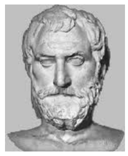
12. Ιστορία των Μαθηματικών - Αρχαίοι Έλληνες Μαθηματικοί - Ευκλείδης

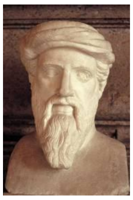
Οι Αιγύπτιοι έκαναν πολλές ανακαλύψεις, αλλά δεν ήταν πολύ αυστηροί. Χρησιμοποιούσαν μόνο μοναδιαία κλάσματα. Ήξεραν να υπολογίζουν επίπεδα εμβαδά για τον προσδιορισμό των χωραφιών μετά την πλημμύρου του Νείλου. Ακόμη τον όγκο της κόλουρης τετραγωνικής πυραμίδας για να παρακολουθούν την πρόοδο των εργασιών στους τάφους των φαραώ. Ο πάπυρος του Rhind είναι πολύτιμος για τα μαθηματικά του προβλήματα.

Οι Βαβυλώνιοι ανέπτυξαν την αστρονομία και βρέθηκαν πήλινες πινακίδες με τις πλευρές ορθογωνίου τριγώνου και τριγωνομετρικούς πίνακες. Πολύτιμη είναι η πινακίδα Plimpton.

Ο **Θαλής** από τη Μίλητο έκανε την πρώτη απόδειξη. Αυτή είναι η μεγάλη συνεισφορά των Ελλήνων στα μαθηματικά. Διατύπωσε μερικά θεωρήματα, ένα έμεινε με το όνομά του. Υπολόγισε το ύψος πυραμίδας από τη σκιά της. Προέβλεψε την έκλειψη ηλίου του 585 πΚΕ. Έγραψε το έργο *περί Φύσεως* όπου θεωρεί το ύδωρ ως το θεμελιώδες στοιχείο. Ήταν ένας από τους επτά σοφούς.



Ο **Πυθαγόρας** ο Σάμιος είναι γνωστός για το ομώνυμο θεώρημά του. Ασχολήθηκε με τους φυσικούς αριθμούς και ιδιαίτερα με το ποιοι φυσικοί μπορεί να είναι μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου (πυθαγόριες τριάδες). Βρήκε ότι στη φύση πολλά πράγματα είναι αναλογίες (κλάσματα) όπως οι νότες της μουσικής κλίμακας. Μελέτησε τη χρυσή τομή. Τους τρίγωνους, τετράγωνους, κλπ αριθμούς. Ίδρυσε Σχολή στο Κρότωνα της Καλαβρίας και προσπαθούσε να αναπτύξει πνευματικά τους μαθητές του και την κοινωνία της πόλης. Είχε πολλούς μαθητές και επηρέασε πολλούς μεταγενέστερους.



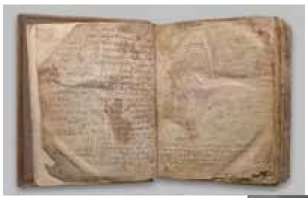
Ο **Πλάτων** ο Αθηναίος ήταν μαθητής του Σωκράτη. Ίδρυσε την *Ακαδημία* όπου δίδασκε φιλοσοφία με πολλή αγάπη για τα μαθηματικά. Όταν τον κάλεσε ο τύρανος των Συρακουσών, εξοικιώθηκε με τις διδαχές του Πυθαγόρα και στο έργο του *Τίμαιος* προσπαθεί να εξηγήσει γεωμετρικά τον κόσμο. Εκεί αναφέρεται στα 5 κανονικά πολύεδρα, που τα λέμε πλατωνικά στερεά.

Ο **Εύδοξος** από την Κνίδο ξεπέρασε τις δυσκολίες με τα σύμμετρα και ασσύμετρα μεγέθη και οι υποδειγματικές διατυπώσεις του περιλήφθηκαν στο 5ο βιβλίο των Στοιχείων. Θεωρούσε τη γη σφαίρα και υπολόγισε έναν μεσημβρινό της.

