

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

1. Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Να βρείτε την πιθανότητα ώστε η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x + \lambda$ να έχει ελάχιστο μεγαλύτερο του 2.

2. Ρίχνουμε συγχρόνως δύο αμερόληπτα ζάρια ένα άσπρο και ένα μπλε που το καθένα είναι αριθμημένο από το ένα έως το έξι. Αν α, β είναι αντίστοιχα οι ενδείξεις τους, να βρείτε την πιθανότητα, ώστε η εξίσωση $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

3. Ρίχνουμε ένα όχι αμερόληπτο ζάρι. Συμβολίζουμε με $P(k), k = 1, 2, \dots, 6$ την πιθανότητα εμφάνισης της k -έδρας. Αν οι αριθμοί $P(1), P(2), \dots, P(6)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και οι αριθμοί $P(3), P(5), P(6)$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων A : η ένδειξη του ζαριού να είναι περιττός αριθμός και B : η ένδειξη του ζαριού να είναι πολλαπλάσιο του 3.

4. Ρίχνουμε δύο αμερόληπτα ζάρια, ένα κίτρινο και ένα μαύρο. Το καθένα είναι αριθμημένο από το ένα έως το έξι. Οι ενδείξεις του κίτρινου ζαριού είναι οι τιμές της παραμέτρου κ , ενώ οι τιμές του μαύρου ζαριού είναι οι τιμές της παραμέτρου μ . Να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

α) η ευθεία $\kappa x + \mu y = 7$ να περνάει από το σημείο $A(2, 1)$

β) η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{3}\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi$ να περνάει από το σημείο $B\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\kappa}{\mu}\right)$

5. Δίνεται ο ακέραιος αριθμός κ με $\kappa \in [-4, 3]$ και η εξίσωση $\kappa x^2 + (\kappa - 2)x + \kappa = 0$. Να βρείτε την πιθανότητα η εξίσωση να έχει:

α) δύο πραγματικές ρίζες

β) μία διπλή ρίζα πραγματική

6. Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$, που αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Επιλέγουμε τυχαία ένα ενδεχόμενο $\alpha \in \Omega$ και θεωρούμε τα σημεία $A(\alpha + 3, \alpha^2)$, $B(\alpha + 2, 2\alpha^2 - 3)$ και $\Gamma(\alpha + 1, 5\alpha - \alpha^2)$. Να βρείτε την πιθανότητα τα A, B και Γ να είναι συνευθειακά.

7. Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{0, 1, \dots, 5\}$, που αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Επιλέγουμε τυχαία ένα ενδεχόμενο $\alpha \in \Omega$ και θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2\alpha x^3 + 6x^2 + x + 2\alpha$ Να βρείτε την πιθανότητα να ισχύει $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Omega$

8. Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, \dots, 8\}$, που αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Επιλέγουμε τυχαία ένα απλό ενδεχόμενο $\alpha \in \Omega$ Να βρείτε την πιθανότητα η εξίσωση $2x^2 - 4x + \alpha = 0$, $x \in \Omega$ να είναι αδύνατη στο Ω

9. Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ένας δειγματικός χώρος ο οποίος αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Επιλέγουμε ένα απλό ενδεχόμενο $\lambda \in \Omega$ Να βρείτε την πιθανότητα η εξίσωση $x^2 - 4x + \lambda = 0$ να έχει πραγματικές ρίζες.

10. Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$, που αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Επιλέγουμε τυχαία ένα ενδεχόμενο $\alpha \in \Omega$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + (\alpha + 1)x + \alpha^2 - 4\alpha + 2$ Να βρείτε την πιθανότητα η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, \alpha^2 - 3\alpha + 1)$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

11. Σε ένα κουτί υπάρχουν 4 αριθμημένες σφαίρες με τους αριθμούς $-1, 1, 2, 3$ αντιστοίχως. Επιλέγουμε δύο σφαίρες συγχρόνως, προσθέτουμε τις ενδείξεις και ονομάζουμε α το άθροισμά τους. Δεχόμαστε ότι ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Να βρείτε την πιθανότητα η εξίσωση $x^2 + 2x + \alpha = 0$ να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

