

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

## ΑΛΓΕΒΡΑ

## ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

## 1. Έννοια και γραφική παράσταση συνάρτησης

**Θέμα 1**

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση, αιτιολογώντας την επιλογή σας

1. Αν  $f\left(\frac{2}{3+2x}\right) = x+3$  για κάθε  $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ , τότε το  $f(-2)$  είναι:  
 Α. -1      Β. 0      Γ. 1      Δ. 2      Ε. 3.

2. Αν  $f(x) = \alpha x^5 + \beta x^3 + 2$ ,  $\alpha, \beta \neq 0$  και  $f(7) = 5$ , τότε το  $f(-7)$  είναι:  
 Α. 1      Β. -1      Γ. -2      Δ. -3      Ε. -5

3. Αν  $f(\mu x + \nu) = x$ ,  $\mu \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $f(\alpha) = \frac{\nu}{\mu}$ , τότε το  $\alpha \in \mathbb{R}$  είναι:  
 Α.  $\mu \cdot \nu$       Β.  $2\mu$       Γ.  $2\nu$       Δ.  $\mu + \nu$       Ε.  $\mu - \nu$ .

4. Αν για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $(x-2) \cdot f(x-2) = f(x-1) - 3x$  τότε το  $f(2)$  είναι  
 Α. 9      Β. 12      Γ. 15      Δ. 18      Ε. 21.

5. Αν  $\frac{f(x+1)}{f(x)} = x-1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $f(5) = 12$ , τότε το  $f(2)$  είναι  
 Α. 1      Β. 2      Γ. 3      Δ. 4      Ε. 5.

6. Αν  $2f(1-x) - 3f(x-1) = -x^2 + 2x - 2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , το  $f(-3)$  είναι  
 Α. 8      Β. 9      Γ. 10      Δ. 11      Ε. 12.

7. Αν  $f(x) + (x+3) \cdot f(x-4) = x^3 - 2x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , το  $f(1)$  είναι  
 Α. 83      Β. 81      Γ. 78      Δ. 75      Ε. 67.

Απάντηση:

**Θέμα 2**

Να βρείτε τις τιμές του  $x \in \mathbb{R}$  για τις οποίες:

(i)  $f(x) = -3$ , όταν  $f(x) = x^3 - 8x^2 - x + 5$

(ii)  $f(x) = 2$ , όταν  $f(x) = 3x^2 - 10|x| + 5$

Απάντηση:

**Θέμα 3**

Να βρείτε τον  $a \in \mathbb{R}$ , ώστε από τον τύπο  $f(x) = \begin{cases} 5ax^2 - 7x + 4, & \text{αν } x \geq 1 \\ 3a^2x - 5, & \text{αν } x \leq 1 \end{cases}$  να ορίζεται μια συνάρτηση. Κατόπιν να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 4$ .

Απάντηση:

**Θέμα 4**

Για ποιες τιμές του  $a \in \mathbb{R}$  οι παρακάτω συναρτήσεις έχουν πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ :

(i)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 3ax - 3a - 1}$       (ii)  $f(x) = \sqrt{(a-2)x^2 + 2(a-2)x + 2}$

Απάντηση:

**Θέμα 5**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $A = 90^\circ$ ) με  $(AB) = 8 \text{ m}$ ,  $(A\Gamma) = 6 \text{ m}$  και  $(B\Gamma) = 10 \text{ m}$ . Αν  $\Delta$  είναι σημείο της  $B\Gamma$  και  $\Delta E \perp AB$ ,  $\Delta Z \perp A\Gamma$ , να εκφράσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου  $A\epsilon\Delta Z$  ως συνάρτηση του  $(\Delta E) = x$ . Για ποια τιμή του  $x$  το εμβαδόν γίνεται μέγιστο και ποια είναι η μέγιστη τιμή του;

Απάντηση:

