα αριθμό της στήλης **Β**

Στήλη Α	Στήλη Β
α. Εμβαδόν κυκλικού δίσκου ακτίνας R	**1.** $\frac{\pi R^2\mu}{180}$
β. Εμβαδόν κυκλικού τομέα μ° και ακτίνας R	**2.** πR^2
γ. Μήκος κύκλου ακτίνας R.	**3.** $2\pi R$
	4. $\frac{\pi R^2\mu}{360}$

(Μονάδες 3)

<u>ΘΕΜΑ2ο</u>

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α = 8 cm , β = 9 cm και γ = 3 cm.

Α. Να βρεθεί το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις γωνίες του .

(Μονάδες 5)

Β. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ . **(Μονάδες 6)**

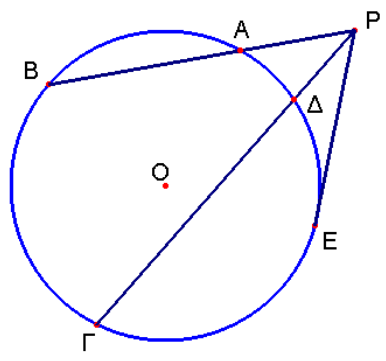
Γ. Να υπολογιστεί η διάμεσος μ_γ του τριγώνου ΑΒΓ . **(Μονάδες 7)**

Δ. Να υπολογιστεί η προβολή της πλευράς β πάνω στη πλευρά γ του τριγώνου ΑΒΓ .

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ3ο

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται: $PA = 4$, $P\Delta = 2$, $P\Gamma = 18$.



Αν το τμήμα PE είναι εφαπτόμενο του κύκλου $(O, \sqrt{13}\ )$

να βρείτε:

α. Το μήκος του τμήματος PB. **(Μονάδες 7)**

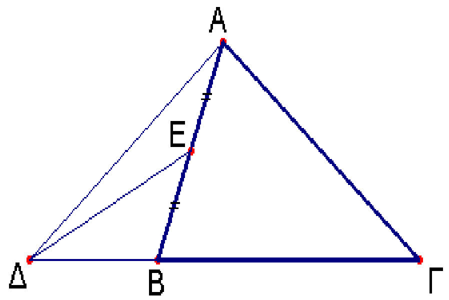
β. Το μήκος του εφαπτόμενου στο κύκλο τμήματος PE.**(Μονάδες 6)**

γ. Τη δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (O, R)**(Μονάδες 6)**

δ. Το μήκος του τμήματος PO. **(Μονάδες 6)**

ΘΕΜΑ 4ο

Στο διπλανό σχήμα δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ και Ε το μέσον της πλευράς AB. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ προς το Β κατά τμήμα $B\Delta = \dfrac{B\Gamma}{2}$ και φέρνουμε την ΑΔ .



α. Να αποδείξετε ότι : $(\Delta EB) = \dfrac{1}{2}(AB\Delta)$. **(Μονάδες 7)**

β. Να βρείτε τους λόγους των εμβαδών : $\dfrac{(\Delta EB)}{(AB\Gamma)}$ και $\dfrac{(AB\Gamma)}{(A\Delta\Gamma)}$

(Μονάδες 9)

γ. Αν ΑΜ η διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι : $(B\Delta E) = (AME)$ **(Μονάδες 9)**

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 15ο

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν για τις γωνίες Α και Α΄ δύο τριγώνων ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ ισχύει $\hat{A} = \hat{A}'$ ή $\hat{A} + \hat{A}' = 180^o$, τότε να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha' \cdot \beta'}$$ **(Μονάδες 15)**

Β. Να διατυπώσετε το Πυθαγόρειο θεώρημα. **(Μονάδες 6)**

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Η πλευρά λ_6 και το απόστημα α_6 κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R) δίνονται από τους τύπους: $\lambda_6 = R$ και $\alpha_6 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

β) Το εμβαδόν Ε κάθε τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο $:\mathrm{E}=\frac{1}{2}\alpha\beta\cdot\eta\mu\mathrm{B}$.

γ) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ ισχύει η σχέση $\beta^2<\gamma^2+\alpha^2$ τότε η γωνία Β είναι αμβλεία.

δ) Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ($\hat{\mathrm{A}}=90^o$) όπου ΑΔ το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ισχύει: $\mathrm{A\Delta}^2=\Delta\Gamma\cdot\Delta\mathrm{B}$ **(Μονάδες 4)**

ΘΕΜΑ 2$^{\mathrm{O}}$

Οι πλευρές ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι : $\mathrm{AB}=6$, $\mathrm{B\Gamma}=12$ και $\mathrm{A\Gamma}=8$.