12. Έστω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης είναι $\Omega = \{\beta \in \mathbb{C} \mid |\beta| < 5\}$ και αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Επιλέγουμε τυχαία ένα $\beta \in \Omega$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^4 - \beta x^3 + 3x^2 - 5$ Να βρείτε την πιθανότητα να ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \Omega$

13. Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και X, Y ενδεχόμενά του τέτοια ώστε $X \subseteq Y$ Έστω ότι $P(X), P(Y)$ είναι οι πιθανότητες των X, Y αντιστοίχως. Αν οι πραγματικοί αριθμοί $P(X), P(Y)$ είναι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x + 2002, x \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε

α) τις πιθανότητες $P(X), P(Y)$

β) τις πιθανότητες $P(X \cap Y), P(X \cup Y), P(Y \cap X')$

14. Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ είναι ένας δειγματικός χώρος με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.

Αν $\lambda \in \Omega$, θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + \lambda^2$, $x \in \mathbb{R}$

και τα ενδεχόμενά του X, Y του Ω όπου

X : Η μέγιστη τιμή της f στο $[0, 5]$, είναι μεγαλύτερη ή ίση του $\frac{68}{3}$

Y : Η ελάχιστη τιμή της f στο $[0, 5]$ είναι μικρότερη ή ίση του 4. Να βρείτε τις πιθανότητες $P(X), P(Y), P(X \cap Y), P(X \cup Y), P(Y \cap X')$

15. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + x$ Από ένα κουτί που έχει τρεις αριθμημένες σφαίρες με τους αριθμούς 0, 1, $2\sqrt{2}$ αντιστοίχως, επιλέγουμε τυχαία μία και την τοποθετούμε στη θέση του α . Να βρείτε την πιθανότητα η f να είναι γνήσια αύξουσα για κάθε $x \in \mathbb{R}$

16. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι συχνότητες των τιμών μίας μεταβλητής X

Τιμές x_i	Συχνότητα v_i
20	4
21	2
24	5
26	3
30	6

Αν η τυπική απόκλιση είναι $s = 3,8$, να βρείτε:

α) τη μέση τιμή \bar{x} των τιμών

β) την πιθανότητα μία τυχαία τιμή της μεταβλητής να βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$

17. Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{2, 4, 6, \dots, 2\nu\}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, που αν θεωρηθούν τιμές της μεταβλητής X έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 9$

α) Να βρείτε ποιος είναι ακριβώς ο δειγματικός χώρος Ω

β) Να βρείτε τη διάμεσο και το εύρος της μεταβλητής X

γ) Αν (s) η τυπική απόκλιση, να αποδείξετε ότι $s^2 = 2\bar{x} + 3$

δ) Δίνονται τα ενδεχόμενα A: « $\alpha \in \Omega$, ώστε $\alpha = \text{πολ } 4$ » και B: « $\alpha \in \Omega$, ώστε β να είναι ρίζα της εξίσωσης $\frac{(x^2 - 6x + 8)(x - 3)}{x - 2} = 0$ » να βρείτε τις πιθανότητες $P(A), P(B), P(A \cap B), P(A \cup B)$ και $P(A - B)$

18. Να υπολογίσετε το πλήθος ν των παρατηρήσεων $x_1 = \ln 2, x_2 = \ln \frac{3}{2}, x_3 = \ln \frac{4}{3}, \dots, x_\nu = \ln \frac{\nu+1}{\nu}$, αν η μέση τιμή τους είναι $x = \frac{\ln 2004}{\nu}$

19. Σε μία ερώτηση απάντησαν ν φοιτητές σε χρόνους t_1, t_2, \dots, t_ν αντιστοίχως. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (t_1 - x)^2 + (t_2 - x)^2 + \dots + (t_\nu - x)^2$ με $x \in \mathbb{R}$, η οποία παρουσιάζει ελάχιστο το $f(2) = 8$

α) Να βρείτε τη μέση τιμή των t_1, t_2, \dots, t_ν

β) Να αποδείξετε ότι $f'(0) = -4\nu$

γ) Να βρείτε το μικρότερο πλήθος ν ώστε το δείγμα t_1, t_2, \dots, t_ν να είναι ομοιογενές

δ) Αν ισχύει $\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 = 48$, να βρείτε το πλήθος ν των φοιτητών.