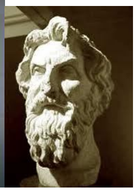
Ο **Αριστοτέλης** ο Αθηναίος, μαθητής του Πλάτωνα, είπε ότι για να αποδειχθεί μια πρόταση, πρέπει να στηριχτούμε σε αξιώματα. Πρέπει να ορίζουμε με ακρίβεια τις έννοιές μας. Ίδρυσε το *Λύκειον των περιπατητών* και συνέλεγε βιβλία, όργανα, πετρώματα. Μαθητές του ήταν ο Αλέξανδρος και ο Πτολεμαίος Α', που ίδρυσε το *Μουσείον* με τη Βιβλιοθήκη του στην Αλεξάνδρεια. Το έργο του επηρέασε αργότερα τη δυτική Ευρώπη.

Οι Έλληνες μαθηματικοί προτιμούσαν να κατασκευάζουν τα σχήματα χρησιμοποιώντας μόνο κανόνα (αβαθμολόγητο χάρακα) και διαβήτη. Ήταν τα όργανα των τεκτόνων (κτιστών, οικοδόμων, μηχανικών) αλλά τους απέδιδαν και συμβολική σημασία. Έτσι οι μόνες επιτρεπτές γραμμές ήταν η ευθεία και ο κύκλος, και ο **Ευκλείδης** στα στοιχεία του αναφέρεται μόνο σε αυτές. Ο μεγάλος μαθηματικός της Αλεξάνδρειας εργάστηκε στο Μουσείον και στα *Στοιχεία* του συνέλεξε και τακτοποίησε συστηματικά τις περισσότερες ως τότε μαθηματικές γνώσεις. Περιέλαβε και δικά του, πρωτότυπα θεωρήματα. Το έργο του αποτελείται από 13 βιβλία και καταλήγει στην κατασκευή των 5 πλατωνικών στερεών. Τα Στοιχεία ήταν το βασικό εγχειρίδιο μαθηματικών ως το 19ο αιώνα. Το 5ο αίτημά του προσπάθησαν πολλοί ανά τους αιώνες να το αποδείξουν ως θεώρημα, αλλά τελικά αποδείχθηκε ότι δεν γίνεται. Από αυτή την αναζήτηση προέκυψαν οι μη ευκλείδειες γεωμετρίες.

Το αρχαιότερο αντίγραφο των Στοιχείων φυλάσσεται στην Οξφόρδη και ανήκε στον Αρέθα.

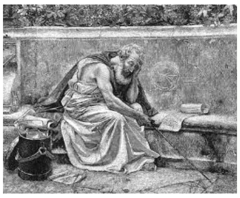
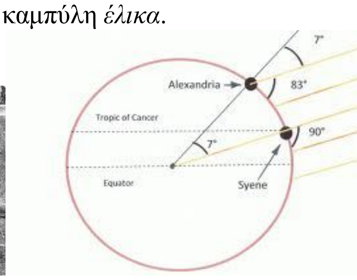






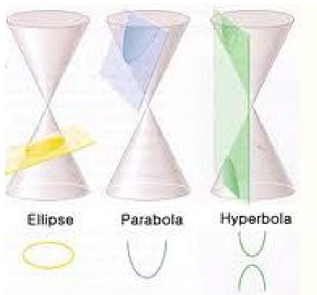
Ο αστρονόμος **Αρίσταρχος** ο Σάμιος διατύπωσε την ηλιοκεντρική άποψη. Αυτή διάβασε ο Ν. Kopernik στις αρχές του 16ου αι.

Ο **Αρχιμήδης** ο Συρακούσιος, το ευρηματικό μυαλό της αρχαιότητας. Υπολόγισε το εμβαδό των πολυγώνων και του κύκλου, τον όγκο κυλίνδρου, κώνου και σφαίρας. Διατύπωσε την αρχή της Άνωσης. Ήταν μηχανικός, ο εφευρέτης του κοχλία. Με τη μέθοδό του της εξάντλησης ξεκίνησε ο απειροστικός λογισμός. Εισήγαγε την καμπύλη *έλικα*.

Ο **Ερατοσθένης** από την Κυρήνη εργάσθηκε στο Μουσείο. Ως γεωγράφος υπολόγισε ένα μεσημβρινό της γης. Αλληλογραφούσε με τον Αρχιμήδη. Είναι γνωστός από τη μέθοδο *κόσκινο του Ερατοσθένη*.

