# Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
# ΤΡΙΩΡΟ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
# ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
# ΣΕ ΟΛΗ ΤΗΝ ΥΛΗ

## ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση $f$ παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $(\alpha,\beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του $x_0$ , στο οποίο όμως είναι **συνεχής** .

α) Αν $f'(x)>0$ στο $(\alpha,x_0)$ και $f'(x)<0$ στο $(x_0,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της $f$ .

β) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ , τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της $f$ και η $f$ είναι γνησίως μονότονη στο $(\alpha,\beta)$ .

Α2. Έστω $f$ μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο $\mathrm{A}$ .

α) Πότε λέμε ότι η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathrm{A}$;

β) Πότε λέμε ότι η $f$ είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα $(\alpha,\beta)$ του πεδίου ορισμού της;

γ) Πότε λέμε ότι η $f$ είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν $f$ συνάρτηση , συνεχής στο $R$ , τότε για κάθε $\alpha,\beta\in R$ ισχύει πάντα $\int_\alpha^\beta f^2(x)\,dx\geq 0$ .

β) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f+g\right)(x)=\ell\in R$ και $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=m\in R$ , τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\ell-m$ .

γ) Αν $f$ συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο ανοικτό διάστημα $(\alpha,\beta)$ , τότε ισχύει πάντα $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ .

δ) Αν μία συνάρτηση $f$ έχει πεδίο ορισμού το $R$ και σύνολο αφίξεως το κλειστό διάστημα $[-2012,2012]$ , τότε η $f$ δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη .

ε) Αν $z_1,z_2$ μιγαδικοί αριθμοί με $\mathrm{Re}(z_1+z_2)=0$, τότε οπωσδήποτε $\mathrm{Re}(z_1)=\mathrm{Re}(z_2)=0$ .

## ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί $z_1, z_2$ για τους οποίους ισχύει $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}=1$ .

Β1. Να αποδείξετε ότι $z_1^3+z_2^3=0$.

Β2. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών $0$, $z_1$, $z_2$ είναι ισόπλευρο .

Β3. Να αποδείξετε ότι $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{2012}+\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^{2012}=-1$.

Β4. Να αποδείξετε ότι $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Β5. Να αποδείξετε ότι $z_1 \neq z_2$ και ότι ο μιγαδικός $w=\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$ είναι φανταστικός.

## ΘΕΜΑ Γ

Έστω $f$, $g$ συναρτήσεις , παραγωγίσιμες στο $R$ για τις οποίες ισχύουν $f'(x)\neq 1$ , $f'(x)-g'(x)=1$ για κάθε $x\in R$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-2$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-x-2\big)=0$ .

Γ1. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)+2}{f(x)-x-2}$ .

Γ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f$ και $g$ στο $+\infty$ .

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μία το πολύ ρίζα στο $R$ .

Γ4. Να αποδείξετε ότι $f(x)-g(x)=x+4$ για κάθε $x\in R$.

Γ5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f$ και $g$ και τις ευθείες $x=-6$ και $x=2$ .

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f$ , $g$ συναρτήσεις , συνεχείς στο $R$ για τις οποίες ισχύουν $f(x)=\int_0^x \dfrac{t}{g(t)}dt+1$ και $g(x)=\int_0^x \dfrac{t}{f(t)}dt+1$ για κάθε $x\in R$ .

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$ για κάθε $x \in R$ .

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in R$ .

Δ3. Να προσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης $f$ .

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h$ με $h(x) = \int_1^x \frac{1}{f(t)} dt$ , τους άξονες $x'x$ και $y'y$ , και την ευθεία $x = 1$ .