20. Ρωτήσαμε 50 μαθητές μιας τάξης για τον αριθμό των αδελφών τους. Οι απαντήσεις που πήραμε είναι: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Αν $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5, \nu_6$ είναι οι αντίστοιχες συχνότητες τους και γνωρίζετε επίσης ότι:

- ❖ η πιθανότητα να έχουν πέντε αδέρφια είναι 0, 10
- ❖ ο αριθμός ν_3 αντιστοιχεί σε γωνία 72° σε κυκλικό διάγραμμα.
- ❖ ο αριθμός ν_4 ισούται με το $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x-4)}{\sqrt{x}-2}$
- ❖ η διάμεσος και η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι 2,5

α) Να κάνετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων.

β) Ποια η πιθανότητα αν επιλέξουμε τυχαία έναν μαθητή η οικογένειά του να έχει 2 παιδιά.

γ) Να βρείτε το συντελεστή μεταβλητότητας του παραπάνω δείγματος.

21. Έστω A, B δύο μη ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με μη μηδενικές πιθανότητες $P(A), P(B)$ αντίστοιχα, για τις οποίες ισχύουν: $P[(A - B) \cup (B - A)] = \frac{1}{5}$ & $P(A) + P(B) = \frac{1}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $g(x) = P(A \cap B)$

β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της $P(A \cap B)$ ως προς x όταν $x = 0$

γ) Ποια η μέγιστη τιμή της $P(A \cap B)$;

δ) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου Γ : «Πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα A, B ή δεν πραγματοποιείται κανένα απ' αυτά», όταν η $P(A \cap B)$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της.

22. Ο παρακάτω πίνακας δίνει ορισμένα από τα αποτελέσματα πρόσφατης έρευνας που έγινε σε δείγμα ελληνικών νοικοκυριών, σχετική με το ύψος οφειλών αυτών (σε ευρώ) για καταναλωτικά δάνεια.

Οφειλές σε ευρώ (€) κλάσεις (-)	n_i	$f_i\%$
0-5.000	350	
5.000-10.000		
10.000-15.000	500	
20.000-25.000		
Σύνολο		

Αν ισχύουν:

i. το πλήθος των νοικοκυριών που οφείλουν μέχρι 5.000 € αντιστοιχεί στο κυκλικό διάγραμμα σε κυκλικό τομέα γωνίας 63° .

ii. Η συχνότητα n_5 είναι ίση με τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης f με τύπο

$$f(x) = \frac{-45(x^2 - 15)}{e^{3-x}}, \quad x \neq 0 \text{ και}$$

iii. το 35% των νοικοκυριών οφείλει τουλάχιστον 13.000 €, τότε:

α) Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα.

β) Να βρείτε τη διάμεσο των οφειλών.

γ) Ποιο το ποσοστό των νοικοκυριών που οφείλουν τουλάχιστον 9.000 € αλλά το πολύ 17.000 €;

23. Τα ημερήσια έξοδα 10 μαθητών σε ευρώ (€) είναι:

$$x^3 - 10, 50 - 12x, x^2 - 3, 27 - 2x^2, 45 - 3x^2, 20,$$

$$30 - 4x, x^3 - 7, 30 - 2x^2 \text{ και } 22 - 2x, \text{ με } x \in \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x για τον οποίο η μέση τιμή των εξόδων των μαθητών γίνεται ελάχιστη.

β) Για $x = 3$ να υπολογίσετε:

i. τη μέση τιμή των εξόδων

ii. τη διάμεσο τιμή των εξόδων

iii. την τυπική απόκλιση των εξόδων

iv. τη μεταβολή του συντελεστή μεταβλητότητας των ημερήσιων εξόδων των μαθητών αν αυτά αυξηθούν κατά 10%.

