ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ-ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. α) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις α>e , 0<α<e . Βρίσκουμε

g(x)= e^3lnα·f(x)= $\begin{cases} (x^2-1)\ln\alpha, \alpha \in (0,e) \\ e^3\alpha\ln\alpha \cdot x, \alpha > e \end{cases}$.Για την περίπτωση α>e η g δεν έχει ακρότατα , οπότε πρέπει 0<α<e και g(x)=(x^2-1)lnα .

- Αν α∈ (0 , 1) τότε lnα <0 και η g έχει μέγιστο οπότε α∉ (0 , 1) .
- Αν α=1 τότε g(x)=0 και η g έχει ελάχιστο το 0 .
- Αν α∈ (1 ,e) τότε lnα>0 και και η g έχει ελάχιστο.

Τελικά λοιπόν α∈ [1 ,e) .

β) Το ζητούμενο εμβαδό είναι E= $\int_{-1}^{1}|g(x)|dx$.Επειδή $|g(x)| = |(x^2-1)\ln\alpha| \leq$

$|x^2-1|$=1-x^2, για x∈ [-1 , 1] . Έτσι E$\leq \int_{-1}^{1}(1-x^2)dx \Rightarrow$ E$\leq \frac{4}{3}$.

2. α) Θέτουμε όπου x το 2004-x και από το σύστημα που προκύπτει βρίσκουμε f(x)=668-x .

β) Είναι g(x)=$\frac{668-x}{\ln x}$, x∈ (0 , 1)∪ (1 ,+∞) .

Επειδή $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$ =…=0 και $\lim_{x\to+\infty}$(g(x)-0·x)=…= -∞ ∉ $\mathfrak{R}$, η C_f δεν έχει οριζόντιες ή πλάγιες ασύμπτωτες .Είναι $\lim_{x\to0^+}$ g(x)=0∈ $\mathfrak{R}$ και $\lim_{x\to1^+}$ g(x)= +∞ , $\lim_{x\to1^-}$ g(x)= -∞ οπότε η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία x =1 .

γ) Είναι $h(x)=x^2(668-x)= -x^3+668x^2$, $x\in \Re$ και $\int_\alpha^\beta xh''(x)dx$ =

$=[xh'(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta (x)'h'(x)dx = \beta h'(\beta)- \alpha h'(\alpha)-[h(x)]_\alpha^\beta = \beta h'(\beta)- \alpha h'(\alpha)-h(\beta)+h(\alpha)$.

Για να ισχύει η ισότητα $\int_\alpha^\beta xh''(x)dx = h(\alpha)-h(\beta)$,αρκεί $\beta h'(\beta)- \alpha h'(\alpha)=0$, για κατάλληλες τιμές των α , β .Έχουμε $h'(x)=0 \Leftrightarrow -3x^2+1336x=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=\frac{1336}{3}$.

Επιλέγοντας α=0 και $\beta=\frac{1336}{3}$ παίρνουμε το ζητούμενο .

3. α) Παραγωγίζοντας και τα 2 μέλη της δοθείσας σχέσης παίρνουμε $f'(x)[1821(f(x))^{1820}+3\alpha(f(x))^2+e^{f(x)}]=0$, για κάθε $x\in \Re$. Η παράσταση εντός της αγκύλης είναι θετική , άρα $f'(x)=0$ για κάθε $x\in \Re$,συνεπώς $f(x)=c$. Η σταθερά c είναι αρνητική , διότι αν $c\geq 0$ τότε στη δοθείσα σχέση το 1ο μέλος θα ήταν μη αρνητικό ενώ το 2ο αρνητικό (άτοπο) .

β) Είναι $g(x)=\frac{c}{e^x-1}$, $x\neq 0$.Έχουμε :

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty} g(x)= -c$, $\lim_{x\to 0^+} g(x)= -\infty$, $\lim_{x\to 0^-} g(x)= +\infty$. Άρα η ευθεία y=0 είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, η ευθεία y= -c είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και η x=0 κατακόρυφη ασύμπτωτη .

4. α) Έχουμε $f'(x)+f(x)=1 \Leftrightarrow e^x(f'(x)+f(x))= e^x \Leftrightarrow (e^xf(x))'=(e^x)' \Leftrightarrow$ $e^xf(x)= e^x+c$, c σταθερά .Για x=0 : $e^0f(0)= e^0+c \Leftrightarrow e+1=1+c \Leftrightarrow c=e$. Άρα

$f(x)=1+e^{1-x}$, $x\in \Re$. Είναι λοιπόν $\lim_{y\to+\infty}(\lim_{x\to 2} f(xy))= \lim_{y\to+\infty}(\lim_{x\to 2}(1+e^{1-xy}))=$

$\lim_{y\to+\infty}(1+e^{1-2y}) \overset{\theta\acute{\epsilon}\tau o\upsilon\mu\epsilon\ 1-2y=t}{=} \lim_{t\to-\infty}(1+e^t) = 1+0=1$.