**Θέμα 6****Επιλέξτε τη σωστή απάντηση, αιτιολογώντας την επιλογή σας**

1. Η συνάρτηση  $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 5}{ax^2 + \beta x + 10}$  είναι σταθερή. Το άθροισμα  $a + \beta$  είναι ίσο με  
 Α. 2      Β. -2      Γ. 5      Δ. 10      Ε. 1
2. Αν  $f(x+1) = f(x) + \frac{1}{11}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $f(0) = 4$ , το  $f(77)$  είναι  
 Α. 13      Β. 12      Γ. 11      Δ. 10      Ε. 9
3. Αν  $f(x) = \begin{cases} -2x + 4 & \text{αν } x \leq 1 \\ 1 - x^2 & \text{αν } x > 1 \end{cases}$ ,  $f(\alpha) = -3$  και  $\beta - \alpha = f(-1)$ , το  $\beta$  είναι ίσο με  
 Α. 6      Β. 8      Γ. 10      Δ. 12      Ε. 14
4. Αν  $f(x) = \frac{x-1}{x}$ , τότε το  $f(3x)$  συναρτήσει του  $f(x)$  είναι ίσο με  
 Α.  $\frac{f(x)}{3}$       Β.  $\frac{2f(x)}{3}$       Γ.  $\frac{2+f(x)}{3}$       Δ.  $\frac{f(x)}{2}$       Ε.  $\frac{3f(x)}{2}$
5. Αν  $f(x) = 3^{x-1}$ , τότε το  $f(2x+2)$  συναρτήσει του  $f(x)$  είναι ίσο με  
 Α.  $\frac{1}{3}[f(x)]^2$       Β.  $[f(x)]^2$       Γ.  $3[f(x)]^2$       Δ.  $9[f(x)]^2$       Ε.  $27[f(x)]^2$
6. Αν  $f\left(\frac{\alpha x - \beta}{\beta x - \alpha}\right) = x^{38} + x^{37} + x^{36} + \dots + x + 1$ ,  $\alpha \neq \beta$  τότε το  $f(1)$  είναι ίσο με  
 Α. -38      Β. -1      Γ. 0      Δ. 1      Ε. 38
7. Αν  $f\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} + 4$ ,  $x \neq 0$  τότε το  $f(2)$  είναι ίσο με  
 Α. 10      Β. 8      Γ. 6      Δ. 4      Ε. 2
8. Αν  $3^{f(x)} = x + 6$ , τότε το  $f(3) + f(75)$  είναι ίσο με  
 Α. 6      Β. 12      Γ. 18      Δ. 36      Ε. 84

Απάντηση:

**Θέμα 7**

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$(i) f(x) = \frac{3}{4 - \sqrt{x^2}}$$

$$(ii) f(x) = \frac{2}{|x| - 1} + \frac{1}{x}$$

$$(iii) f(x) = \frac{5}{\sqrt{9 - |x|}} - \frac{1}{x - 5}$$

$$(iv) f(x) = \frac{2x}{x^2 - 3|x| + 2}$$

Απάντηση:

**Θέμα 8**

1. Η συνάρτηση  $f$  έχει πεδίο ορισμού το  $A = [-1, 4]$ .

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $g(x) = f(5x + 2)$ .

2. Η συνάρτηση  $f$  έχει πεδίο ορισμού το  $A = [0, 8]$ .

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $g(x) = f(x^2 - 1)$ .

Απάντηση:

**Θέμα 9**

Για ποιες τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$  η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\alpha x}{x^2 + 1}$   
έχει σύνολο τιμών το  $[-3, 3]$ .

Απάντηση:



