ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3: ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ 1-1 – ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

[Υποκεφάλαιο 1.3 – Μονότονες συναρτήσεις – Αντίστροφη συνάρτηση του σχολικού βιβλίου].

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1.

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ αντιστρέφεται και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφη f^{-1}.

Λύση

- Πρέπει $x\geq 0$ και $1+\sqrt{x}\neq 0$ $\left(\textbf{το οποίο ισχύει}\right)\Leftrightarrow x\geq 0$ άρα το πεδίο ορισμού είναι το $\pi.o = A = D_f = [0,+\infty)$

1^o Βήμα: Αν $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \dfrac{\sqrt{x_1}}{1+\sqrt{x_1}}=\dfrac{\sqrt{x_2}}{1+\sqrt{x_2}}\Leftrightarrow \sqrt{x_1}+\sqrt{x_1x_2}=\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1x_2}\Leftrightarrow$
$\sqrt{x_1}=\sqrt{x_2}\Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα η f είναι 1-1.

2^o Βήμα: $y=f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\Leftrightarrow y+y\sqrt{x}=\sqrt{x}\Leftrightarrow y=\sqrt{x}(1-y)\Leftrightarrow \begin{cases} y\neq 1 \\ \sqrt{x}=\dfrac{y}{1-y}\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} y\neq 1 \\ \dfrac{y}{1-y}\geq 0 \\ x=\left(\dfrac{y}{1-y}\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} y\neq 1 \\ y\left(1-y\right)\geq 0 \\ x=\left(\dfrac{y}{1-y}\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} 1>y\geq 0 \\ x=\left(\dfrac{y}{1-y}\right)^2\end{cases},\ \textbf{(1)}$$

3^o Βήμα: Στην (1) στην θέση του $x\to y$ και $y\to x$ άρα η αντίστροφη είναι η $y=f^{-1}\left(x\right)=\left(\dfrac{x}{1-x}\right)^2$ με πεδίο ορισμού το $D_{f^{-1}}=[0,1)$, που είναι και το σύνολο τιμών της f **.**

Άσκηση 2.

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=2e^{x+1}-3$ αντιστρέφεται και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφη f^{-1}.

<u>Λύση</u>

Το πεδίο ορισμού είναι το $A=D_f=\mathbb{R}$.

Αν $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2e^{x_1+1}-3=2e^{x_2+1}-3\Leftrightarrow 2e^{x_1+1}=2e^{x_2+1}\Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα 1-1.

Λύνουμε την ισότητα $y=f(x)$ σαν εξίσωση ως προς x και παίρνουμε όλα τα y ώστε η εξίσωση $y=f(x)$ να έχει λύση στο πεδίο ορισμού της f το D_f

$$y=f(x)=2e^{x+1}-3\Leftrightarrow e^{x+1}=\frac{y+3}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=\ln\left(\frac{y+3}{2}\right)\\ \frac{y+3}{2}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\ln\left(\frac{y+3}{2}\right)-1\\ y>-3\end{cases}$$

Στην (1) στην θέση του $x\to y$ και $y\to x$ άρα η αντίστροφη είναι η $y=f^{-1}(x)=\ln\left(\frac{x+3}{2}\right)-1$ με πεδίο ορισμού το $D_{f^{-1}}=(-3,+\infty)$, που είναι και το σύνολο τιμών της f.

Άσκηση 3.

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e-\sqrt{x-e^2}\right)$ αντιστρέφεται και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφη f^{-1}.

Λύση άσκησης 3

Πρέπει $x-e^2 \geq 0$ και $e-\sqrt{x-e^2}>0 \Leftrightarrow x \geq e^2$ και $e>\sqrt{x-e^2} \Leftrightarrow x \geq e^2$ και $e^2 > x-e^2 \Leftrightarrow$ $x \geq e^2$ και $2e^2 > x \Leftrightarrow 2e^2 > x \geq e^2$ άρα το πεδίο ορισμού είναι το $A = D_f = [e^2, 2e^2)$.

Αν $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \ln\left(e-\sqrt{x_1-e^2}\right)=\ln\left(e-\sqrt{x_2-e^2}\right) \Leftrightarrow e-\sqrt{x_1-e^2}=e-\sqrt{x_2-e^2}$ $\Leftrightarrow \sqrt{x_1-e^2}=\sqrt{x_2-e^2} \Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα η f είναι 1-1.

