

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΣΥΝΘΗΚΩΝ ΚΑΙ ΣΧΕΣΕΩΝ

1. Συνάρτηση f 1-1 $\rightarrow \exists f^{-1}$ και η εξίσωση $f(x) = \eta$ έχει το πολύ μία ρίζα.
2. Συνάρτηση f γνησίως μονότονη $\rightarrow f$ 1-1...κτλ και $f \uparrow$ μόνο ή $f \downarrow$ μόνο
3. f συνεχής και $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in [\alpha, \beta] \rightarrow f$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha, \beta]$
4. $f' > 0$ ή < 0 στο διάστημα $\Delta \rightarrow f \uparrow$ στο Δ ή $f \downarrow$ στο Δ
5. $f'' > 0$ ή < 0 στο διάστημα $\Delta \rightarrow f' \uparrow$ στο Δ ή $f' \downarrow$ στο Δ και f κυρτή ή f κοίλη στο Δ
6. $f' = 0$ στο διάστημα $\Delta \rightarrow f$ σταθερή στο Δ
7. $f' = g'$ στο διάστημα $\Delta \rightarrow f = g + c$
8. $f' = f$ στο διάστημα $\Delta \rightarrow f(x) = c \cdot e^x$
9. $f'' = g''$ στο διάστημα $\Delta \rightarrow f' = g' + c = (g + cx)' \rightarrow f = g + cx + b$
10. $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0 \dots \rightarrow$ θεώρημα Bolzano $\dots \exists \xi \dots f(\xi) = 0$ και C_f τέμνει τον $x'x$
11. $f(\alpha) = f(\beta) \dots \rightarrow$ θεώρημα Rolle $\dots \exists \xi \dots f'(\xi) = 0$ και εφαπτομένη // $x'x$
12. $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) \dots \rightarrow 2$ φορές θεώρημα Rolle στην $f \dots$ και θεώρημα Rolle στην $f' \dots$
13. τοπικό ακρότατο στο $x_0 \dots \rightarrow$ θεώρημα Fermat $\dots f'(x_0) = 0 \dots$
14. Δίνεται ανισοσύνη \rightarrow άρα ορισμός ολικού ακρότατου \dots και θεώρημα Fermat \dots
15. Ζητείται ανισότητα \rightarrow ΘΜΤ ή μονοτονία ή ολικά ακρότατα ή κυρτότητα και εφαπτομένη ή 2 ΘΜΤ και μεθοδολογία ανισότητας Jensen ή ολοκλήρωση ανισότητας
16. σημείο καμπής στο $x_0 \dots \rightarrow \dots f'(x_0) = 0 \dots$
17. σχέσεις με τρεις τιμές $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma) \dots \rightarrow 2$ φορές ΘΜΤ \dots ή Ενδιαμέσων Τιμών
18. Συνάρτηση f άρτια \rightarrow άξονας συμμετρίας $y'y$ και $f(-x) = f(x) \dots$
19. Συνάρτηση f περιττή \rightarrow κέντρο συμμετρίας $O(0,0)$ και $f(-x) = -f(x) \dots$
20. C_f πάνω ή κάτω από τον άξονα $x'x \rightarrow$ Λύνω $f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$
21. C_f πάνω ή κάτω από $C_g \rightarrow$ Λύνω $f(x) > g(x)$ ή $f(x) < g(x)$
22. C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο $A(x,0)$ δηλαδή λύνω $f(x) = 0$
23. C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ σε σημείο $A(0,y)$ δηλαδή υπολογίζω $f(0) = y$
24. C_f τέμνει C_g σε σημείο $A(x,y)$ όπου x λύση της $f(x) = g(x)$ και $y = f(x) = g(x)$
25. C_f διέρχεται από σημείο $A(\alpha, \beta) \rightarrow f(\alpha) = \beta$
26. f συνεχής στο a και ψάχνω $f(a) \rightarrow$ βρίσκω όριο στο a το οποίο ισούται με $f(a)$
27. Αν έχω διπλή ανισοσύνη ή $|f(x)| \leq \theta$ και ψάχνω όριο \rightarrow κριτήριο παρεμβολής
28. Όριο με $\eta \mu x$ ή $\sigma \nu x$ όπου x τείνει σε άπειρο \rightarrow χρησιμοποιώ $|\eta \mu x| \leq 1$ ή $|\sigma \nu x| \leq 1$ και κατασκευάζω παράσταση που ζητώ το όριο και μετά κριτήριο παρεμβολής
29. Όριο με $\eta \mu x$ όπου x τείνει στο $0 \rightarrow$ χρησιμοποιώ βασικά τριγωνομετρικά όρια
30. Αν f συνεχής σε κλειστό διάστημα τότε παίρνει μέγιστη τιμή και ελάχιστη τιμή.