**Θέμα 10****Επιλέξτε τη σωστή απάντηση, αιτιολογώντας την επιλογή σας**

1. Αν τα σημεία  $A(2, \alpha - 4)$  και  $B(\alpha + 3, -5)$  βρίσκονται στο 4<sup>ο</sup> τεταρτημόριο, τότε  
**A.**  $\alpha \in (3, 4)$     **B.**  $\alpha \in (-4, -3)$     **Γ.**  $\alpha \in (-5, 2)$     **Δ.**  $\alpha \in (-3, 4)$     **Ε.**  $\alpha \in (2, 4)$ .
2. Αν  $A(-1, 1)$ ,  $B(2, \alpha)$  και  $(AB) = 5$ , τότε το άθροισμα των τιμών του  $\alpha$  είναι  
**A.** 1    **B.** 2    **Γ.** 3    **Δ.** 4    **Ε.** 5.
3. Αν  $A(-1, -4)$ ,  $B(2, -1)$  και  $\Gamma(-2, 3)$ , τότε η περίμετρος του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι  
**A.**  $8\sqrt{2}$     **B.**  $10\sqrt{2}$     **Γ.**  $12\sqrt{2}$     **Δ.**  $14\sqrt{2}$     **Ε.**  $16\sqrt{2}$ .
4. Το σημείο  $M(-7, 1)$  ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης:  
**A.**  $f(x) = 3x + 20$     **B.**  $f(x) = x^2 - 7x + 2$     **Γ.**  $f(x) = \frac{3x + 15}{x + 10}$   
**Δ.**  $f(x) = \frac{1}{4}\sqrt{65 - x^2}$ .
5. Αν το σημείο  $M(2, 5)$  ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  
 $f(x) = \frac{x + \mu}{x - 1}$  τότε:  
**A.**  $\mu = 2$     **B.**  $\mu = 3$     **Γ.**  $\mu = 4$     **Δ.**  $\mu = 5$     **Ε.**  $\mu = 7$ .

Απάντηση

**Θέμα 11****Επιλέξτε τη σωστή απάντηση, αιτιολογώντας την επιλογή σας**

1. Αν για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $f(x) + 4x = f(2x)$  και η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  διέρχεται από το σημείο  $A(1, -3)$  τότε το  $f(2)$  είναι  
**A. 5      B. 4      Γ. 3      Δ. 2      E. 1.**
2. Αν  $f(3x + 4) = \mu x^2 - 3x + 1$  και η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  διέρχεται από το σημείο  $M(1, 5)$  τότε το  $\mu$  είναι ίσο με  
**A. 1      B. 2      Γ. 3      Δ. 4      E. 5.**
3. Αν  $f\left(1 - \frac{2}{x}\right) = \frac{x^2 + 1}{x - 2}$  και το σημείο  $M$  ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ , τότε  
**A.  $M\left(3, \frac{2}{3}\right)$       B.  $M\left(3, \frac{1}{3}\right)$       Γ.  $M(3, 0)$       Δ.  $M\left(3, -\frac{1}{3}\right)$       E.  $M\left(3, -\frac{2}{3}\right)$ .**
4. Αν για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $xf(x + 1) = \mu \cdot f(x)$  και η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  διέρχεται από τα σημεία  $A(3, 3)$  και  $B(4, 6)$  τότε το  $f(5)$  είναι ίσο με  
**A. 2      B. 3      Γ. 6      Δ. 9      E. 12.**
5. Αν για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $f(x + 1) = f(x) + x^2$  και η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  διέρχεται από το σημείο  $A(2, 6)$ , τότε το  $f(10)$  είναι ίσο με  
**A. 280      B. 290      Γ. 292      Δ. 294      E. 298.**

Απάντηση

**Θέμα 12**

Ένας κύκλος εφάπτεται στους άξονες  $xx'$ ,  $yy'$  και διέρχεται από το σημείο  $A(4, 2)$ .  
Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου.

Απάντηση

**Θέμα 13**

Να βρείτε τους  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  αν γνωρίζετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  
 $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x}$  διέρχεται από τα σημεία  $A\left(\alpha, \frac{15}{2}\right)$  και  $B(4, |\beta - 5|)$ .

Απάντηση

**Θέμα 14**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (\alpha - 1)x^3 - 12x$ . Να βρείτε τον  $\alpha \in \mathbb{R}$ , ώστε η γραφική παράσταση της  $f$  να διέρχεται από το σημείο  $M(-1, 9)$ . Για την τιμή του  $\alpha$  που βρήκατε :

- (i) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τους άξονες  $xx'$  και  $\psi\psi'$ .
- (ii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της  $f$  βρίσκεται πάνω, αντίστοιχα κάτω από τον άξονα  $xx'$ .