24. Η μέση τιμή του δείγματος $7, 2, x, 5, 8, y, 1, \omega, 2, 3$ είναι $\bar{X} = 4$, όπου $x, y, \omega \in \mathbb{R}^*$ διαφορετικοί ανά δύο.

i. Αν x, y, ω διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, δείξτε ότι $y = 4$ και $x + \omega = 8$

ii. Αν $\omega = 3x$ να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

25. Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης, που αποτελείται από n ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, όπου n η λύση της εξίσωσης $(\sqrt[3]{2})^n = 32$. Έστω επίσης $A \subseteq \Omega$ ένα ενδεχόμενο που περιέχει τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $x^2 + 3x + \lambda = 0$ να είναι αδύνατη στο \mathbb{R} . Βρείτε την $P(A)$

26. Οι ημέρες απουσίας 6 μαθητών της Γ' τάξης ενός Λυκείου κατά τη διάρκεια του σχολικού έτους ήταν:

$f'(1), \alpha, 3, \beta, 6, 2\beta$ όπου: $f(x) = e^{x^2-x}$, $\alpha = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x - 2}$ και β ο συντελεστής

διεύθυνσης της εφαπτομένης ξ_g με $g(x) = x^3 - 4x^2 + 8x + 5$ στο σημείο $A(2, g(2))$. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

27. Σε κάποια σχολική τάξη πήραμε ένα δείγμα μαθητών και το εξετάσαμε ως προς το βάρος τους. Διαπιστώσαμε ότι το βάρος τους κυμαίνεται από 45 kg έως 75 kg, και η κατανομή των βαρών τους είναι περίπου κανονική.

A. Να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και το εύρος του δείγματος.

B. Να βρείτε τη διασπορά των βαρών τους.

Γ. Να εξετάσετε εάν το δείγμα είναι ομοιογενές

Δ. Αν το άθροισμα όλων των βαρών είναι 1800 kg, να βρείτε το μέγεθος του δείγματος.

E. Αν επιλέξουμε τυχαία έναν μαθητή, ποια είναι η πιθανότητα το βάρος του να είναι μεταξύ 50 kg και 60 kg;

28. Δίδεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\bar{X}}{2}x^2 - Sx + 1$ όπου \bar{X} και S η μέση τιμή και τυπική απόκλιση αντίστοιχα ενός δείγματος με $\bar{X} \neq 0$

A. Εάν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$, να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής ΔV δείγματος, και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

B. Να βρείτε τα τυχόν ακρότατα της συνάρτησης f στο σύνολο \mathcal{I}

Γ. Εάν είναι γνωστό ότι $\lim_{x \rightarrow S} f(x) = 1$ να υπολογίσετε τη μέση τιμή \bar{X} και την τυπική απόκλιση S του δείγματος.

Δ. Να βρείτε το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που περιέχονται στο διάστημα $(1,5)$ εάν υποθέσουμε ότι η καμπύλη κατανομής του δείγματος είναι περίπου κανονική, καθώς και το εύρος \mathcal{I} των τιμών του δείγματος.

29. Έστω οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = \frac{30\sqrt[3]{X} - 30}{X^2 - X}$ και $g(X) = X^3 - 3X^2 + X + 2005, X \in \mathcal{I}$

A. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

X_i	V_i	f_i	$f_i\%$	$X_i V_i$	N_i
0			4		
1	κ				
2					
3	ω	0,2			
4		0,16			
ΣΥΝΟΛΟ					

B. Να βρείτε τη διάμεσο και τη μέση τιμή.

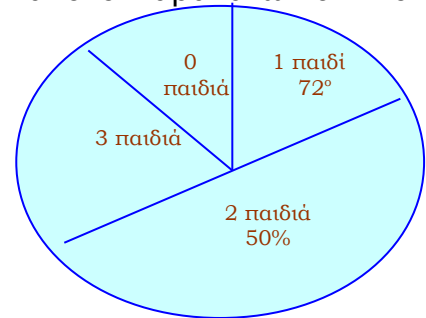
30. Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ δειγματικός χώρος που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Εκλέγουμε τυχαία ένα απλό ενδεχόμενο $\lambda \in \Omega$ Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με:

$f(x) = 4x^3 - \frac{7}{2}\lambda x^2 + \lambda^2 x + 2005\lambda^3, x \in \mathcal{I}$ και g συνεχής στο $x=0$ με

$5g(0) - 3 = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ Θεωρούμε τα ενδεχόμενα **A**: « $H C_f$ έχει στο σημείο της $K(1, f(1))$ εφαπτομένη παράλληλη στην ευθεία « η »: $\psi + 3 = 0$ » και **B**: με

$P(B) = \frac{1}{2}g(0)$ Ακόμη ισχύει: $P(A \cap B) = \frac{7}{32}$ Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα μόνο από τα ενδεχόμενα **A** και **B**.