β) $f'(x)= - e^{1-x}$, $f''(x)= e^{1-x}>0$,άρα η f είναι κυρτή στο $\Re$.

5. α) $f(g'(x))=(f\circ f\circ f)(x)=x$,άρα $\int_0^1 f(g'(x))dx = [\frac{x^2}{2}]_0^1 = \frac{1}{2}$.

β) $2006 = 668\cdot 3+2$, άρα $\int_1^2 (f\circ f\circ\cdots\circ f)(t)dt = \int_1^2 f(f(x))dx = \int_1^2 g'(x)dx =$

= g(2) – g(1) = $\frac{3}{2}$.

6. α) Θέτουμε στη δοθείσα όπου x το x+2004 : f(x+2004)+f(x+1002)=0 (1)

Θέτουμε στη δοθείσα όπου x το x+1002 : f(x+1002)+f(x)=0 (2)

Από (1) και (2) : f(x+2004)=f(x) .

β) $\int_1^{2005} f(x+2005)dx = \int_1^{2005} f(x+1+2004)dx = \int_1^{2005} f(x+1)dx \overset{x+1=u}{=} \int_2^{2006} f(u)du$.

7. α) Η δοθείσα ισότητα γράφεται (f(x)-2004)(f^2(x)+f(x)+1) = 0 , οπότε

f(x) = 2004 .

β) I – J – K = $\int_3^5 \frac{x^4}{x^2+x+1}dx + \int_5^8 \frac{x^4}{x^2+x+1}dx + \int_3^8 \frac{x^3-x-1}{x^2+x+1}dx =$

$\int_3^8 \frac{x^4}{x^2+x+1}dx + \int_3^8 \frac{x^3-x-1}{x^2+x+1}dx = \int_3^8 \frac{x^4+x^3-x-1}{x^2+x+1}dx = \int_3^8 (x^2-1)dx = \ldots = \frac{470}{3}$.

8. α) Θέτουμε 2x-t = u και παίρνουμε f(x) = $\int_{-1}^{2x-1} g(u)du$, οπότε f ΄(x) = 2g(2x-1) ,

f ΄΄(x) = 4g΄(2x-1) και με πρόσθεση των f ΄(x) , f ΄΄(x) παίρνουμε το ζητούμενο .

β) Είναι g(x)>0 και g΄(x)$\geq$0 , οπότε g(2x-1) >0 , g΄(2x-1)$\geq$0 .Λόγω του (α) θα είναι f ΄΄(x)+ f ΄(x) >0 $\Rightarrow$h΄(x)>0 $\Rightarrow$ h γνησίως αύξουσα .

9. α) Είναι $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \int_{-\alpha}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)dx$. Για το $\int_{-\alpha}^{0} f(x)dx$ θέτουμε x = - u και

τότε αυτό είναι ίσο με $\int_0^{\alpha} f(x)dx$ αν η f είναι άρτια , ενώ είναι ίσο με

$-\int_0^{\alpha} f(x)dx$

αν η f είναι περιττή .

β) Η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι περιττή άρα I = 0 .

10. α) g΄(x) = $\int_1^x \left(\int_1^z f(u^5)du\right)dz$, g΄΄(x) = $\int_1^x f(u^5)du$, $g^{(3)}(x) = f(x^5)$, x$\in \Re$.

β) $\lim_{x\to 1} \dfrac{g(x)}{(x-1)^3} \underset{Hospital}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 1} \dfrac{g΄(x)}{3(x-1)^2} \underset{Hospital}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 1} \dfrac{g΄΄(x)}{6(x-1)} \underset{Hospital}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 1} \dfrac{g^{(3)}(x)}{6}$

= $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x^5)}{6}$ = 2 .

γ) Επειδή η f είναι συνεχής και για κάθε x$\in \Re$ είναι f (x) $\neq$ 0 , θα είναι

f(x) > 0 για κάθε x$\in \Re$ ή f(x) < 0 για κάθε x$\in \Re$. Άρα

$g^{(3)}(x) = f(x^5) > 0$ για κάθε x$\in \Re$ ή $g^{(3)}(x) = f(x^5) < 0$ για κάθε x$\in \Re$.

Επομένως η g΄΄ είναι γνησίως μονότονη στο $\Re$.

γ) J = $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{x^5}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx + \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{-2x^3}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx + \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{-10x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx + \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sqrt{3}}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$ =

$\overset{(\alpha)}{=}$ 0 + 0 + 0 + 2$\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$ = 2$\sqrt{3}$ (εφ$\dfrac{\pi}{3}$-εφ0) = 6 .