Απάντηση

**Θέμα 15**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για τις οποίες ισχύει:

$$f(x) = g(x) - x^2 + 3x - 4 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} .$$

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f, g$  δεν έχουν κοινά σημεία και ότι η γραφική παράσταση της  $f$  βρίσκεται κάτω από την γραφική παράσταση της  $g$ .

Απάντηση

**Θέμα 16**

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$  ισχύει:

$$2xf(x) - xf\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 - 3x - 4.$$

- (i) Να βρείτε τον τύπο της  $f$ .
- (ii) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η  $C_f$  τέμνει τους άξονες.
- (iii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $C_f$  βρίσκεται πάνω, αντίστοιχα κάτω από τον άξονα  $xx'$ .

Απάντηση

2. Η συνάρτηση " $y = ax + \beta$ "**Θέμα 1**

**Επιλέξτε τη σωστή απάντηση, αιτιολογώντας την επιλογή σας**

1. Αν η ευθεία ( $\varepsilon$ ) που διέρχεται από τα σημεία  $A(7, \mu)$  και  $B(3, \nu - 2)$  έχει κλίση  $\frac{1}{2}$ , τότε :

A.  $\mu = 2 - \nu$     B.  $\mu = \nu + 1$     Γ.  $\mu = \nu$     Δ.  $\mu = \nu - 2$     E.  $\mu = \nu - 5$ .

2. Αν τα σημεία  $A(-5, 3)$ ,  $B(\kappa, 2)$  και  $\Gamma(-7, 6)$  είναι συνευθειακά, τότε το  $\kappa$  είναι ίσο με

A.  $-7$     B.  $-5$     Γ.  $-\frac{13}{3}$     Δ.  $-\frac{7}{3}$     E.  $-\frac{2}{3}$ .

3. Αν το σημείο  $A(\beta, \beta - 2)$  ανήκει στην ευθεία ( $\varepsilon$ ) με εξίσωση  $2x + 3y + 11 = 0$ , τότε το γινόμενο των συντεταγμένων του A είναι ίσο με

A. 1    B. 2    Γ. 3    Δ. 4    E. 5.

4. Η ευθεία με εξίσωση  $y = -\frac{3}{4}x + 6$  τέμνει τους άξονες  $xx'$  και  $yy'$  στα σημεία A και B αντίστοιχα. Το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι ίσο με

A. 12    B. 16    Γ. 18    Δ. 24    E. 48.

5. Οι ευθείες με εξισώσεις  $(\mu + 1)x + (\mu + 2)y - 2 = 0$  και  $(2 - \mu)x + \mu y + 5 = 0$  τέμνονται πάνω στον άξονα  $xx'$ . Το  $\mu$  είναι ίσο με

A.  $-3$     B.  $-2$     Γ.  $-1$     Δ. 1    E. 2.

Απάντηση:

**Θέμα 2**

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία έχει κλίση  $\lambda$  και τέμνει τον άξονα  $\psi\psi'$  στο σημείο  $B$ , όταν:

(i)  $\lambda = 3$  και  $B(0,2)$       (ii)  $\lambda = -1$  και  $A(0,-4)$       (iii)  $\lambda = \frac{2}{3}$  και  $B(0,-3)$

(iv)  $\lambda = -\frac{5}{2}$  και  $B(0,0)$       (v)  $\lambda = -\frac{3}{2}$  και  $B(0,-5)$

Απάντηση:



**Θέμα 3**

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο  $A$  και είναι παράλληλη στην ευθεία που δίνεται, όταν:

(i)  $A(3,2)$  και  $\psi = 2x - 5$

(ii)  $A(-1,2)$  και  $\psi = -3x + 2$

(iii)  $A(1,1)$  και  $2x + 3\psi - 6 = 0$

(iv)  $A(2,3)$  και  $3x + 2\psi - 8 = 0$ .

Απάντηση:

**Θέμα 4**

Να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης:  $f(x) = 2|x - 2| - |x + 1| + x$  και κατόπιν να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

**Θέμα 5**

Να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης:  $f(x) = ||x| - 4|$  και με την βοήθεια της γραφικής παράστασης :

(i) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 2$  και τις ανισώσεις  $f(x) \geq 2$ ,  $f(x) < 2$ .