Λύνουμε την ισότητα $y=f(x)$ σαν εξίσωση ως προς x και παίρνουμε όλα τα y ώστε η εξίσωση $y=f(x)$ να έχει λύση στο πεδίο ορισμού της f

$$y=f(x)=\ln\left(e-\sqrt{x-e^2}\right) \Leftrightarrow e^y = e-\sqrt{x-e^2} \Leftrightarrow \sqrt{x-e^2}=e-e^y \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} e-e^y \geq 0 \\ x-e^2=\left(e-e^y\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^1 \geq e^y \\ x=e^2+\left(e-e^y\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq y \\ x=e^2+\left(e-e^y\right)^2 \end{cases}, \quad \textbf{(1)}$$

Η λύση $x=e^2+\left(e-e^y\right)^2 \geq e^2$, επίσης $x=e^2+\left(e-e^y\right)^2 < 2e^2 \Leftrightarrow -2e^{y+1}+e^{2y}<0$ $\Leftrightarrow \underbrace{e^y}_{+}\left(e^y-2e\right)<0 \Leftrightarrow e^y-2e<0 \Leftrightarrow e^y<2e$ το οποίο ισχύει γιατί $y \leq 1 \Rightarrow e^y \leq e^1 < 2e$

Στην (1) στην θέση του $x \to y$ και $y \to x$ έτσι έχουμε την αντίστροφη $y=f^{-1}(x)=e^2+\left(e-e^x\right)^2=2e^2-2e^{x+1}+e^{2x}$ με πεδίο ορισμού το $D_{f^{-1}}=(-\infty,1]$, που είναι και το σύνολο τιμών της.

Άσκηση 4.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x-2}$,να βρείτε την αντίστροφη της και να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις τους στο ίδιο σύστημα αξόνων.

<u>Λύση</u>

Πρέπει $x-2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 2$ άρα το πεδίο ορισμού είναι το $A=D_f=[2,+\infty)$

Αν $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \sqrt{x_1-2}=\sqrt{x_2-2}\Rightarrow x_1-2=x_2-2\Rightarrow x_1=x_2$ άρα 1-1.

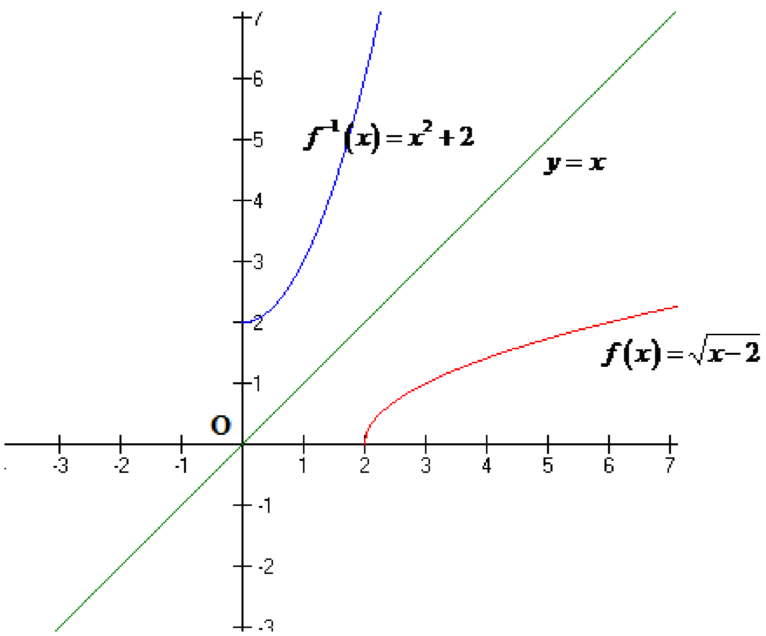
Λύνουμε την ισότητα $y=f(x)$ σαν εξίσωση ως προς x και παίρνουμε όλα τα y ώστε η εξίσωση $y=f(x)$ να έχει λύση στο πεδίο ορισμού της f.

$$y=f(x)=\sqrt{x-2}\Leftrightarrow \begin{cases} y\geq 0 \\ y^2=x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geq 0 \\ y^2+2=x, \end{cases} \textbf{(1)}$$

Στην (1) στην θέση του $x\to y$ και $y\to x$ άρα η αντίστροφη είναι η $y=f^{-1}(x)=x^2+2$ με πεδίο ορισμού το $D_{f^{-1}}=[0,+\infty)$, που είναι και το σύνολο τιμών της f .

Σχεδιάζουμε την $y=f^{-1}(x)=x^2+2$,με βάση την $g(x)=x^2$ και παράλληλη μεταφορά της κατακόρυφα και προς τα πάνω κατά 2

Η $f(x)=\sqrt{x-2}$ είναι συμμετρική της $y=f^{-1}(x)$ ως προς την διχοτόμο της γωνίας του 1^{ου} και 3^{ου} τεταρτημορίου την $y=x$, βλέπε σχήμα



Άσκηση 5.

Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι περιοδική δεν είναι 1-1.

<u>Λύση</u>

Έχουμε $f(x+T)=f(x-T)=f(x)$ με $T>0$ και επειδή $x\pm T\neq x$ η συνάρτηση f δεν είναι 1-1.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ με πεδίο ορισμού $A=[0,+\infty)$.

α) Να την εξετάσετε ως προς την μονοτονία της.

β) Να βρείτε τα ελάχιστο της.

γ) Να βρείτε την αντίστροφη της.

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών.

<u>Λύση</u>

α) Μετασχηματίζουμε την $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}=\dfrac{x^2+1-1}{x^2+1}=1-\dfrac{1}{x^2+1}$

Έστω $x_2>x_1\ge 0\Rightarrow x_2^2>x_1^2\ge 0\Rightarrow 1+x_2^2>1+x_1^2\ge 1\Rightarrow \dfrac{1}{1+x_2^2}<\dfrac{1}{1+x_1^2}\Rightarrow$

$-\dfrac{1}{1+x_2^2}>-\dfrac{1}{1+x_1^2}\Rightarrow 1-\dfrac{1}{1+x_2^2}>1-\dfrac{1}{1+x_1^2}\Rightarrow f(x_2)>f(x_1)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Έχουμε $0\le f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}\Leftrightarrow f(0)\le f(x)$ άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=0$ το 0

γ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ η f είναι 1-1 άρα έχει αντίστροφη.
Λύνουμε την ισότητα $y=f(x)$ σαν εξίσωση ως προς x και παίρνουμε όλα τα y ώστε η εξίσωση $y=f(x)$ να έχει λύση στο πεδίο ορισμού της f το $A=[0,+\infty)$.

$$y=f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}\Leftrightarrow yx^2+y=x^2\Leftrightarrow y=(1-y)x^2\Leftrightarrow \begin{cases} y\ne 1 \\ x^2=\dfrac{y}{1-y}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} y\ne 1 \\ x=\pm\sqrt{\dfrac{y}{1-y}} \\ \dfrac{y}{1-y}\ge 0\end{cases}$$, Επειδή $x\ge 0$

θα έχουμε $\begin{cases} y\ne 1 \\ x=\sqrt{\dfrac{y}{1-y}} \\ y(1-y)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} 0\le y<1 \\ x=\sqrt{\dfrac{y}{1-y}}\end{cases}$ άρα $f^{-1}(x)=\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ με $0\le x<1$.

δ) Το σύνολο τιμών της f είναι το πεδίο ορισμού της $y=f^{-1}(x)$ δηλαδή το $f(A)=[0,1)$

Άσκηση 2.

Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι περιττή και 1-1 τότε και η f^{-1} είναι περιττή.

Λύση

Αν $y \in f(A) \Rightarrow y = f(x)$ τέτοιο ώστε $x \in A$ και επειδή $f(x) = -f(-x) \Rightarrow$

$y = -f(x) \Rightarrow f(-x) = -y \Rightarrow -y \in f(A)$ αφού $-x \in A$.
Επίσης έχουμε $f(-x) = -f(x) = y$.

Αν $y = f(-x) \Leftrightarrow -x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow x = -f^{-1}(y)$ (1)

Αν $y = -f(x) \Leftrightarrow -y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(-y)$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε $x = f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$ άρα η f^{-1} είναι περιττή.

Άσκηση 3.

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $(fof)(x)=xf(x)$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(0)=0$

β) Αν $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\neq 0$ τότε να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

<u>Λύση</u>

α) Για $x=0$ η (1) γίνεται $(fof)(0)=0\cdot f(0)$ ή $f(f(0))=0\,(2)$

Για $x=f(0)$ η (1) γίνεται $(fof)(f(0))=f(0)\cdot f(f(0))\overset{(2)}{\Rightarrow} f((fof)(0))=f(0)\cdot 0=0\Rightarrow f(0)=0$

β) $1^{η}$ περίπτωση: $x_1,x_2\neq 0$

Αν $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f(f(x_1))=f(f(x_2))\overset{(1)}{\Rightarrow} x_1f(x_1)=x_2f(x_2)\ \Rightarrow x_1=x_2$
γιατί $f(x_1),f(x_2)\neq 0$ και $f(x_1)=f(x_2)$

$2^{η}$ περίπτωση : $x_1=0\neq x_2$
Αν $x_1=0\neq x_2\Rightarrow f(x_1)=f(0)=0\neq f(x_2)$

Άρα η f είναι 1-1, άρα αντιστρέφεται.

Άσκηση 4.

Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f\left(x\right)=x^3+2x+2$ με την αντίστροφη της.

Λύση *(2 τρόποι επίλυσης)*

Α' Τρόπος:

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ x=f(y) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=x^3+2x+2 \\ x=y^3+2y+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^3+2x+2 \\ y-x=x^3-y^3+2x-2y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=x^3+2x+2 \\ 0=\left(x-y\right)\left(x^2+xy+y^2\right)+3\left(x-y\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^3+2x+2 \\ 0=\left(x-y\right)\left(x^2+xy+y^2+3\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x^3+2x+2 \\ x-y=0 \quad \textbf{ή} \quad \underbrace{x^2+xy+y^2+3}_{+}=0 \quad \textbf{(αδύνατη)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=x^3+2x+2 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+x+2=0 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+1\right)\underbrace{\left(x^2-x+2\right)}_{+}=0 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$$

Β' Τρόπος:

Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σαν άθροισμα των αυξουσών συναρτήσεων x^3, $x+2$ και με βάσει την λυμένη άσκηση 7 αντί να λύσουμε την εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$ θα λύσουμε την $f(x)=x$ ή $f^{-1}\left(x\right)=x$ έτσι έχουμε

$f(x)=x \Leftrightarrow x=x^3+2x+2 \Leftrightarrow x^3+x+2=0 \Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-x+2\right)=0 \Leftrightarrow$

$x=-1 \Rightarrow y=-1$.

Άσκηση 5.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x-3}+x-e^{2}$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται

β) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(2\ln x+2)=f^{-1}(\ln^{2}x-1)$

<u>Λύση</u>

α) Το πεδίο ορισμού είναι το $A=D_f=\mathbb{R}$.
Η συνάρτηση e^{x} είναι γνησίως αύξουσα , η $x-3$ είναι γνησίως αύξουσα άρα και η σύνθεση τους e^{x-3} είναι γνησίως αύξουσα. Επίσης η $x-e^{2}$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα και το άθροισμα τους $f(x)=e^{x-3}+x-e^{2}$ είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1.

β) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα τότε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f, $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y=x$

Έτσι έχουμε $f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(x)=x\Leftrightarrow e^{x-3}+x-e^{2}=x\Leftrightarrow e^{x-3}=e^{2}\overset{1-1}{\Leftrightarrow}$

$$x-3=2\Leftrightarrow x=5$$

γ) πρέπει $x>0$, η εξίσωση γίνεται

$$f^{-1}(2\ln x+2)=f^{-1}(\ln^{2}x-1)\underset{1-1}{\overset{f^{-1}}{\Leftrightarrow}}2\ln x+2=\ln^{2}x-1\Leftrightarrow$$

$$\ln^{2}x-2\ln x-3=0\Leftrightarrow\begin{cases}\ln x=t\\ t^{2}-2t-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ln x=t\\ t=-1 \text{ ή } t=3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \ln x=-1 \text{ ή } \ln x=3\Leftrightarrow x=e^{-1} \text{ ή } x=e^{3}$$

Άσκηση 6.

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=x^3+6x^2+12x+10$

α) Να βρείτε την αντίστροφη της.

β) Να λυθεί η εξίσωση $\left(fof\right)\left(x\right)=3$.

<u>Λύση</u>

α) Το πεδίο ορισμού είναι το $A=D_f=\mathbb{R}$

Η f γίνεται $f(x)=x^3+6x^2+12x+10=x^3+3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2+2^3+2=\left(x+2\right)^3+2.$

Επειδή οι συναρτήσεις $x+2$ και x^3 είναι γνησίως αύξουσες άρα η σύνθεση τους $(x+2)^3$ θα είναι γνησίως αύξουσα άρα και η $f(x)=\left(x+2\right)^3+2$ θα είναι γνησίως αύξουσα.
Άρα θα είναι και 1-1 δηλαδή υπάρχει η αντίστροφη της.
Λύνουμε την εξίσωση $y=f\left(x\right)=\left(x+2\right)^3+2$ ως προς x

