

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (ΟΡΙΑ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

ΔΙΑΡΚΕΙΑ : 3 ώρες

ΘΕΜΑ 1°

A.

1. Δώστε τον ορισμό της 1-1 συνάρτησης. (μονάδες 4)
2. Πότε μια συνάρτηση λέγεται συνεχής στο  $[a, \beta]$ ; (μονάδες 4)
3. Να αποδείξετε το παρακάτω θεώρημα (ενδιάμεσων τιμών)

Έστω μια συνάρτηση  $f$ , που είναι ορισμένη και συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$  με  $f(a) \neq f(\beta)$ , τότε για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(a)$ ,  $f(\beta)$  υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in (a, \beta)$  τέτοιος ώστε  $f(x_0) = \eta$

(μονάδες 7)

B.

Χαρακτηρίστε τις προτάσεις που ακολουθούν ως  $\Sigma$  αν είναι σωστές ή  $\Lambda$  αν είναι λάθος

1. Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι συνεχείς στο  $x_0$  τότε και η σύνθεσή τους  $g \circ f$  θα είναι συνεχής στο  $x_0$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty$  ή  $-\infty$  ( $\nu \in \mathbb{N}$ )
4. Πάντα ισχύει η ισοδυναμία  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - 1) = 0$ .
5. Αν μία συνάρτηση είναι 1-1 τότε δεν είναι κατ' ανάγκην και μονότονη.

(μονάδες  $5 \times 2 = 10$ )

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>** (τεχνολογικής 2000 )

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 16 & , \quad 0 < x < 5 \\ (\alpha^2 + \beta^2) \ln(x - 5 + e) + 2(\alpha + 1) e^{5-x} & , \quad x \geq 5 \end{cases}$$

- A. Να βρεθούν τα,  $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$ . (μονάδες 8)
- B. Να βρεθούν τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , ώστε η συνάρτηση  $f$  να είναι συνεχής στο  $x_0 = 5$ . (μονάδες 10)
- Γ. Για  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 0$  να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . (μονάδες 7)

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το  $\mathbb{R}$ . Αν για κάθε πραγματικό  $x$  ισχύει  $f^5(x) + f(x) + 3x = 0$  τότε να δείξετε ότι:

- α) η  $f$  αντιστρέφεται (μονάδες 7)
- β) να δείξετε ότι  $f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}(x^5 + x)$  (μονάδες 6)
- γ) να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει η  $f(x)$  την  $y=x$  (μονάδες 6)
- δ) να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x)}{-x^4}$  (μονάδες 6)

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις  $f, g$  με Πεδίο ορισμού και Σύνολο Τιμών το  $[\alpha, \beta]$ .

A. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in [a, \beta]$  τέτοιο ώστε

$$(f \circ g)(x_0) + (g \circ f)(x_0) = 2x_0. \quad (\text{μονάδες } 10)$$

B. Αν επιπλέον η  $f$  είναι περιττή συνάρτηση,  $-1, 1 \in [a, \beta]$  και

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 5}{x - 1} = 10 \text{ τότε:}$$

i) Να υπολογίσετε την τιμή  $f(1)$ . (μονάδες 7)

ii) Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) + 5}{x + 1}$ . (μονάδες 8)

Απαντήστε σε όλα τα Θέματα, με όποια σειρά θέλετε, με ηρεμία και προσοχή.

Καλή επιτυχία!!!