31. Μελετήσαμε ένα δείγμα 800 οικογενειών ως προς το πλήθος των παιδιών της οικογένειας. Μερικά από τα αποτελέσματα φαίνονται στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα.



A. Να συμπληρώσετε τον πίνακα που ακολουθεί στην επόμενη σελίδα.

B. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

Γ. Επιλέγουμε τυχαία μια οικογένεια.

Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

- i. «Η οικογένεια έχει τουλάχιστον δύο παιδιά»
- ii. «Η οικογένεια έχει το πολύ δύο παιδιά»

Δ. Επιλέγουμε τυχαία ένα παιδί από τις οικογένειες του δείγματος. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

- i. «Το παιδί έχει έναν μόνον αδελφό»
- ii. «Το παιδί έχει τουλάχιστον έναν αδελφό»
- iii. «Το παιδί έχει το πολύ έναν αδελφό»

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

ΑΡΙΘΜΟΣ ΠΑΙΔΙΩΝ	ΠΛΗΘΟΣ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΩΝ	ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ t_i	ΕΠΙΚΕΝΤΡΗ ΓΩΝΙΑ α_i	ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ N_i	ΣΧΕΤΙΚΗ ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ $F_i\%$
0					
1			72°		
2		0,50			
3	160				
Σύνολο	800	1,00	360°	-	-

32. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \ln(x+1)$, $x \neq 0$

A. Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα.

B. Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της f η εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{1}{2}$;

Γ. Θεωρούμε πείραμα τύχης, με δειγματικό χώρο $\Omega = \{2, 3, 4, \dots, n\}$, με n θετικό ακέραιο. Αν για κάθε $k \in \Omega$ ισχύει $9P(x) = 22f'(k)$ να αποδείξετε ότι $n = 10$

33. ν τηλεθεατές δήλωσαν την προτίμησή τους σε ένα μόνον από κ προγράμματα, τα $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\kappa$ με $\nu \in \mathbb{N}^*$. Από τις μετρήσεις προέκυψε ότι για τα ποσοστά προτίμησης $f(\alpha_i)$ των α_i είναι:

$$f(\alpha_3) = \frac{400}{31}\% \text{ και } f(\alpha_i) = \lambda \varphi^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, \kappa \text{ με } \lambda \text{ σταθερό αριθμό.}$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\lambda = \frac{1}{31}$ και $\kappa = 5$

β) Επιλέγουμε έναν τηλεθεατή στην τύχη. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

A.: «Προτίμησε το πρόγραμμα α_4 ».

B.: «Προτίμησε 1 από τα 2 πιο δημοφιλή προγράμματα».

Γ.: «Προτίμησε κάποιο εκτός από το α_1 ».

γ) Αν το α_4 προτιμήθηκε από 160 άτομα, να βρείτε το ν

δ) Να γίνει το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων της κατανομής $(\alpha_i, f(\alpha_i))$

34. Δίνεται η συνάρτηση:
$$g(x) = \begin{cases} 5x & , 0 \leq x < 2 \\ x+8 & , 2 \leq x < 4 \\ 12 & , 4 \leq x < 6 \\ -3x+30 & , 6 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

που η γραφική της παράσταση είναι το πολύγωνο συχνοτήτων της βαθμολογίας στην ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ μιας ομάδας φοιτητών του ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ, ομαδοποιημένη σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους.

α) Να υπολογίσετε το μέγεθος του δείγματος καθώς και την μέση τιμή \bar{X} της βαθμολογίας των φοιτητών.

β) Αν επιλέξουμε τυχαία έναν φοιτητή, ποια η πιθανότητα να έχει γράψει βαθμό τουλάχιστον 4,5.