$y=\left(x+2\right)^3+2\Leftrightarrow\left(x+2\right)^3=y-2$

- Αν $y\geq 2$ έχουμε $x+2=\sqrt[3]{y-2}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{y-2}-2$ άρα $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-2}-2$ με $x\geq 2$

- Αν $y<2$ έχουμε $x+2=-\sqrt[3]{2-y}\Leftrightarrow x=-\sqrt[3]{2-y}-2$ άρα $f^{-1}(x)=-\sqrt[3]{2-x}-2$ με $x<2$

Τελικά έχουμε $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x-2}-2, & x\geq 2\\ -\sqrt[3]{2-x}-2, & x<2\end{cases}$ (1)

β) Η f ορίζεται στο $\mathbb{R}$,άρα ορίζεται η σύνθεση fof με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Η εξίσωση $\left(fof\right)\left(x\right)=3\Leftrightarrow f\left(f\left(x\right)\right)=3\Leftrightarrow f\left(x\right)=f^{-1}\left(3\right)$ (2)

Από την (1) για $x=3$ έχουμε $f^{-1}\left(3\right)=\sqrt[3]{3-2}-2=1-2=-1$.

Η εξίσωση (2) $\Leftrightarrow f(x)=-1\Leftrightarrow\left(x+2\right)^3+2=-1\Leftrightarrow\left(x+2\right)^3=-3\Leftrightarrow x+2=-\sqrt[3]{3}\Leftrightarrow x=-2-\sqrt[3]{3}$.

Άσκηση 7.

Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $12f\left(x^2\right)-4f^2\left(x\right)\geq 9,(1)$, να δείξετε ότι η f δεν αντιστρέφεται.

<u>Λύση</u>

Η σχέση (1) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Για $x=0 \Rightarrow 12f\left(0\right)-4f^2\left(0\right)\geq 9 \Leftrightarrow 0\geq 4f^2\left(0\right)-12f\left(0\right)+9 \Leftrightarrow$

$0\geq\left(2f\left(0\right)-3\right)^2 \Leftrightarrow f\left(0\right)=\dfrac{3}{2}$.

Για $x=1 \Rightarrow 12f\left(1\right)-4f^2\left(1\right)\geq 9 \Leftrightarrow 0\geq 4f^2\left(1\right)-12f\left(1\right)+9 \Leftrightarrow$

$0\geq\left(2f\left(1\right)-3\right)^2 \Leftrightarrow f\left(1\right)=\dfrac{3}{2}$

Έτσι έχουμε $f\left(0\right)=f\left(1\right)=\dfrac{3}{2}$ με $0\neq 1$ άρα η f δεν 1-1 οπότε δεν αντιστρέφεται.

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1.

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ έτσι ώστε $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$, (1)

α) Να δείξετε ότι $f(0)=1$, $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) Να δείξετε ότι $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

γ) Αν η f είναι 1-1 να δείξετε ότι $f^{-1}(x\cdot y)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$, $x,y>0$

<u>Λύση</u>

α) Επειδή $f(x)\in\mathbb{R}^*\Rightarrow f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

- Για $y=0$ η (1) γίνεται $f(x+0)=f(x)\cdot f(0)\Rightarrow f(x)=f(x)\cdot f(0)\overset{f(x)\neq 0}{\Rightarrow} 1=f(0)$
- Για $x\to x$ και για $y\to -x$ η (1) γίνεται $f(x-x)=f(x)\cdot f(-x)\Leftrightarrow$

  $f(0)=f(x)\cdot f(-x)\Leftrightarrow 1=f(x)\cdot f(-x)\Leftrightarrow f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$ επειδή $f(x)\neq 0$

β) Για $x\to\dfrac{x}{2}$ και για $y\to\dfrac{x}{2}$ η (1) γίνεται

$f\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}\right)=f\left(\dfrac{x}{2}\right)\cdot f\left(\dfrac{x}{2}\right)\Leftrightarrow f(x)=f^2\left(\dfrac{x}{2}\right)\geq 0\Leftrightarrow f(x)>0$ αφού $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Θέτουμε $\begin{cases} f^{-1}(x)=t\Leftrightarrow x=f(t) \\ f^{-1}(y)=v\Leftrightarrow y=f(v) \end{cases}$ ισχύει $f(t+v)=f(t)\cdot f(v)$ ή $f(t+v)=x\cdot y$ ή

$t+v=f^{-1}(x\cdot y)$ ή $f^{-1}(x)+f^{-1}(y)=f^{-1}(x\cdot y)$

Ημερομηνία τροποποίησης: 24/8/2011