ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

Ορισμένο ολοκλήρωμα

Θέμα 1

Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση $f:[1,2]\to R$ για την οποία ισχύει:

$$1+\int_1^2 x^2 f^2(x)dx = 2\int_1^2 xf(x)dx\ .$$

<u>Απάντηση:</u>

Θέμα 2

Η f συνεχής στο $[1,5]$, $\int_{-2}^{3} f(x)dx = 5$, $\int_{1}^{4} f(x)dx = 1$, $\int_{2}^{5} f(x)dx = 3$, $\int_{2}^{4} f(x)dx = -3$ **και** $\int_{3}^{5} f(x)dx = 6$ να δείξετε ότι $\int_{1}^{3} f(x)dx = 1$.

Απάντηση:

Θέμα 3

Να αποδειχθεί ότι: $\int_{\alpha}^{\beta}\left(\int_{\gamma}^{\delta} f(x)g(u)du\right)dx = \int_{\gamma}^{\delta}\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(u)dx\right)du$.

Απάντηση:

Θέμα 4
Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση, αιτιολογώντας την επιλογή σας.

1. Η παράγωγος $\left(\int_0^3 \frac{x+2}{x^2+4x-7}dx\right)'$ είναι ίση με

Α. $-\frac{2}{3}$ Β. 0 Γ. $\frac{1}{2}$ Δ. $\frac{3}{2}$ Ε. $\frac{5}{2}$.

2. Το ολοκλήρωμα $\int_0^2 (2-x)dx$ είναι ίσο με

Α. 2 Β. 3 Γ. 4 Δ. 5 Ε. 6.

3. Το ολοκλήρωμα $\int_1^2 \sqrt{4-x^2}dx$ είναι ίσο με

Α. $\frac{5}{3}$ Β. 2 Γ. $\frac{8}{3}$ Δ. 3 Ε. $\frac{10}{3}$.

4. Το ολοκλήρωμα $\int_0^{3\sqrt{2}} \left(\sqrt{36-x^2}-x\right)dx$ είναι ίσο με

Α. $\frac{5\pi}{2}$ Β. 3π Γ. $\frac{7\pi}{2}$ Δ. 4π Ε. $\frac{9\pi}{2}$.

5. Το ολοκλήρωμα $\int_{-3}^{0} \left(\sqrt{9-x^2}-(x+3)\right)dx$ είναι ίσο με

Α. $-\frac{9}{4}\pi$ Β. $-\frac{9}{4}(3\pi+2)$ Γ. $3\pi+2$ Δ. $-\frac{9\pi}{4}(\pi-1)$ Ε. $\frac{9\pi}{4}-\frac{9}{2}$.

<u>Απάντηση:</u>

Θέμα 5

Να αποδειχθεί ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \cdot \int_{\delta}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx \cdot \int_{\beta}^{\delta} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\delta} f(x)dx \cdot \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx = 0$$

.

Απάντηση:

Θέμα 6

Να υπολογιστούν γεωμετρικά τα ολοκληρώματα:

(i) $\mathbf{I_1 = \int_0^5 (2x)dx}$ (ii) $\mathbf{I_2 = \int_1^4 (3x+2)dx}$ (iii) $\mathbf{I_3 = \int_{-5}^{5} \sqrt{25-x^2}dx}$

(iv) $\mathbf{I_4 = \int_{-3}^{3} \sqrt{36-x^2}dx}$.

Απάντηση:

Θέμα 7

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[3,5]$. Να αποδειχθεί ότι:

$$32+\int_3^5 f^2(x)dx \geq 8\int_3^5 |f(x)|dx .$$

Απάντηση:

Θέμα 8

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[-\alpha,\alpha]$, $\alpha>0$ με $f(0)=0$. Να αποδείξετε γεωμετρικά ότι:

$$\int_0^{\alpha} f(x)dx+\int_0^{f(\alpha)} f^{-1}(x)dx=\alpha f(\alpha).$$

Απάντηση:

Θέμα 9
Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση, αιτιολογώντας την επιλογή σας.

1. Αν η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε δεν υπάρχει το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

2. Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε:

$$\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx<0.$$

3. Ισχύει: $\int_{-5}^{5}\sqrt{100-x^2}dx=50\pi$.

4.Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx>\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ και $\alpha<\beta$, τότε $f(x)>g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

5. Ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{f(x)}{g(x)}dx=\frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx}{\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx}$.

<u>Απάντηση:</u>

Θέμα 10

Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και ισχύουν: $\int_0^1 f(x)\eta\mu x dx = \int_0^1 f(x)\sigma\upsilon\nu x dx = 1$.

Να δείξετε ότι: $\int_0^1 f^2(x)dx \geq \frac{3}{2}$.

Απάντηση:

\

Θέμα 11

Αν $\alpha<\beta$ να δείξετε ότι:

(i) $\int_{\alpha}^{\beta}\left(e^{x}-x-1\right)dx\geq 0$**,** όπου $\alpha,\beta\in R$**.**

(ii) $\int_{\alpha}^{\beta}\left(\eta\mu x-2x\right)dx<0$**,** όπου $\alpha,\beta\in(0,+\infty)$**.**

(iii) $\int_{\alpha}^{\beta}(x\ell nx)dx\geq\int_{\alpha}^{\beta}(x-1)dx$**,** όπου $\alpha,\beta\in(0,+\infty)$**.**

(iv) $\int_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{x^{2}}{2}+x+1\right)dx>\int_{\alpha}^{\beta}e^{x}dx$**,** όπου $\alpha,\beta\in(0,+\infty)$**.**

<u>Απάντηση:</u>

Θέμα 12

Η συνάρτηση $f:[0,1]\to[\alpha,\beta]$, $(\alpha<\beta)$ είναι συνεχής, να δείξετε ότι:

$$\int_0^1 f^2(x)dx \le -\alpha\beta .$$

Απάντηση: