ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε θα είναι και συνεχής στο x_0.

Μονάδες 10

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ;

Μονάδες 5

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Για οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2, ισχύει: $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$

Μονάδες 2

β. Κάθε συνάρτηση f συνεχής στο [α, β] με f(α)≠f(β) παίρνει μόνο όλες τις τιμές μεταξύ των f(α) και f(β).

Μονάδες 2

γ. Αν f συνεχής στο [α , β], τότε κρίσιμα σημεία της f είναι τα σημεία του διαστήματος (α, β) στα οποία η f ΄ μηδενίζεται.

Μονάδες 2

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα Δ τότε η εφαπτομένη σε ένα σημείο της $M(x_0\ ,\ f(x_0))$ βρίσκεται πάνω από την γραφική της παράσταση.

Μονάδες 2

ε. Ισχύει $\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)-f(a)$,όπου f συνεχής σε διάστημα Δ και α ∈ Δ.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f:R→R με f(x)≠ 0 για κάθε x∈R. Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z=\frac{1}{f(\alpha)}+\beta\cdot i$ και $w=\frac{1}{f(\beta)}-\alpha\cdot i$.

A. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{Re}(z\cdot w)=\frac{1}{f(\alpha)\cdot f(\beta)}+\alpha\cdot\beta$ και $\mathrm{Im}(z\cdot w)=\frac{\beta}{f(\beta)}-\frac{\alpha}{f(\alpha)}$.

Μονάδες 6

B. Αν $\mathrm{Im}(z\cdot w)=0$ και 0∉[α, β], να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ∈(α, β) τέτοιο ώστε ξ · f ΄(ξ) = f(ξ).

Μονάδες 9

Γ. Αν $\mathrm{Re}(z\cdot w)=0$ να αποδείξετε ότι α, β ετερόσημοι.

Μονάδες 5

Δ. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(2009)\cdot f(2010)\cdot x^2\cdot \eta\mu(\frac{1}{x}))$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού το R και σύνολο τιμών το R, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$\int_1^{f(x)}(3\cdot t^2+2)dt=x, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Α. Να αποδείξετε ότι $f^3(x)+2\cdot f(x)=x+3$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Β. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1}.

Μονάδες 5

Γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τους άξονες x΄x και y΄y.

Μονάδες 10

Δ. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από το σημείο Α(-1, 0).

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4^o

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, e)\to R$ με $f(1)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $\ln(f'(x))=f(x)-\ln x$ για κάθε $x\in(0, e)$.

Α. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Β. Αν $f(x)=-\ln(1-\ln x)$, με $x\in(0, e)$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e)$.

Μονάδες 4

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 5

γ) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος.

Μονάδες 5

δ) Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών ριζών της εξίσωσης $1-\ln x = e^{-\alpha}$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in R$.

Μονάδες 5