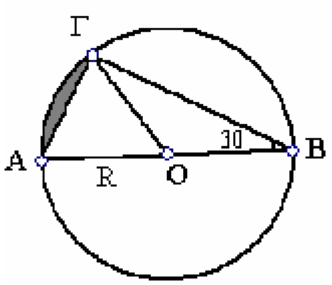
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο .**(Μονάδες 8)**

β) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΑΜ. **(Μονάδες 8)**

γ) Να βρείτε το μήκος της προβολής της διαμέσου ΑΜ , πάνω στην πλευρά ΒΓ.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 3$^{\mathrm{o}}$



Δίνεται κύκλος (Ο,R) , μια διάμετρός του ΑΒ και σημείο Γ της περιφέρειάς του τέτοιο ώστε $\mathrm{O}\hat{\mathrm{B}}\Gamma=30^o$.:

α) Να αποδείξετε ότι ΑΓ=R και $\mathrm{B\Gamma}=R\sqrt{3}$. **(Μονάδες 6)**

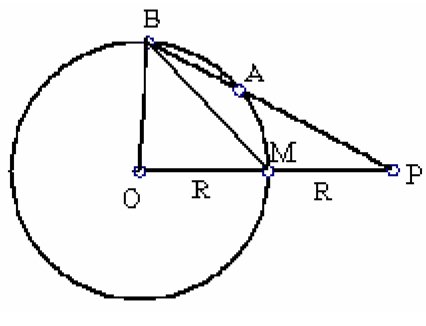
β) Να υπολογίσετε τα εμβαδά των τριγώνων (ΑΒΓ) και (ΟΓΑ) συναρτήσει της ακτίνας R του κύκλου (Ο,R). **(Μονάδες 6)**

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν και το μήκος του κύκλου (Ο,R) συναρτήσει της ακτίνας R . **(Μονάδες 6)**

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου κυκλικού τμήματος συναρτήσει της ακτίνας R. **(Μονάδες 7)**

ΘΕΜΑ 4$^{\mathrm{o}}$

Σε κύκλο (Ο, R) θεωρούμε σημείο Ρ εκτός αυτού τέτοιο ώστε ΟΡ=2R.



α) Να αποδείξετε ότι $(\mathrm{BMP})=\frac{(\mathrm{OPB})}{2}$ **(Μονάδες 6)**

β) Να εκφράσετε τη δύναμη του σημείου Ρ ως προς τον κύκλο (Ο, R) συναρτήσει του R.

(Μονάδες 6)

γ) Αν $\Delta^{\mathrm{P}}_{(\mathrm{O},R)} = 27$ να βρείτε την ακτίνα R του κύκλου. **(Μονάδες 6)**

δ) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{AB} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$. **(Μονάδες 7)**

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 16$^{\mathrm{O}}$

ΘΕΜΑ 1$^{\mathrm{o}}$

Α. Να αποδείξετε ότι η πλευρά και το απόστημα τετραγώνου εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) δίνονται αντίστοιχα από τους τύπους

$\lambda_4 = R\sqrt{2}$ και $\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ **(Μονάδες 12)**

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Η δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (O, R) ορίζεται με τον τύπο: $\Delta^{\mathrm{P}}_{(\mathrm{O},R)} = R^2 + \mathrm{OP}^2$.

β) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ ισχύει η σχέση $\beta^2 > \gamma^2 + \alpha^2$ τότε η γωνία Β είναι οξεία.

γ) Η γωνία φ_ν ενός κανονικού ν-γώνου και η κεντρική του γωνία ω_ν είναι παραπληρωματικές.

δ) Αν δυο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας **λ** τότε ισχύει $\frac{(\mathrm{AB\Gamma})}{(\mathrm{A'B'\Gamma'})} = \lambda$. **(Μονάδες 8)**

Γ. Να διατυπώσετε το Πυθαγόρειο θεώρημα. **(Μονάδες 5)**

ΘΕΜΑ 2$^{\mathrm{o}}$

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α=$\sqrt{68}$, β=4 και γ=6..

α) Να βρείτε το είδος της γωνίας $\hat{\Gamma}$. **(Μονάδες 5)**

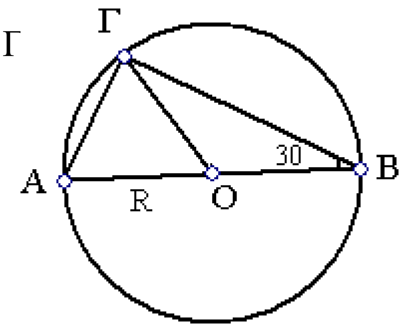
β) Να βρεθεί το είδος του ως προς τις γωνίες του. **(Μονάδες 5)**

γ) Να υπολογίσετε τη διάμεσο ΑΜ που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΓ. **(Μονάδες 7)**

δ) Να αποδείξετε ότι η προβολή της διαμέσου ΑΜ πάνω στη πλευρά ΒΓ ισούται με

$\Delta M = \dfrac{5\sqrt{17}}{17}$ **(Μονάδες 8)**

<u>ΘΕΜΑ 3ο</u>



Δίνεται κύκλος (Ο,R) , μια διάμετρός του ΑΒ και σημείο Γ της περιφέρειάς του τέτοιο ώστε $O\hat{B}\Gamma = 30^o$.

Να υπολογίσετε συναρτήσει του R:

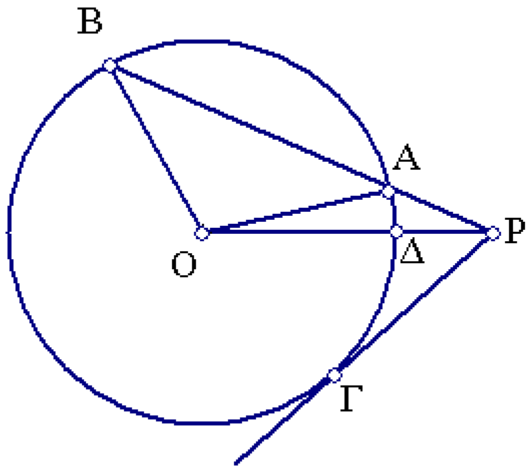
α) Τα μήκη των τμημάτων ΑΓ και ΒΓ. **(Μονάδες 8)**

β) Τα εμβαδά των τριγώνων (ΑΒΓ) και (ΟΓΑ).

(Μονάδες 8)

γ) Το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου κυκλικού τμήματος **τ**. **(Μονάδες 9)**

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u>



Στο διπλανό σχήμα, δίνεται κύκλος (O,R). Έστω Ρ εξωτερικό σημείο του τέτοιο ώστε $P\Delta = \dfrac{R}{2}$, ΡΑΒ τέμνουσα τέτοια ώστε να ισχύει ΡΒ=4ΡΑ και ΡΓ εφαπτομένη του.

α) Να αποδείξετε ότι η δύναμη του σημείου Ρ ως προς τον κύκλο ισούται με $\Delta^{P}_{(O,R)} = \dfrac{5R^2}{4}$

(Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε τη χορδή ΑΒ και την εφαπτομένη ΡΓ συναρτήσει της ακτίνας R.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών $\dfrac{(OAB)}{(POB)}$. **(Μονάδες 6)**

δ)Αν R=4 να υπολογίσετε την προβολή της πλευράς ΟΒ πάνω στην ΟΡ.(**Μονάδες 5)**

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 18^{Ο}

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α. Να αποδείξετε το Πυθαγόρειο Θεώρημα σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^0$

(Μονάδες 13)

Β. Να ορίσετε τη δύναμη σημείου Ρ ως προς κύκλο (Ο , R) . Πότε είναι αρνητική ;

(Μονάδες 6)

Γ. Να γραφούν οι τύποι που δίνουν την πλευρά και το απόστημα κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο , R) σε σχέση με την ακτίνα R του κύκλου .

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι α = 4cm , β = 7cm και $\Gamma = 60^0$

α) Να υπολογιστεί η πλευρά γ και να βρεθεί το είδος του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν (ΑΒΓ) του τριγώνου είναι $7\sqrt{3}$ **cm^2 .**

(Μονάδες 5)

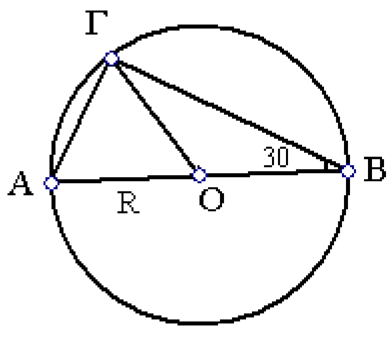
γ) Να βρεθούν οι ακτίνες του περιγεγραμμένου και του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου .

(Μονάδες 6)

δ) Να βρεθεί το μήκος της διαμέσου μ_α

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 3^{ο}



Δίνεται κύκλος (Ο,R) , μια διάμετρός του ΑΒ και σημείο της περιφέρειάς του τέτοιο ώστε $O\hat{B}\Gamma = 30^o$.
Να υπολογίσετε συναρτήσει του R:

α) Τα μήκη των τμημάτων ΑΓ και ΒΓ.

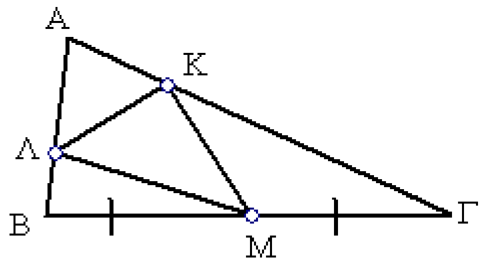
(Μονάδες 8)

β) Τα εμβαδά των τριγώνων (ΑΒΓ) και (ΟΓΑ).

(Μονάδες 8)

γ) Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου κυκλικού τμήματος **τ**. **(Μονάδες 9)**

ΘΕΜΑ 4^{ο}



Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ όπου Μ μέσο της ΒΓ και σημεία Κ

αντίστοιχα των ΑΓ ,ΑΒ τέτοια ώστε $AK = \frac{1}{3}A\Gamma$ και

$ΑΛ = \frac{2}{3}ΑΒ$.

α) Να αποδείξετε ότι: $(ΑΛΚ) = \frac{2}{9}(ΑΒΓ)$. **(Μονάδες 8)**

β) Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{(ΚΓΜ)}{(ΑΒΓ)}$ και $\frac{(ΛΒΜ)}{(ΑΒΓ)}$. **(Μονάδες 8)**

γ) Να αποδείξετε ότι $(ΚΛΜ) = \frac{5}{18}(ΑΒΓ)$. **(Μονάδες 9)**