ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ – ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

[Κεφ. 1.3: Μονότονες Συναρτήσεις - Αντίστροφη Συνάρτηση σχολικού βιβλίου].

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[0,4)$ και $(4,+\infty)$ αλλά όχι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $A=R_{+}\setminus\{4\}$.

<u>Λύση</u>

Η συνάρτηση είναι καλώς ορισμένη στο $\mathbb{R}$ όταν ισχύει ($x\ge 0$ και $2\text{-}\sqrt{x}\ne 0$) $\Leftrightarrow$ ($x\ge 0$ και $x\ne 4$) δηλαδή όταν $x\in A=R_{+}\setminus\{4\}$.

Για την μονοτονία της f σχηματίζουμε τον λόγο μεταβολής $\lambda=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ για τυχαία $x_1,x_2\in A$.

$$\lambda=\frac{\dfrac{\sqrt{x_2}}{2-\sqrt{x_2}}-\dfrac{\sqrt{x_1}}{2-\sqrt{x_1}}}{x_2-x_1}=\frac{2(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})}{(x_2-x_1)(2-\sqrt{x_2})(2-\sqrt{x_1})}=\frac{2(x_2-x_1)}{(x_2-x_1)(2-\sqrt{x_2})(2-\sqrt{x_1})(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1})}=$$

$$=\frac{2}{(2-\sqrt{x_2})(2-\sqrt{x_1})(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1})}.$$

Το πρόσημο του λ εξαρτάται από το πρόσημο των $2-\sqrt{x_2}$ και $2-\sqrt{x_1}$. Έτσι:

- Αν $x_1,x_2\in[0,4)$ είναι ($0\le x_1<4$ και $0\le x_2<4$) $\Leftrightarrow$ ($\sqrt{x_1}<2$ και $\sqrt{x_2}<2$) οπότε

  $(2-\sqrt{x_2})(2-\sqrt{x_1})>0$.

  Δηλαδή $\lambda>0$.

- Αν $x_1,x_2\in(4,+\infty)$ είναι ($x_1>4$ και $x_2>4$) $\Leftrightarrow$ ($\sqrt{x_1}>2$ και $\sqrt{x_2}>2$) οπότε

$(2-\sqrt{x_2})(2-\sqrt{x_1})>0$.

Δηλαδή $\lambda>0$.

- Αν $x_1\in[0,4)$ και $x_2\in(4,+\infty)$ τότε

$x_1<4<x_2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1}<2<\sqrt{x_2} \Leftrightarrow (2-\sqrt{x_2})(2-\sqrt{x_1})<0$.

Δηλαδή $\lambda<0$.

Σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[0,4)$ και $(4,+\infty)$ είναι $\lambda>0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε αυτά όχι όμως και στην ένωσή τους .

Άσκηση 2.

Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις:

i. $f(x)=\dfrac{5}{\sqrt{9-x^2}}$

ii. $g(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{3+x^2}}$

<u>Λύση</u>

i. Η f είναι καλά ορισμένη στο $\mathbb{R}$ όταν $9-x^2>0 \Leftrightarrow x\in(-3,3)=\Delta$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in(-3,0]$ με $x_1<x_2$ είναι:

$$x_1<x_2\le 0 \Leftrightarrow x_1^2>x_2^2 \Leftrightarrow -x_1^2<-x_2^2 \Leftrightarrow 9-x_1^2<9-x_2^2 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{9-x_1^2}<\sqrt{9-x_2^2} \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{9-x_1^2}}>\frac{5}{\sqrt{9-x_2^2}} \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2).$$

Δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-3,0]$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in[0,3)$ με $x_1<x_2$ είναι:

$$0\le x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^2<x_2^2 \Leftrightarrow -x_1^2>-x_2^2 \Leftrightarrow 9-x_1^2>9-x_2^2 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{9-x_1^2}>\sqrt{9-x_2^2} \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{9-x_1^2}}<\frac{5}{\sqrt{9-x_2^2}} \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

Δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,3)$.

ii. Η g ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

Αν $x_1, x_2 \in[0,+\infty)$ είναι:

$$g(x_1)<g(x_2) \Leftrightarrow \frac{2x_1}{\sqrt{3+x_1^2}}<\frac{2x_1}{\sqrt{3+x_2^2}} \Leftrightarrow \frac{4x_1^2}{3+x_1^2}<\frac{4x_2^2}{3+x_2^2} \Leftrightarrow 12x_1^2+4x_1^2x_2^2<12x_2^2+4x_1^2x_2^2 \Leftrightarrow$$

$$x_1^2<x_2^2 \underset{x_2>0}{\overset{x_1>0}{\Leftrightarrow}} x_1<x_2$$

Αν $x_1, x_2 \in(-\infty,0]$ είναι:

$$g(x_1)<g(x_2)\Leftrightarrow \frac{2x_1}{\sqrt{3+x_1^2}}<\frac{2x_1}{\sqrt{3+x_2^2}}\Leftrightarrow \frac{4x_1^2}{3+x_1^2}>\frac{4x_2^2}{3+x_2^2}\Leftrightarrow 12x_1^2+4x_1^2x_2^2>12x_2^2+4x_1^2x_2^2\Leftrightarrow$$

$$x_1^2>x_2^2 \underset{x_2<0}{\overset{x_1<0}{\Leftrightarrow}} x_1<x_2$$

Επιπλέον αν $x_1<0<x_2$ είναι $\frac{2x_1}{\sqrt{3+x_1^2}}<0<\frac{2x_2}{\sqrt{3+x_2^2}}\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$.

Δηλαδή σε κάθε περίπτωση και για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία:
$x_1<x_2 \Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$ δηλαδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 3.

Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις:

i. $f(x)=\dfrac{11^x}{\sqrt{11-x}}$

ii. $g(x)=\ln(x-\pi)-e^{\pi-x}$

<u>Λύση</u>

i. Η f ορίζεται στο $\Delta=\{x\in R:\ 11-x>0\}$ δηλαδή στο $\Delta=\{x\in R:\ x<11\}$ δηλαδή στο $\Delta=(-\infty,11)$.

Για κάθε $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$ είναι:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow -x_1>-x_2 \Leftrightarrow 11-x_1>11-x_2 \Leftrightarrow \sqrt{11-x_1}>\sqrt{11-x_2} \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{11-x_1}}<\dfrac{1}{\sqrt{11-x_2}}}$ (1)

και $x_1<x_2 \Leftrightarrow \boxed{11^{x_1}<11^{x_2}}$ (2).

Με πολλαπλασιασμό των (1) και (2) (αφού όλες οι παραστάσεις είναι θετικές) έχουμε

$\dfrac{11^{x_1}}{\sqrt{11-x_1}}<\dfrac{11^{x_2}}{\sqrt{11-x_2}} \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

ii. Η g ορίζεται στο $\Delta=\{x\in R:\ x-\pi>0\}$ δηλαδή στο $\Delta=\{x\in R:\ x>\pi\}$ δηλαδή στο $\Delta=(\pi,+\infty)$.

Για κάθε $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$ είναι:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1-\pi<x_2-\pi \overset{\ln x\uparrow}{\Leftrightarrow} \boxed{\ln(x_1-\pi)<\ln(x_2-\pi)}$ (3)

και $x_1<x_2 \Leftrightarrow -x_1>-x_2 \Leftrightarrow \pi-x_1>\pi-x_2 \overset{e^x\uparrow}{\Leftrightarrow} e^{\pi-x_1}>e^{\pi-x_2} \Leftrightarrow \boxed{-e^{\pi-x_1}<-e^{\pi-x_2}}$ (4).

Με πρόσθεση των (3), (4) έχουμε $g(x_1)<g(x_2)$ οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Άσκηση 4.

Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις:

i. $f(x)=\dfrac{1}{x}-\sqrt{x}$

ii. $g(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$

<u>Λύση</u>

i. Η f ορίζεται στο $\Delta=\{x\in R:\ x\geq 0\ \ \text{και}\ \ x\neq 0\}$ δηλαδή στο $\Delta=(0,+\infty)$. Για κάθε $x_1, x_2\in\Delta$ με $x_1\neq x_2$ είναι:

$$\lambda=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\left(\dfrac{1}{x_2}-\sqrt{x_2}\right)-\left(\dfrac{1}{x_1}-\sqrt{x_1}\right)}{x_2-x_1}=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2(x_2-x_1)}-\frac{\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}}{x_2-x_1}=$$

$$-\frac{1}{x_1x_2}-\frac{\left(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}\right)\left(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}\right)}{\left(x_2-x_1\right)\left(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}\right)}=-\frac{1}{x_1x_2}-\frac{\left(x_2-x_1\right)}{\left(x_2-x_1\right)\left(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}\right)}=$$

$$-\frac{1}{x_1x_2}-\frac{1}{\left(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}\right)}<0 \quad \text{αφού} \quad x_1, x_2\in(0,+\infty).$$