31. Αν f συνεχής και $f \uparrow$ στο $\Delta = [\alpha, \beta]$ τότε σύνολο τιμών $f(\Delta) = [f(\alpha), f(\beta)]$
32. Αν f συνεχής και $f \downarrow$ στο $\Delta = [\alpha, \beta]$ τότε σύνολο τιμών $f(\Delta) = [f(\beta), f(\alpha)]$
33. Αν f συνεχής και $f \uparrow$ ή $f \downarrow$ στο $\Delta = (\alpha, \beta)$ τότε στο σύνολο τιμών έχω όρια αντί τιμών
34. Αν 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της f τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει λύση
35. Αν κ ανήκει στο σύνολο τιμών της f τότε η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει λύση
36. Σε αρνητικές προτάσεις συνήθως δουλεύω με απαγωγή σε άτοπο. Για παράδειγμα αν θέλω να δείξω ότι μια συνάρτηση δεν έχει ακρότατα υποθέτω ότι έχει και με βάση θεώρημα Fermat \dots καταλήγω σε άτοπο. Αν θέλω να δείξω ότι δεν έχει σημείο καμπής υποθέτω ότι έχει και με βάση θεώρημα πρέπει $f'(x_0) = 0$ και μετά άτοπο. Αν θέλω μια εξίσωση να έχει το πολύ μία ρίζα δηλαδή όχι δύο ρίζες υποθέτω ότι έχει δύο και καταλήγω με την βοήθεια του θεωρήματος Rolle σε άτοπο.
37. Αν ζητώ παραμέτρους σε κλαδική ώστε f παραγωγίσιμη τότε χρησιμοποιώ πρώτα ότι f συνεχής \dots
38. Αν θέλω όριο κλαδικής σε συνοριακό σημείο ή συνάρτησης με απόλυτα σε σημείο που αλλάζει πρόσημο η συνάρτηση ή συνάρτησης που μηδενίζει ο παρονομαστής και αλλάζει και πρόσημο τότε παίρνω πλευρικά όρια.

39. $f'(x) + f(x) = c \rightarrow$ πολλαπλασιάζω με $e^x \dots$ και έχω $(f(x) \cdot e^x)' = (c \cdot e^x)' \dots$
40. $f'(x) + g(x) \cdot f(x) = 0 \rightarrow$ πολλαπλασιάζω με $e^{\int g(x) dx}$ όπου $h'(x) = g(x)$ δηλαδή h αρχική της g και έχω $(f(x) \cdot e^{h(x)})' = 0 \dots$
41. $f'' - f = 0 \rightarrow f'' + f' = f' + f \rightarrow$ πολλαπλασιάζω με $e^x \dots$ και έχω $(f'(x) \cdot e^x)' = (f(x) \cdot e^x)' \dots$
42. $f'' \cdot f + 2(f')^2 = 0 \rightarrow$ πολλαπλασιάζω με $f \rightarrow f'' \cdot f^2 + 2 \cdot f' \cdot (f')^2 = 0 \rightarrow (f' \cdot f^2)' = 0 \dots$
43. Αν ζητείται ύπαρξη οριζόντιας εφαπτομένης δηλαδή // $x'x$ δουλεύω με θεώρημα Rolle
44. Για ασύμπτωτες βρίσκω πεδίο ορισμού και μετά ψάχνω για κατακόρυφες στα ανοικτά άκρα του Π.Ο. ενώ για οριζόντιες και πλάγιες στο \pm άπειρο αν είναι άκρο του Π.Ο.
45. Αν f άρτια τότε f' περιττή
46. Αν f περιττή τότε f' άρτια
47. Πιθανά ακρότατα στα άκρα κλειστού διαστήματος ή στα κρίσιμα σημεία δηλαδή στα σημεία που μηδενίζεται η παράγωγος (στάσιμα σημεία) ή δεν υπάρχει παράγωγος.
48. Αν η εφαπτομένη σχηματίζει γωνία ω με $x'x$ τότε $\lambda = \epsilon\phi\omega = f'(x_0)$
49. Αν ζητώ να δείξω ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη αρκεί να δείξω ότι είναι ασυνεχής.