γ) Αν ο καθηγητής αυξήσει τη βαθμολογία κάθε φοιτητή κατά 0,30 μονάδες, να βρείτε το ποσοστό των φοιτητών που θα περάσουν το μάθημα λόγω της αύξησης αυτής.

δ) Αν η τυπική απόκλιση της αρχικής βαθμολογίας είναι $S = 2$, να ελέγξετε αν ο καθηγητής μπορεί να κάνει το δείγμα ομοιογενές αυξάνοντας την βαθμολογία κάθε φοιτητή (Βάση βαθμολογίας: 5 μονάδες).

35. Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A, B \neq \emptyset, A \cap B \neq \emptyset$ και P η συνάρτηση πιθανότητας που ορίζεται στον χώρο Ω . Δίνεται ακόμη η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = P(A - B)x^2 - 3P(A \cap B)x + 1, x \in I$ που παρουσιάζει ελάχιστη τιμή στο $x_0 = 3/2$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$

α) Να εξετάσετε αν $A \subseteq B$

β) Να δείξετε ότι $P(A \cup B) \leq 2gP(B)$

γ) Ποιος ο CV του δείγματος των τιμών t_1, t_2, \dots, t_x της μεταβλητής T με μέση τιμή $\bar{t} = 20gP(B)$ και τυπική απόκλιση $S = \frac{1}{2}gP(A \cup B)$. Είναι ομοιογενές το δείγμα των παραπάνω τιμών;

36. Δίδεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{\alpha x^3}{3} - \beta x + 2$ με α, β να παίρνουν τιμές από το σύνολο $S = \{1, 2, 3, 4\}$

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$

β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

i. A: «η εφαπτομένη να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{3\pi}{4}$ »

ii. B: «η εφαπτομένη να διέρχεται από το σημείο $\left(-\frac{2}{3}, 2\right)$ »

iii. Γ: «πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα A, B»

γ) Αν τα ενδεχόμενα A, B πραγματοποιούνται συγχρόνως, να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

37. Έστω $5, \alpha, 7, 8, \beta, (\alpha \rho \beta)$ οι τιμές μιας μεταβλητής X

α) Αν η μέση τιμή και ο συντελεστής μεταβολής των τιμών της X είναι $\bar{x} = 5$ και $\varepsilon V = \sqrt{\frac{6}{5}}$ αντίστοιχα, να υπολογίσετε: i. τις τιμές α, β

ii. τη διάμεσο δ των παραπάνω τιμών της μεταβλητής X

β) Αν επιπλέον $\Omega = \{5, \alpha, 7, 8, \beta\}$ και f συνάρτηση με τύπο

$f(x) = x^3 - 3x + \kappa^2 - 3\kappa, x \in I, \kappa \in \Omega$, να βρείτε την πιθανότητα ώστε η f να έχει ένα, τουλάχιστον, ακρότατο το οποίο βρίσκεται στον άξονα $x'x$

38. Οι τιμές μιας μεταβλητής X ομαδοποιήθηκαν σε 5 ισοπλατείς κλάσεις και προέκυψε ο παρακάτω πίνακας.

ΚΛΑΣΕΙΣ [-)	v_i	f_i	N_i	$F_i\%$
[,)				
[7,11)	12	0,3		
[,)			28	
[,)				90
[,)				
Σύνολο			-	-

Αν η πιθανότητα να ανήκει στην 1^η κλάση μια από τις παραπάνω τιμές την οποία παίρνουμε στην τύχη είναι $P = \frac{1}{4}$, τότε:

α) Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα και να βρείτε το ποσοστό των τιμών που βρίσκονται στο διάστημα 9 έως 18.

β) Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διακύμανση των παραπάνω τιμών της μεταβλητής X

γ) i) Να εξετάσετε αν οι παραπάνω τιμές αποτελούν ομοιογενές δείγμα.

ii) Αν στην κάθε μια από τις παραπάνω τιμές προσθέσουμε 41,4 μονάδες, τότε το νέο δείγμα είναι ομοιογενές: Δίνεται: $\sqrt{27,84} \cong 5,28$