# ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

1.Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega=\{1,2,3,\ldots,10\}$ με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Να βρείτε την πιθανότητα ώστε η συνάρτηση $f(x)=x^4-4x+\lambda$ να έχει ελάχιστο μεγαλύτερο του 2.

**2.**Ρίχνουμε συγχρόνως δύο αμερόληπτα ζάρια ένα άσπρο και ένα μπλε που το καθένα είναι αριθμημένο από το ένα έως το έξι. Αν α, β είναι αντίστοιχα οι ενδείξεις τους, να βρείτε την πιθανότητα, ώστε η εξίσωση $x^2+\alpha x+\beta=0$ να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

3.Ρίχνουμε ένα όχι αμερόληπτο ζάρι. Συμβολίζουμε με $\mathrm{P}(\kappa),\kappa=1,2,\ldots,6$ την πιθανότητα εμφάνισης της κ-έδρας. Αν οι αριθμοί $\mathrm{P}(1),\mathrm{P}(2),\ldots,\mathrm{P}(6)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και οι αριθμοί $\mathrm{P}(3),\mathrm{P}(5),\mathrm{P}(6)$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων Α: η ένδειξη του ζαριού να είναι περιττός αριθμός και Β: η ένδειξη του ζαριού να είναι πολλαπλάσιο του 3.

4.Ρίχνουμε δύο αμερόληπτα ζάρια, ένα κίτρινο και ένα μαύρο. Το καθένα είναι αριθμημένο από το ένα έως το έξι. Οι ενδείξεις του κίτρινου ζαριού είναι οι τιμές της παραμέτρου $\kappa$ , ενώ οι τιμές του μαύρου ζαριού είναι οι τιμές της παραμέτρου $\mu$ Να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων

**α)**η ευθεία $\kappa x+\mu y=7$ να περνάει από το σημείο $\mathrm{A}(2,1)$

**β)**η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{3}\eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu\chi$ να περνάει από το σημείο $\mathrm{B}\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\kappa}{\mu}\right)$

5. Δίνεται ο ακέραιος αριθμός $\kappa$ με $\kappa\in[-4,3]$ και η εξίσωση $\kappa x^2+(\kappa-2)x+\kappa=0$ Να βρείτε την πιθανότητα η εξίσωση να έχει

**α)** δύο πραγματικές ρίζες

**β)** μία διπλή ρίζα πραγματική

**6.** Για τα ενδεχόμενα Α και Β του δειγματικού χώρου Ω ισχύει $\mathrm{A}\subseteq\mathrm{B}$

Αν η πιθανότητα $\mathrm{P}(\mathrm{B})$ είναι ίση με τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)=Inx-x+\dfrac{8}{5}$ και $\mathrm{P}(\mathrm{A}'\cap\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})$ , να βρείτε τις πιθανότητες $\mathrm{P}(\mathrm{A})$ και $\mathrm{P}(\mathrm{B})$

7. Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega=\{1,2,\ldots,6\}$ , που αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Επιλέγουμε τυχαία ένα ενδεχόμενο $\alpha\in\Omega$ και θεωρούμε τα σημεία $\mathrm{A}(\alpha+3,\alpha^2)$, $\mathrm{B}(\alpha+2,2\alpha^2-3)$ και $\Gamma(\alpha+1,5\alpha-\alpha^2)$ Να βρείτε την πιθανότητα τα Α, Β και Γ να είναι συνευθειακά.

8. Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega=\{0,1,\ldots,5\}$ , που αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Επιλέγουμε τυχαία ένα ενδεχόμενο $\alpha\in\Omega$ και θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=x^4-2\alpha x^3+6x^2+x+2\alpha$ Να βρείτε την πιθανότητα να ισχύει $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

9. Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega=\{1,2,\ldots,8\}$ , που αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Επιλέγουμε τυχαία ένα απλό ενδεχόμενο $\alpha\in\Omega$ Να βρείτε την πιθανότητα η εξίσωση $2x^2-4x+\alpha=0,\ x\in\mathbb{R}$ να είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$

10.Έστω $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ένας δειγματικός χώρος ο οποίος αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Επιλέγουμε ένα απλό ενδεχόμενο $\lambda\in\Omega$ Να βρείτε την πιθανότητα η εξίσωση $x^2-4x+\lambda=0$ να έχει πραγματικές ρίζες.

11.Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega=\{1,2,\ldots,6\}$ ,που αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Επιλέγουμε τυχαία ένα ενδεχόμενο $\alpha\in\Omega$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^3-3x^2+(\alpha+1)x+\alpha^2-4\alpha+2$ Να βρείτε την πιθανότητα η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f$ στο σημείο $\mathrm{A}(1,\alpha^2-3\alpha+1)$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

12. Σε ένα κουτί υπάρχουν 4 αριθμημένες σφαίρες με τους αριθμούς –1, 1, 2, 3 αντιστοίχως. Επιλέγουμε δύο σφαίρες συγχρόνως, προσθέτουμε τις ενδείξεις και ονομάζουμε $\alpha$ το άθροισμά τους. Δεχόμαστε ότι ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Να βρείτε την πιθανότητα η εξίσωση $x^2+2x+\alpha=0$ να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

13.Έστω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης είναι $\Omega=\{\beta\in\mathbb{Z}\ |\beta|<5\}$ και αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Επιλέγουμε τυχαία ένα $\beta\in\Omega$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^4-\beta x^3+3x^2-5$ Να βρείτε την πιθανότητα να ισχύει $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