11. α) f(x) – g(x) $\geq$ 0 για κάθε x$\in$ [α , β] , επομένως $\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx \geq 0$, απ' όπου

παίρνουμε το ζητούμενο .

β) - $|f(x)| \leq$ f(x) $\leq |f(x)|$ για κάθε x$\in$ [α , β] , οπότε λόγω του (α) :

$$-\int_\alpha^\beta |f(x)|dx \leq \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \int_\alpha^\beta |f(x)|dx \Rightarrow \left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right| \leq \int_\alpha^\beta |f(x)|dx .$$

γ) Λόγω των (α) και (β) είναι : $\left|\int_1^2 (x\sigma\upsilon\nu(e^x+1)+\eta\mu\frac{1}{x})dx\right| \leq$

$$\int_1^2 \left|x\sigma\upsilon\nu(e^x+1)+\eta\mu\frac{1}{x}\right|dx \leq \int_1^2 (|x|\cdot|\sigma\upsilon\nu(e^x+1)|+\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right|)dx \leq \int_1^2 (x\cdot 1+1)dx =$$

= $[\dfrac{x^2}{2} + x]_1^2$ = $\dfrac{5}{2}$.

δ) Αν υπάρχει τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha}\phi'(x)dx \geq \int_{-\alpha}^{\alpha}4dx \Rightarrow$ φ(α) – φ(-α) $\geq$8α $\Rightarrow$ 4α$\geq$8α

(άτοπο) .

10) α) Επειδή f(0)=3 θα είναι f(x)$\geq$f(0) άρα το f(0)=3 είναι ελάχιστο της f .

β) Από το θεώρημα Fermat : f ΄(0) = 0 . Μετά από πράξεις παίρνουμε το ζητούμενο .

11) α) Η εξίσωση γράφεται

$(x^2 + x +1)^{11}+(x^2 + x +1)^7+ x^2 + x +1 = (2x^2 – x +1)^{11}+(2x^2 – x +1)^7+2x^2 – x +1$

Θεωρούμε τη $\varphi(x) = x^{11} + x^7 + x$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathfrak{R}$, άρα και 1 – 1 , επομένως η εξίσωση τώρα γράφεται $\varphi(x^2 + x +1) = \varphi(2x^2 – x +1) \Leftrightarrow$ $x^2 + x +1 = 2x^2 – x +1 \Leftrightarrow x^2 – 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 2$.

β) Η ανίσωση γράφεται $2\ln\frac{2x^2+x+9}{x^2+4x+7}$ + 5[(2x² + x + 9) – (x² + 4x + 7)] < 0 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $2\ln(2x^2 + x + 9) + 5(2x^2 + x + 9) < 2\ln(x^2 + 4x + 7) + 5(x^2 + 4x + 7)$.

Θεωρούμε την $g(x) = 2\ln x + 5x$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $(0 , +\infty)$

και τώρα η ανίσωση γράφεται $g(2x^2 + x + 9) < g(x^2 + 4x + 7)$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $2x^2 + x + 9 < x^2 + 4x + 7$ $\Leftrightarrow$ $x^2 - 3x + 2 < 0$ $\Leftrightarrow$ $x\in (1 , 2)$.

12) α) $g'(x) = \int_1^x(\int_1^z f(u^5)du)dz$, $g''(x) = \int_1^x f(u^5)du$, $g^{(3)}(x) = f(x^5)$, $x\in \Re$.

β) $\lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{(x-1)^3} \underset{Hospital}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 1}\frac{g'(x)}{3(x-1)^2} \underset{Hospital}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 1}\frac{g''(x)}{6(x-1)} \underset{Hospital}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 1}\frac{g^{(3)}(x)}{6}$

$= \lim_{x\to 1}\frac{f(x^5)}{6} = 2$.

γ) Επειδή η f είναι συνεχής και για κάθε $x\in \Re$ είναι $f(x) \neq 0$, θα είναι

$f(x) > 0$ για κάθε $x\in \Re$ ή $f(x) < 0$ για κάθε $x\in \Re$. Άρα

$g^{(3)}(x) = f(x^5) > 0$ για κάθε $x\in \Re$ ή $g^{(3)}(x) = f(x^5) < 0$ για κάθε $x\in \Re$.

Επομένως η g'' είναι γνησίως μονότονη στο $\Re$.

13) α) $f(x) - g(x) \geq 0$ για κάθε $x\in [\alpha , \beta]$, επομένως $\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx \geq 0$, απ’

όπου

παίρνουμε το ζητούμενο .