(ii) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης  $f(x) = a$  για τις διάφορες τιμές του  $a \in \mathbb{R}$ .

Απάντηση:

**Θέμα 6**

Είναι γνωστό ότι κατά την ομαλή ευθύγραμμη κίνηση το διάστημα  $S$  που διανύει ένα κινητό είναι μία γραμμική συνάρτηση του χρόνου  $t$ . Δίνεται ότι  $S = 90\text{m}$  όταν  $t = 2\text{sec}$  και  $S = 120\text{m}$  όταν  $t = 4\text{sec}$ .

- (i) Να βρείτε την γραμμική συνάρτηση  $s(t)$
- (ii) Να το διάστημα που έχει διανύσει το κινητό στην αρχή του χρόνου. (Αρχικό διάστημα)
- (iii) Να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $s(t)$ .
- (iv) Ποια είναι η ταχύτητα  $v$  του κινητού;

Απάντηση:

### 3.Κατακόρυφη-οριζόντια μετατόπιση

#### **Θέμα 1**

Να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = |x + 2| - 5$  και κατόπιν να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Απάντηση:

**Θέμα 2**

Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = |x|$  και  $g(x) = |x - 2| - 3$ . Σε ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $h(x) = ||x - 2| - 3|$ .

(i) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση  $|x - 2| - 3 = 0$ .

(ii) Να λύσετε γραφικά τις ανισώσεις  $|x - 2| - 3 > 0$  και  $|x - 2| - 3 < 0$

(iii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα προηγούμενα αποτελέσματα

(iv) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης  $||x - 2| - 3| = a$ , για τις διάφορες τιμές του  $a \in \mathbb{R}$

Απάντηση:

**Θέμα 3**

Να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{9-x^2} & \text{αν } -3 \leq x \leq 3 \\ x-3 & \text{αν } x > 3 \end{cases} .$$

Κατόπιν να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων σε διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων :

(i)  $y = f(x) - 2$     (ii)  $y = f(x+4)$     (iii)  $y = f(x+2) - 3$     (iv)  $y = f(x-2) + 3$ .

Απάντηση:

**Θέμα 4**

Δίνεται η συνάρτηση  $\varphi(x) = x^3 - 2x^2$ . Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$  της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από την μετατόπιση της γραφικής παράστασης της  $\varphi$  κατά:

- (i) κατά 10 μονάδες προς τα κάτω.
- (ii) κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά.
- (iii) κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά και 5 μονάδες προς τα πάνω.
- (iv) κατά 4 μονάδες προς τα δεξιά και 8 μονάδες προς τα κάτω



**Θέμα 5**

Ποιες μετατοπίσεις πρέπει να κάνουμε στην γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = f(x)$  για να πάρουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

(i)  $y = f(x) - 3$     (ii)  $y = f(x) + 5$     (iii)  $y = f(x - 4)$     (iv)  $y = f(x + 2)$

(v)  $y = f(x - 2) - 3$     (vi)  $y = f(x - 3) + 4$     (vii)  $y = f(x + 5) - 1$

(viii)  $y = f(x + 3) + 2$

Απάντηση:

**Θέμα 6**

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } \varphi(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2} & \text{αν } -2 \leq x \leq 2 \\ x-2 & \text{αν } x > 2 \end{cases}.$$

**A.** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $\varphi$  και να γίνει η γραφική της παράσταση.

**B.** Σε διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

(i)  $f(x) = \varphi(x) - 3$       (ii)  $f(x) = \varphi(x+4)$       (iii)  $f(x) = \varphi(x-2)$

(iv)  $f(x) = \varphi(x-2) - 3$       (v)  $f(x) = \varphi(x+3) + 2.$

Απάντηση:

**4.Χαρακτηριστικά συναρτήσεων****Θέμα 1**

Να μελετήσετε την μονοτονία των συναρτήσεων :

$$(i) f(x) = \frac{2x}{x-1} \quad (ii) f(x) = \frac{2x+1}{3-x} \quad (iii) f(x) = -\frac{2}{x^2+1} \quad (iv) f(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$(v) f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}-1} \quad (vi) f(x) = -\frac{5}{x+2} \quad (vii) f(x) = \frac{2}{\sqrt{9-\frac{1}{x}}}$$

Απάντηση:

**Θέμα 2**

(i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = \frac{3}{2 - \sqrt{x-1}}$  είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα  $[1,5)$  και  $(5, +\infty)$ .

(ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = 3x - \frac{2}{x}$  είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα  $(-\infty, 0)$  και  $(0, +\infty)$ .

Απάντηση:

**Θέμα 3**

i) Να δείξετε ότι κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα.

(ii) Να λύσετε την εξίσωση:  $2012x^{2013} + 5x^3 + 3x = 2020$ .

Απάντηση:

**Θέμα 4**

Η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι γνησίως αύξουσα και η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα  $xx'$  στο σημείο  $A(-2, 0)$ .

(i) Να βρείτε το πρόσημο της  $f$

(ii) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x^2 - 3x - 2) = 0$ .

(iii) Να λύσετε την ανίσωση  $f\left(\frac{4}{x-2}\right) \leq 0$ .

(iv) Να λύσετε την εξίσωση  $f\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 10\right) = f\left(6x + \frac{6}{x}\right)$ .

(v) Να λύσετε την ανίσωση  $f(x^2) \geq f(8x + 20)$ .

Απάντηση:

**Θέμα 5**

Η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι γνησίως αύξουσα με  $f(1) = 0$ .

(i) Να βρείτε το πρόσημο της  $f$ .

(iv) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης  $g(x) = \frac{f(x)}{1-x}$ .

(ii) Να λύσετε τις ανισότητες:  $f(5 - \lambda^2) > 0$  και  $f(\mu^2 + 5) \leq f(7\mu - 5)$ .

(iii) Δείξτε ότι: αν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  με  $\alpha \neq 0$  ή  $\beta \neq 0$  τότε  $f(\alpha\beta) < f(\alpha^2 + \beta^2)$ .

Απάντηση:

**Θέμα 6**

Να αποδείξετε ότι: αν οι συναρτήσεις  $f$ ,  $g$  είναι γνησίως αύξουσες ή γνησίως φθίνουσες τότε και η συνάρτηση  $h(x) = f(x) + g(x)$  είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

Να αποδείξετε ότι: αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και η συνάρτηση  $g$  γνησίως φθίνουσα, τότε η συνάρτηση  $h(x) = f(x) - g(x)$  είναι γνησίως αύξουσα.

Απάντηση:



**Θέμα 7**

Να βρείτε την μέγιστη τιμή της συνάρτησης

(i)  $f(x) = 9 - (2x - 3)^2$       (ii)  $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$       (iii)  $f(x) = |x - 2| - |x - 1|$

(iv)  $f(x) = 6x - x^2$       (v)  $f(x) = -3 + 4x - x^2$       (vii)  $f(x) = \frac{12}{x^2 + 2x + 3}$

Απάντηση:

**Θέμα 8**

Να βρείτε τον  $a \in \mathbb{R}$ , ώστε η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 2 \\ a, & x = 2 \\ 5-x, & x > 2 \end{cases}$  να παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο  $x = 2$ .

Απάντηση:

**Θέμα 9**

(i) Να αποδείξετε την ταυτότητα:  $x \cdot \psi = \frac{(x + \psi)^2}{4} - \frac{(x - \psi)^2}{4}$ .

(ii) Αν οι πραγματικοί αριθμοί  $x$  και  $\psi$  έχουν σταθερό άθροισμα  $c$ , να αποδείξετε ότι το γινόμενο  $\Gamma = x \cdot \psi$  γίνεται μέγιστο όταν  $x = \psi = \frac{c}{2}$ .

Απάντηση:

**Θέμα 10**

Να εξετάσετε αν είναι άρτιες ή περιττές οι συναρτήσεις:

(i)  $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$

(ii)  $f(x) = \frac{x^2 - x}{\sqrt{1-x^2}}$

(iii)  $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$ .