**14.** Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και $X,Y$ ενδεχόμενά του τέτοια ώστε $X \subseteq Y$ Έστω ότι $\mathrm{P}(X),\mathrm{P}(Y)$ είναι οι πιθανότητες των $X,Y$ αντιστοίχως. Αν οι πραγματικοί αριθμοί $\mathrm{P}(X),\mathrm{P}(Y)$ είναι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης $f(x)=4x^3-5x^2+2x+2002, x \in R$, να υπολογίσετε

**α)** τις πιθανότητες $\mathrm{P}(X),\mathrm{P}(Y)$

**β)** τις πιθανότητες $\mathrm{P}(X \cap Y),\mathrm{P}(X \cup Y),\mathrm{P}(Y \cap X')$

**15.** Έστω $\Omega=\{1,2,3,\ldots,10\}$ είναι ένας δειγματικός χώρος με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.

Αν $\lambda \in \Omega$, θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x+\lambda^2,\quad x \in R$

και τα ενδεχόμενά του $X,Y$ του Ω όπου

Χ: Η μέγιστη τιμή της $f$ στο $[0,5]$ ,είναι μεγαλύτερη ή ίση του $\dfrac{68}{3}$

Υ: Η ελάχιστη τιμή της $f$ στο $[0,5]$ είναι μικρότερη ή ίση του 4. Να βρείτε τις πιθανότητες $\mathrm{P}(x),\mathrm{P}(Y),\mathrm{P}(X \cap Y),\mathrm{P}(X \cup Y),\mathrm{P}(Y \cap X')$

**16.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^3+\alpha x^2+x$ Από ένα κουτί που έχει τρεις αριθμημένες σφαίρες με τους αριθμούς $0,1,\ 2\sqrt{2}$ αντιστοίχως, επιλέγουμε τυχαία μία και την τοποθετούμε στη θέση του $\alpha$ . Να βρείτε την πιθανότητα η $f$ να είναι γνήσια αύξουσα για κάθε $x \in$ ¡

**17.** Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι συχνότητες των τιμών μίας μεταβλητής $X$

| Τιμές $x_i$ | Συχνότητα $\nu_i$ |
|---|---|
| 20 | 4 |
| 21 | 2 |
| 24 | 5 |
| 26 | 3 |
| 30 | 6 |

Αν η τυπική απόκλιση είναι $s=3,8$ , να βρείτε

**α)** τη μέση τιμή $\bar{x}$ των τιμών

**β)** την πιθανότητα μία τυχαία τιμή της μεταβλητής να βρίσκεται στο διάστημα $\left(\bar{x}-s, \bar{x}+s\right)$

18. Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ με πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων που ικανοποιούν τις σχέσεις:
$2\mathrm{P}(1)=2\mathrm{P}(3)=2\mathrm{P}(5)=2\mathrm{P}(7)=3\mathrm{P}(2)=3\mathrm{P}(4)=3\mathrm{P}(6)=3\mathrm{P}(8)$
και τα ενδεχόμενα
$\mathrm{A}\{\alpha\in\Omega/$ η εξίσωση $x^2+\alpha x+4=0$ έχει πραγματικές ρίζες$\}$
$\mathrm{B}=\{\lambda\in\Omega/$ η συνάρτηση $g(x)=x^2+\left(\lambda^2-5\lambda\right)x+13,\ x\in\mathbb{R}$ παρουσιάζει ακρότατο σημείο $x_0=3\}$ Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των Α, Β και να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα Α, Β είναι ασυμβίβαστα.

19. Αν για το ενδεχόμενο Α ισχύει $\left|\mathrm{P}(\mathrm{A})+1\right|-\left|\mathrm{P}(\mathrm{A})-2\right|=4\lambda$ με $\lambda\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $|\lambda|\leq\frac{1}{4}$

20.**α)** Να μελετήσετε ως προς τα ακρότατα τη συνάρτηση $f(x)=x^3+(1-x)^3$

**β)** Για κάθε ενδεχόμενο Α ενός δειγματικού χώρου Ω, να αποδείξετε ότι $\left[\mathrm{P}(\mathrm{A})\right]^3+\mathrm{P}(\mathrm{A}')^3\geq\frac{1}{4}$

21. Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega=\{2,4,6\ldots,2\nu\}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$ με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, που αν θεωρηθούν τιμές της μεταβλητής $X$ έχουν μέση τιμή $\bar{x}=9$

**α)** Να βρείτε ποιος είναι ακριβώς ο δειγματικός χώρος Ω

**β)** Να βρείτε τη διάμεσο και το εύρος της μεταβλητής $X$

**γ)** Αν $(s)$ η τυπική απόκλιση, να αποδείξετε ότι $s^2=2\bar{x}+3$

**δ)** Δίνονται τα ενδεχόμενα Α: « $\alpha\in\Omega$, ώστε α = πολ 4» και Β: «$\alpha\in\Omega$, ώστε β να είναι ρίζα της εξίσωσης $\frac{\left(x^2-6x+8\right)(x-3)}{x-2}=0$» να βρείτε τις πιθανότητες $\mathrm{P}(\mathrm{A}),\mathrm{P}(\mathrm{B}),\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}),\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$ και $\mathrm{P}(\mathrm{A}-\mathrm{B})$