β) $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ για κάθε $x\in [\alpha , \beta]$, οπότε λόγω του (α) :

$$-\int_\alpha^\beta |f(x)|dx \leq \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \int_\alpha^\beta |f(x)|dx \Rightarrow \left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right| \leq \int_\alpha^\beta |f(x)|dx \ .$$

γ) Λόγω των (α) και (β) είναι : $\left|\int_1^2 (x\sigma\upsilon\nu(e^x+1)+\eta\mu\frac{1}{x})dx\right| \leq$

$$\int_1^2\left|x\sigma\upsilon\nu(e^x+1)+\eta\mu\frac{1}{x}\right|dx \leq \int_1^2(|x|\cdot|\sigma\upsilon\nu(e^x+1)|+\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right|)dx \leq \int_1^2(x\cdot 1+1)dx =$$

$= [\frac{x^2}{2} + x]_1^2 = \frac{5}{2}$.

δ) Αν υπάρχει τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha}\phi'(x)dx \geq \int_{-\alpha}^{\alpha}4dx \Rightarrow$ φ(α) – φ(-α) $\geq$8α $\Rightarrow$4α$\geq$8α (άτοπο) .

12. α) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα [α , $\frac{\alpha+\beta}{2}$] , [$\frac{\alpha+\beta}{2}$, β] οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in$ (α , $\frac{\alpha+\beta}{2}$) , $\xi_2 \in$ ($\frac{\alpha+\beta}{2}$, β) τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\frac{\alpha+\beta}{2}) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

. Αν η f είναι κυρτή (κοίλη) τότε η f ΄ είναι γνησίως αύξουσα (γνησίως φθίνουσα) οπότε $\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$ ($f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$) και μετά τις πράξεις παίρνουμε το ζητούμενο .

β) Η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^8$ στρέφει τα κοίλα άνω στο $\Re$, οπότε αν εφαρμόσουμε το (α) για την f στο [α , α+2] , παίρνουμε το ζητούμενο .

13. α) Θέτουμε $f^{(3)}(x) = g(x)$.Τότε $g'(x) + g(x)$ = ημx + συνx $\Leftrightarrow$

$e^x(g'(x) + g(x)) = e^x$(ημx + συνx) $\Leftrightarrow$ $(e^x g(x))' = (e^x$ημx$)'$ $\Leftrightarrow$

$e^x g(x) = e^x$ημx $+c_1$. Επειδή $g(0) = f^{(3)}(0) = 0$, προκύπτει $c_1 = 0$, οπότε

g(x) = ημx ή $f^{(3)}(x)$ = ημx .Από την τελευταία ισότητα χρησιμοποιώντας και τις αρχικές συνθήκες παίρνουμε διαδοχικά $f''(x)$ = - συνx , $f'(x)$ = - ημx , f(x) = συνx .

β) $$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{f(x)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\eta\mu(\frac{\pi}{2}-x)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2\eta\mu(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})}dx =$$

(διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με συν$^2(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})$) $- \int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{(\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}))'}{\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})}dx$

=

14. α) Αν α είναι τυχαίο σημείο του $\mathfrak{R}$ αρκεί να δειχθεί ότι $\lim_{x \to \alpha} f(x) = f(\alpha)$. Όταν

$x \to \alpha$ ισχύει $x - \alpha \to 0$, $x - \alpha + 13 \to 13$. Είναι $\lim_{x \to \alpha} f(x) \overset{x-\alpha+13=t}{=}$

$\lim_{t \to 13} f(t + \alpha - 13) = \lim_{t \to 13} [5f(t)f(\alpha - 13)] = 5f(\alpha - 13) \lim_{t \to 13} f(t) = 5f(\alpha - 13)f(13) =$

$= f(\alpha - 13 + 13) = f(\alpha)$.

β) Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathfrak{R}$ η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathfrak{R}$. Ισχύει $g(1) = g(2) = g(3) = \ldots = g(100) = 0$. Εφαρμόζουμε για την g το θεώρημα Rolle στα διαστήματα [1 , 2] , [2 , 3] , [3 , 4] , … , [99 , 100] και παίρνουμε το ζητούμενο.

15. α) Εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle για την $F(x) = -\alpha\sigma\upsilon\nu x + \beta\eta\mu x - \frac{2\alpha}{\pi}x$ στο

$[0, \pi]$, για την οποία ισχύει $F'(x) = f(x)$ και $F(0) = F(\pi) = -\alpha$.

β) Θα δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) - \sigma\upsilon\nu x = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο

$(0, \alpha)$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle για την $G(x) = \int_0^x f(t)dt - \eta\mu x$ στο

$[0, \alpha]$, για την οποία ισχύει $G'(x) = f(x) - \sigma\upsilon\nu x$ και $G(0) = G(\alpha) = 0$.