50. Αν το σύνολο τιμών συνάρτησης ορισμένης σε κλειστό διάστημα έχει τουλάχιστον ένα άκρο ανοικτό τότε δεν παρουσιάζει και ελάχιστο και μέγιστο ανάλογα και δεν είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα.
51. C_f, C_g τέμνονται κάθετα σημαίνει ότι οι εφαπτομένες στα κοινά τους σημεία είναι κάθετες.
52. Αν οι εφαπτομένες στα x_1, x_2 είναι παράλληλες τότε $f'(x_1) = f'(x_2)$
53. Αν οι εφαπτομένες στα x_1, x_2 είναι κάθετες τότε $f'(x_1) \cdot f'(x_2) = -1$
54. Αν f κυρτή τότε η εφαπτομένη $y = \lambda x + \beta$ είναι κάτω από την C_f δηλαδή $f(x) \geq \lambda x + \beta$
55. Αν f κοίλη τότε η εφαπτομένη $y = \lambda x + \beta$ είναι πάνω από την C_f δηλαδή $f(x) \leq \lambda x + \beta$
56. Αν γνωρίζω όριο παράστασης με $f(x)$ τότε θέτω $\dots g(x) \dots$ και λύνω ως προς $f(x)$
57. Για ύπαρξη 1 τουλάχιστον ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$ εφαρμόζω $\Theta. Bolzano$ για την f ή $\Theta. Rolle$ για αρχική της f δηλαδή συνάρτηση g με $g'(x) = f(x)$
58. Για μοναδικότητα ρίζας αφού αποδείξω ύπαρξη όπως πριν ή με προφανή ρίζα απορρίπτω την ύπαρξη άλλης ρίζας είτε με 1-1 είτε με μονοτονία είτε με άτοπο με $\Theta. Rolle$ αν υποθέσουμε ότι έχει δύο ρίζες α, β οπότε $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.
59. Αν θέλω το πολύ 1 ρίζα δεν χρειάζεται ύπαρξη αλλά απόρριψη ύπαρξης 2 ριζών όπως πριν. Γενικά για το πολύ k ρίζες απορρίπτω $k+1$ ρίζες με άτοπο σύμφωνα με κατάλληλο πλήθος εφαρμογής $\Theta. Rolle$ στην f, f', \dots
60. Για σύνολο τιμών βρίσκω πεδίο ορισμού, μονοτονία, τιμές ή όρια στα άκρα διαστημάτων στα οποία αλλάζει η μονοτονία και μετά την ένωση των επί μέρους συνόλων τιμών. Με το σύνολο τιμών βρίσκουμε και πλήθος ριζών συνάρτησης...
61. Για πρόσημο συνάρτησης βρίσκω τις ρίζες και την μονοτονία της και παίρνω ανισότητες $>$ ή $<$ από τις ρίζες ή επιλεγμένες τιμές εντός των ριζών...
62. Για να βρω αντίστροφη συνάρτηση αφού δείξω ότι είναι αντιστρέψιμη με 1-1 ή γνησίως μονότονη θέτω $f(x) = y$ και λύνω ως προς $x = f^{-1}(y)$ και έχω τον τύπο της f^{-1}
63. Το πρόσημο της f' δίνει την μονοτονία και τα ακρότατα της f
64. Το πρόσημο της f'' δίνει μονοτονία -ακρότατα της f' και κυρτότητα-σ.κ. της f
65. Στους μιγαδικούς οι συνθήκες $w \in \mathbb{R}$ ή $w \in \mathbb{I}$ αντιμετωπίζονται με $w = \bar{w}$ ή $w = -\bar{w}$
66. Αν ζητώ μέγιστα και ελάχιστα στους μιγαδικούς χρησιμοποιώ είτε τριγωνική ανισότητα είτε κάνω σχήμα και βλέπω σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου ή 2 κύκλων ή αποστάσεις σημείου από ευθεία.
67. Για εξισώσεις με μιγαδικούς εκτός δευτεροβάθμιας με πραγματικούς συντελεστές ή για γεωμετρικούς τόπους ή εικόνες μιγαδικών θέτω $z = x + yi$ και μετά από πράξεις βρίσκω σχέσεις μεταξύ των x, y που αποτελούν γ, τ ή τα υπολογίζω αν ψάχνω τον z .