Επομένως η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

ii. Η g ορίζεται στο $\Delta=\{x\in R:\ x\neq 1\}$ δηλαδή στο $\Delta=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. Για κάθε $x_1, x_2\in\Delta$ με $x_1\neq x_2$ είναι:

$$\lambda=\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\dfrac{2x_2+3}{x_2-1}-\dfrac{2x_1+3}{x_1-1}}{x_2-x_1}=\frac{\dfrac{2x_2x_1-2x_2+3x_1-3-2x_2x_1-3x_2+2x_1+3}{\left(x_2-1\right)\left(x_1-1\right)}}{x_2-x_1}=$$

$$\frac{-2x_2+3x_1-3x_2+2x_1}{\left(x_2-x_1\right)\left(x_2-1\right)\left(x_1-1\right)}=\frac{-5(x_2-x_1)}{\left(x_2-x_1\right)\left(x_2-1\right)\left(x_1-1\right)}=\frac{-5}{\left(x_2-1\right)\left(x_1-1\right)}$$

- Αν $x_1, x_2\in(-\infty,1)$ είναι $x_1-1<0$ και $x_2-1<0$ οπότε $(x_1-1)(x_2-1)>0$ δηλαδή $\lambda<0$.
- Αν $x_1, x_2\in(1,+\infty)$ είναι $x_1-1>0$ και $x_2-1>0$ οπότε $(x_1-1)(x_2-1)>0$ δηλαδή $\lambda<0$.

- Αν $x_1 \in (-\infty,1)$, $x_2 \in (1,+\infty)$ είναι $x_1 - 1 < 0$ και $x_2 - 1 > 0$ οπότε $(x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0$ δηλαδή $\lambda > 0$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$ αλλά δεν είναι γνησίως φθίνουσα στην ένωσή τους δηλαδή στο πεδίο ορισμού της Δ.

Άσκηση 5.

Α) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{1}{e^x}+e^{\frac{1}{x}}-\ln x$.

<u>Λύση</u>

Α) Για κάθε $x_1, x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ είναι:

$$x_1<x_2 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x_1)<f(x_2) \overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} \boxed{\frac{1}{f(x_1)}>\frac{1}{f(x_2)}} \quad (1)$$

$$x_1<x_2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2} \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} \boxed{f\left(\frac{1}{x_1}\right)>f\left(\frac{1}{x_2}\right)} \quad (2)$$

Με πρόσθεση των (1), (2) είναι: $g(x_1)>g(x_2)$ άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Β) Η συνάρτηση e^x είναι γνησίως αύξουσα και θετική στο $\mathbb{R}$ επομένως και στο $(0,+\infty)$.
Άρα για κάθε $x_1, x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

- Με εφαρμογή του Α για $f(x)=e^x$, $x_1<x_2 \overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow} g(x_1)>g(x_2) \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{1}{e^{x_1}}+e^{\frac{1}{x_1}}>\dfrac{1}{e^{x_2}}+e^{\frac{1}{x_2}}}$ (3)

- Επίσης $x_1<x_2 \overset{\ln x\uparrow}{\Leftrightarrow} \ln x_1<\ln x_2 \Leftrightarrow \boxed{-\ln x_1>-\ln x_2}$ (4)

Με πρόσθεση των (3), (4) προκύπτει ότι $h(x_1)>h(x_2)$ οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Άσκηση 6.

Α) Η συνάρτηση f, ορισμένη στο $\mathbb{R}$, είναι άρτια και γνησίως μονότονη στο $[0,\alpha]$, $\alpha>0$, με $f(0)=\alpha$, $f(\alpha)=0$.

i. Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-\alpha,0]$και γνησίως φθίνουσα στο $[0,\alpha]$.

ii. Αποδείξτε ότι η $f\circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-\alpha,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,\alpha]$.

Β) Μελετήστε την μονοτονία της συνάρτησης $h(x)=1-\left(1-x^2\right)^2$ στο $[-1,1]$.

<u>Λύση</u>

Α) i. Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη στο $[0,\alpha]$ θα ισχύει μόνο μία από τις ισοδυναμίες $x_1<x_2\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$ (1), $x_1<x_2\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$ (2) για κάθε $x_1,x_2\in[0,\alpha]$.