(iv)  $f(x) = 3x^3 + x^5$

(v)  $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 5$

(vi)  $f(x) = x^{-3} + x^{-1}$ .

Απάντηση:

**Θέμα 11**

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε:  $f(x + \psi) + f(x - \psi) = 2f(x)f(\psi)$  για κάθε  $x, \psi \in \mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι

(i)  $f(0) = 1$  ή  $f(0) = 0$  και (ii) Η  $f$  είναι άρτια συνάρτηση.

Απάντηση:

**Θέμα 12**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε τις παρακάτω προτάσεις:

- (i) Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι άρτιες τότε και η συνάρτηση  $h(x) = f(x) + g(x)$  είναι άρτια .
- (ii) Αν η συνάρτηση  $f$  άρτια και η συνάρτηση  $g$  είναι περιττή, τότε η συνάρτηση  $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x)$  είναι περιττή.

Απάντηση:

**Θέμα 13**

Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση.  
Να αιτιολογηθεί η επιλογή σας

1. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως μονότονη, τότε η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει:
 

A. Έχει ακριβώς μία λύση    B. Τουλάχιστον μία λύση    Γ. Το πολύ μία λύση.
2. Η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως μονότονη και  $f(2) = 0$ . Η εξίσωση  $f(x^3 + 10) = 0$  έχει λύση:
 

A.  $x = 2$     B.  $x = -2$     Γ.  $x = -10$     Δ.  $x = 10$     E.  $x = -\sqrt[3]{10}$ .
3. Η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα και  $f(8) = 4$ . Η ανίσωση  $f(x^2 - 1) > 4$  έχει λύση:
 

A.  $x \in (-1, 1)$     B.  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$     Γ.  $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$     Δ.  $x \in (-3, 3)$ .
4. Αν συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία  $A(-7, -3)$ ,  $B(-5, -4)$  τότε η  $f$ 

A. Είναι γνησίως αύξουσα    B. Είναι γνησίως φθίνουσα  
Γ. Δεν είναι γνησίως μονότονη    Δ. Δεν γνωρίζουμε την μονοτονία της.
5. Αν η συνάρτηση  $f$  έχει ελάχιστη τιμή  $\alpha$ , τότε η εξίσωση  $f(x) = \alpha$ :
 

A. Είναι αδύνατη    B. Έχει μια μόνο ρίζα  
Γ. Έχει το πολύ μία ρίζα    Δ. Έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

Απάντηση:

**Θέμα 14**

Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση

1. Αν η συνάρτηση  $f(x) = \frac{4x^2 + (a+4)x - 1}{(a+2)x^2 + 7}$  είναι άρτια, τότε το  $a$  είναι ίσο με

- A. -5      B. -4      Γ. -3      Δ. -2      E. -1.

2. Η συνάρτηση  $f$  είναι άρτια, η συνάρτηση  $g$  είναι περιττή και ισχύει:

$$3g(2) + 2f(5) = f(-5) - 3g(-2) + 6.$$

Το  $f(5)$  είναι ίσο με

- A. 6      B. 4      Γ. 3      Δ. 2      E. 1.

3. Η συνάρτηση  $f$  είναι άρτια και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $f(x) + 4x = f(-2x)$ . Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  διέρχεται από το σημείο  $A(1, -3)$  τότε το  $f(2)$  είναι

- A. 5      B. 4      Γ. 3      Δ. 2      E. 1.

**Θέμα 15**

Να χαρακτηρίσετε σωστή ( Σ ) ή λάθος ( Λ ) κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις

1. Αν η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι γνησίως αύξουσα ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

2. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία  $A(-2, -3)$ ,  $B(-1, 4)$  τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα .

3. Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι περιττή τότε η γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

4. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι περιττή και έχει μέγιστη τιμή  $f(x_0)$ , τότε θα έχει και ελάχιστη τιμή την  $-f(x_0)$ .

5. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως μονότονη η εξίσωση  $f(x) = \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  έχει ακριβώς μια ρίζα