Όμως $0<\alpha$ και $f(0)=\alpha>0=f(\alpha)$ δηλαδή $f(0)>f(\alpha)$ από όπου και συμπεραίνουμε ότι ισχύει η (2) οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\alpha]$.

Επίσης για κάθε $x_1,x_2\in[-\alpha,0]$ με $x_1<x_2$ είναι:

$-\alpha\le x_1<x_2\le 0\Leftrightarrow \alpha\ge -x_1>-x_2\ge 0$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\alpha]$ θα έχουμε $f(-x_1)<f(-x_2)\overset{f\text{ άρτια}}{\Leftrightarrow} f(x_1)<f(x_2)$.

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-\alpha,0]$.

ii. Έστω $x_1,x_2\in[-\alpha,0]$ με $x_1<x_2$. Τότε διαδοχικά έχουμε:

$$-\alpha\le x_1<x_2\le 0\overset{f\uparrow\text{ στο }[-\alpha,0]}{\Leftrightarrow} f(-\alpha)\le f(x_1)<f(x_2)\le f(0)\overset{f\text{ άρτια}}{\Leftrightarrow} f(\alpha)\le f(x_1)<f(x_2)\le f(0)\Leftrightarrow$$

$$0\le f(x_1)<f(x_2)\le\alpha.$$

Δηλαδή $f(x_1),f(x_2)\in[0,\alpha]$ με $f(x_1)<f(x_2)$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\alpha]$θα είναι $f\left(f(x_1)\right)>f\left(f(x_2)\right)$ από το οποίο προκύπτει ότι η σύνθεση $f\circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-\alpha,0]$.

Ομοίως προκύπτει και ότι $f\circ f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\alpha]$.

Πράγματι αν $x_1,x_2\in[0,\alpha]$ με $x_1<x_2$. Τότε διαδοχικά έχουμε:

$$0 \le x_1 < x_2 \le \alpha \overset{f \downarrow \text{στο} [0,\alpha]}{\Leftrightarrow} f(0) \ge f(x_1) > f(x_2) \ge f(\alpha) \Leftrightarrow \alpha \ge f(x_1) > f(x_2) \ge 0 .$$

Δηλαδή $f(x_1), f(x_2) \in [0,\alpha]$ με $f(x_1) > f(x_2)$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\alpha]$ θα είναι $f\left(f(x_1)\right) < f\left(f(x_2)\right)$ από το οποίο προκύπτει ότι η σύνθεση $f \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\alpha]$.

Β) Εφαρμογή του ερωτήματος Α όπου $f(x) = 1 - x^2$.

Πράγματι για την $f(x) = 1 - x^2$ έχουμε:

- $f(-x) = 1 - (-x)^2 = 1 - x^2 = f(x)$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ επομένως η f είναι άρτια στο $\mathbb{R}$.
- Επίσης είναι της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha = -1 < 0$ και επομένως είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ δηλαδή στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$ δηλαδή στο $[0, +\infty)$ από όπου και συμπεραίνουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$.
- Τέλος ισχύει $f(0) = 1$ και $f(1) = 0$.

Επομένως σύμφωνα με το Α η συνάρτηση $f \circ f$, δηλαδή η $h(x) = 1 - (1 - x^2)^2$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,0]$και γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$.

Άσκηση 7.

Αν $f(x)=e^{x}+x^{3}+x$

Α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία στο $\mathbb{R}$.

Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=1$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Γ. Αν g είναι μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ να λύσετε την ανίσωση $g(x^{3}+e^{x})<g(1-x)$.

<u>Λύση</u>

Α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι:

$x_1<x_2 \overset{e^{x}\ \text{γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} e^{x_1}<e^{x_2}$ (1)

$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^3<x_2^3$ (2)

Επίσης $x_1<x_2$ (3)

Με πρόσθεση των (1), (2), (3) είναι: $e^{x_1}+x_1^3+x_1<e^{x_2}+x_2^3+x_2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$ απ' όπου προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Β) Για $x=0$ είναι $f\left(0\right)=e^{0}+0^{3}+0=1$, δηλαδή η $x=0$ είναι προφανής λύση της εξίσωσης $f(x)=1$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο ρίζες θ,ξ με $\theta<\xi$ της εξίσωσης $f(x)=1$ δηλαδή $f(\theta)=f(\xi)=1$, θα είναι λόγω μονοτονίας $f(\theta)<f(\xi) \Leftrightarrow 1<1$ Άτοπο.

Επομένως η ρίζα $x=0$ της εξίσωσης $f(x)=1$ είναι μοναδική.

Γ) Επειδή η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και $(x^{3}+e^{x}),\left(1-x\right)\in\mathbb{R}$ διαδοχικά έχουμε:

$g(x^{3}+e^{x})<g(1-x) \Leftrightarrow x^{3}+e^{x}>1-x \Leftrightarrow x^{3}+e^{x}+x>1 \Leftrightarrow f(x)>f(0) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x>0$.

Άρα η λύση της ανίσωσης είναι κάθε $x\in\left(0,+\infty\right)$.

Άσκηση 8.

Α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Β) Να λύσετε την ανίσωση $\ln(x^2 + x + 1) + x^2 < \ln(x + 2) + 1$.

<u>Λύση</u>

Α) Για κάθε $x_1,\ x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ είναι:

$x_1 < x_2 \overset{\ln x \uparrow}{\Leftrightarrow} \ln x_1 < \ln x_2$ (1)

Επίσης $x_1 < x_2$ (2)

Με πρόσθεση των (1), (2) είναι: $\ln x_1 + x_1 < \ln x_2 + x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

απ' όπου προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Β) Για κάθε $x > -2$ είναι:

$\ln(x^2 + x + 1) + x^2 < \ln(x + 2) + 1 \Leftrightarrow \ln(x^2 + x + 1) + x^2 + x + 1 < \ln(x + 2) + 1 + x + 1 \Leftrightarrow$

$\ln(x^2 + x + 1) + x^2 + x + 1 < \ln(x + 2) + x + 2 \Leftrightarrow f(x^2 + x + 1) < f(x + 2) \overset{f \uparrow}{\Leftrightarrow} x^2 + x + 1 < x + 2 \Leftrightarrow$

$x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ δεκτές λύσεις αφού $x > -2$.

Άσκηση 9.

Α) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{\pi}{2}-x\right)συνx$ στο $[0,\pi]$.

Β) Να αποδείξετε $\frac{\pi}{2e}>\frac{συνe}{συνe-1}$.

<u>Λύση</u>

Α) Για κάθε $x_1, x_2 \in [0,\pi]$ με $x_1<x_2$ είναι:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow -x_1>-x_2 \Leftrightarrow \boxed{\frac{\pi}{2}-x_1>\frac{\pi}{2}-x_2}$ (1).

$x_1<x_2 \overset{συνx\ \downarrow\ στο\ [0,\pi]}{\Leftrightarrow} \boxed{συνx_1>συνx_2}$ (2).

- Αν $x_1, x_2 \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με $x_1<x_2$ θα είναι $\left(\frac{\pi}{2}-x_1\right)>0$, $συνx_1>0$, $\left(\frac{\pi}{2}-x_2\right)\geq 0$, $συνx_2\geq 0$

  οπότε οι (1), (2) με πολλαπλασιασμό δίνουν $f(x_1)>f(x_2)$,

  άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

- Αν $x_1, x_2 \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ με $x_1<x_2$ θα είναι $\left(\frac{\pi}{2}-x_1\right)\leq 0$, $συνx_1\leq 0$, $\left(\frac{\pi}{2}-x_2\right)<0$, $συνx_2<0$

  οπότε οι (1), (2) με πολλαπλασιασμό δίνουν $f(x_1)<f(x_2)$,

  άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

Β) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ και $\frac{\pi}{2}<e<\pi$. Επομένως:

$f(e)<f(\pi) \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2}-e\right)συνe<\left(\frac{\pi}{2}-\pi\right)συν\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}συνe-eσυνe<\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}συνe-\frac{\pi}{2}<eσυνe \Leftrightarrow$

$\piσυνe-\pi<2eσυνe \Leftrightarrow \pi(συνe-1)<2eσυνe \Leftrightarrow \frac{\pi}{2e}>\frac{συνe}{συνe-1}$ (αφού $συνe-1<0$).

Άσκηση 10.

Α) Να αποδείξετε ότι η $f(x)=e^x\,\varepsilon\varphi x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Β) Να αποδείξετε ότι $e^{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}}<\sqrt{3}$.

<u>Λύση</u>

Α) Για κάθε $x_1, x_2 \in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ με $x_1<x_2$ είναι:

$0\le x_1<x_2<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow 0<e^{x_1}<e^{x_2}$ (1) διότι e^x γνησίως αύξουσα.

$0\le x_1<x_2<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow 0\le \varepsilon\varphi x_1<\varepsilon\varphi x_2$ (2) διότι $\varepsilon\varphi x$ γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Από (1) και (2) με πολλαπλασιασμό είναι $f(x_1)<f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Β) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ και $0<\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{\pi}{2}$ θα είναι

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)<f\left(\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow e^{\frac{\pi}{4}}\,\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}<e^{\frac{\pi}{3}}\,\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow e^{\frac{\pi}{4}}<e^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{3}\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}\frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{e^{\frac{\pi}{3}}}<\sqrt{3}\Leftrightarrow e^{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}}<\sqrt{3}\,.$$

<u>2ος Τρόπος</u>:

Έχουμε $e^{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}}<\sqrt{3}\Leftrightarrow e^{\frac{-\pi}{12}}<\sqrt{3}$ που ισχύει, αφού $e^{\frac{-\pi}{12}}<e^0=1<\sqrt{3}$

Άσκηση 11.

Α) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x)=x^2+\ln(1+x^2)$.

Β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα μόνο σημείο.

<u>Λύση άσκησης 13</u>

Α) Η f ορίζεται στο $\mathbb{R}$ αφού $1+x^2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1,\ x_2\in(-\infty,0]$ με $x_1<x_2$ είναι:

$$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^2>x_2^2 \Leftrightarrow 1+x_1^2>1+x_2^2 \overset{\ln x \text{ γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} \ln(1+x_1^2)>\ln(1+x_2^2) \quad (1)$$
$$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^2>x_2^2 \quad (2)$$

Οι (1), (2) με πρόσθεση δίνουν $f(x_1)>f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.

Για κάθε $x_1,\ x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ είναι:

$$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^2<x_2^2 \Leftrightarrow 1+x_1^2<1+x_2^2 \overset{\ln x \text{ γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} \ln(1+x_1^2)<\ln(1+x_2^2) \quad (3)$$
$$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^2<x_2^2 \quad (4)$$

Οι (3), (4) με πρόσθεση δίνουν $f(x_1)<f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$.

Πράγματι για $x=0$ ισχύει $f(0)=0^2+\ln\left(1+0^2\right)=0$, οπότε η $x=0$ είναι προφανής λύση της εξίσωσης $f(x)=0$.
Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει και δεύτερη λύση $\rho>0$ τότε ως λύση θα ικανοποιεί την εξίσωση δηλαδή θα ισχύει $f(\rho)=0$ (5).

Όμως λόγω μονοτονίας της f στο $[0,+\infty)$ θα ισχύει $\rho>0 \overset{f \text{ γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} f(\rho)>f(0) \overset{(5)}{\Leftrightarrow} 0>0$ το οποίο είναι Άτοπο.
Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι υπάρχει δεύτερη λύση $\rho<0$.

Επομένως η λύση $x=0$ είναι μοναδική για την εξίσωση $f(x)=0$ δηλαδή η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα μόνο σημείο (την αρχή των αξόνων).

Άσκηση 12.

Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία A(0,2), B(1,3) και ισχύει $|2f(x)-5|\leq 1$ αποδείξτε ότι έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Λύση

Είναι:

$$\left|2f(x)-5\right|\leq 1\Leftrightarrow$$

$$-1\leq 2f(x)-5\leq 1\Leftrightarrow$$

$$4\leq 2f(x)\leq 6\Leftrightarrow$$

$2\leq f(x)\leq 3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (1)

Επιπλέον επειδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα A(0,2) και B(1,3) θα είναι $f\left(0\right)=2$ και $f\left(1\right)=3$.

Οπότε η (1) γίνεται: $f\left(0\right)\leq f(x)\leq f\left(1\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Συνεπώς η f έχει μέγιστη τιμή το $f\left(1\right)=3$ και ελάχιστη τιμή το $f\left(0\right)=2$.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Α) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f^3(x)+3f(x^3)+2$ είναι επίσης γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=e^{3x}+3e^{x^3}+2$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>

Α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι:

$$x_1<x_2 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x_1)<f(x_2) \Leftrightarrow f^3(x_1)<f^3(x_2) \quad (1)$$

$$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^3<x_2^3 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x_1^3)<f(x_2^3) \Leftrightarrow 3f(x_1^3)<3f(x_2^3) \quad (2)$$

Με πρόσθεση των (1), (2) έχουμε $f^3(x_1)+3f(x_1^3)<f^3(x_2)+3f(x_2^3) \Leftrightarrow$

$$f^3(x_1)+3f(x_1^3)+2<f^3(x_2)+3f(x_2^3)+2 \Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$$

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Β) Εφαρμογή του Α για $f(x)=e^x$ αφού είναι γνησίως αύξουσα και επιπλέον είναι $f^3(x)+3f(x^3)+2=(e^x)^3+3e^{x^3}+2=e^{3x}+3e^{x^3}+2=h(x)$.

Επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα.

Άσκηση 2.

Α) Αποδείξτε ότι αν f γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ και g γνησίως φθίνουσα στο f(Δ) τότε η σύνθεση της f με την g είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Β) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $g(x)=-x^3-x+1$ στο $[-1,1]$.

Γ) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την $h(x)=-\sigma\upsilon\nu^3 x-\sigma\upsilon\nu x+1$ στο $[0,\pi]$.

Λύση

Α) Έστω $x_1<x_2$ με $x_1, x_2\in\Delta$. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ θα ισχύει $f(x_1)>f(x_2)$.
Όμως οι $f(x_1), f(x_2)\in f(\Delta)$ στο οποίο η g είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε $g(f(x_1))<g(f(x_2))$ δηλαδή $(g\circ f)(x_1)<(g\circ f)(x_2)$, συνεπώς η $g\circ f$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ αφού για κάθε $x_1, x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει $(g\circ f)(x_1)<(g\circ f)(x_2)$.

Β) Για κάθε $x_1,\ x_2\in[-1,1]$ με $x_1<x_2$ είναι:

$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^3<x_2^3 \Leftrightarrow -x_1^3>-x_2^3$ (1).

Επίσης $x_1<x_2 \Leftrightarrow -x_1>-x_2$ (2).

Με πρόσθεση των (1) και (2) είναι:

$$-x_1^3-x_1>-x_2^3-x_2 \Leftrightarrow -x_1^3-x_1+1>-x_2^3-x_2+1 \Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2)$$

από όπου προκύπτει ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1]$.

Γ) Η συνάρτηση h είναι σύνθεση της f με την g, όπου $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ που είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi]$ και $g(x)=-x^3-x+1$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1]$. Τέλος επειδή ισχύει $-1\le\sigma\upsilon\nu x\le 1$ για κάθε $x\in[0,\pi]$ έχουμε ότι $g([0,\pi])=[-1,1]$.

Εφαρμόζοντας το (Α) ερώτημα στις συναρτήσεις $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ και $g(x)=-x^3-x+1$ προκύπτει ότι η σύνθεση $g\circ f$ δηλαδή η $h(x)=-\sigma\upsilon\nu^3 x-\sigma\upsilon\nu x+1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\pi]$.

Άσκηση 3.

i. Αν η συνάρτηση f έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα Δ να αποδείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο Δ.

ii. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}e^x - e^x - \sqrt{x} + 1$ δεν είναι γνησίως μονότονη στο $[0,+\infty)$.

Λύση

i. Έστω $\rho_1 < \rho_2$ δύο τουλάχιστον ρίζες της f στο διάστημα Δ.
Τότε $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$ (1) .

Αν υποθέσουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε: $\rho_1 < \rho_2 \Leftrightarrow f(\rho_1) < f(\rho_2) \Leftrightarrow 0 < 0$
Άτοπο.

Αν υποθέσουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ τότε: $\rho_1 < \rho_2 \Leftrightarrow f(\rho_1) > f(\rho_2) \Leftrightarrow 0 > 0$
Άτοπο.

Επομένως αν υποθέσουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ καταλήγουμε σε άτοπο άρα η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο Δ.

ii. Η συνάρτηση γίνεται: $f(x) = e^x(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}-1) = (\sqrt{x}-1)(e^x-1)$.

Είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)(e^x-1) = 0 \Leftrightarrow$

$$(\sqrt{x}-1=0 \text{ ή } e^x-1=0) \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt{x}=1 \text{ ή } e^x=1) \Leftrightarrow$$

$$(x=1 \text{ ή } x=0)$$

Δηλαδή η f έχει δύο ρίζες στο $[0,+\infty)$ οπότε σύμφωνα με το υποερώτημα (i) η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο $[0,+\infty)$.

Ημερομηνία τροποποίησης: 23/8/2011