Προσπαθώντας να λύσουν το διπλασιασμό του κύβου, την τριχοτόμηση της γωνίας και τον τετραγωνισμό του κύκλου (τα 3 άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας), χρησιμοποίησαν και άλλες καμπύλες. Έτσι προέκυψε η παραβολή, η υπερβολή και η έλλειψη, που ο **Απολλώνιος** από την Πέργη παρατήρησε ότι και οι τρείς παράγονται από την τομή ενός κώνου με ένα επίπεδο. Είναι οι τρείς κωνικές τομές που αναφέρονται στο έργο του *Κωνικά*. Προσπάθησε να εξηγήσει την μη ομαλή κίνηση των πλανητών με επικύκλους.

Ο αστρονόμος **Ίππαρχος** από τη Νίκαια συνέταξε τριγωνομετρικούς πίνακες, βρήκε και υπολόγισε τη μετάπτωση των ισημεριών και επινόησε όργανα όπως ο αστρολάβος.



Ο αστρονόμος Κλαύδιος **Πτολεμαίος,** ο συγγραφέας της *Μεγίστης Μαθηματικής Σύνταξης*, όπου παραθέτει όλες τις αστρονομικές γνώσεις της εποχής του. Το έργο του, που επανεκδόθηκε το 1406 και 1478, μελέτησε ο Ch. Columbus.


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO
LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via
Iacobæa, sub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

Ο **Διόφαντος** από την Αλεξάνδρεια έγραψε τα *Αριθμητικά*, όπου γράφει για πρώτη φορά με σύμβολα τις εξισώσεις. Έψαχνε ακέραιες και ρητές λύσεις, αν και τώρα λέμε διοφαντικές τις εξισώσεις στις οποίες ψάχνουμε ακέραιες λύσεις.

Ο **Πάππος** από την Αλεξάνδρεια έγραψε τη *Μαθηματική Συναγωγή*:

Η **Υπατία** από την Αλεξάνδρεια, μαθηματικός και φιλόσοφος, που πέθανε τραγικά.

Ο Πυθαγόρας και ο Πλάτωνας δεν ήταν μόνο επιστήμονες, αναζητούσαν την πνευματικότητα και τη γνώση του κόσμου. Αυτό αναζωπυρώθηκε (1ο αι. πΚΕ - 2ο αι. μΚΕ) με τους *Νεοπυθαγόριους* Απολλώνιο από τα Τύανα, Νικόμαχο από τα Γέρασα και συνεχίστηκε (3ο μΚΕ - 6ο αι.) από την κίνηση του *Νεοπλατωνισμού* με τους Πλωτίνο από την Αίγυπτο[1], Πορφύριο από την Αραβία, Ιάμβλιχο από τη Συρία, Πρόκλο από τη Λυκία, ψευδο-Διονύσιο Αρεοπαγίτη από τη Συρία, τον αυτοκράτορα Ιουλιανό. Το 529 ο Ιουστινιανός Α' έκλεισε τη Νεοπλατωνική Σχολή των Αθηνών.

Ο Νεοπλατωνισμός συνεχίστηκε τον 11ο αι. με τον Μιχαήλ Ψελλό και τον 14ο-15ο αι. από τον Γεώργιο Γεμιστό, που τον διέδωσε κατά τα ταξίδια του στην Ιταλία. Τον 18ο-19ο αι. έχουμε τον άγγλο T. Taylor.

Πολλά συνέβαλαν και οι κινέζοι, ινδοί (Bhaskara I, Bhaskara II, Aryabhata) και άραβες μαθηματικοί. Στα σχέδια ο Οίκος της Σοφίας στη Βαγδάτη (8ος αι.) και ο Brahmagupta (7ος αι.):

Brahmagupta (7ος αι.) - ο Οίκος της Σοφίας στη Βαγδάτη (8ος αι.) - Al-Khwarizmi

Τον 13ο αι. στο έργο του Leonardo Fibonacci εμφανίζονται οι αριθμοί Fibonacci. Τον 16ο λύνεται η εξίσωση 3ου βαθμού από τους S. del Ferro & N. Tartaglia και η εξίσωση 4ου βαθμού από τους G. Cardano & L. Ferrari.

Τον 17ο αι. ο J. Napier περιγράφει τους λογαρίθμους και ο R. Descartes τις καρτεσιανές συντεταγμένες και την αναλυτική γεωμετρία. Ακολουθούν ο I. Newton, ο G.W. Leibniz που ταυτόχρονα ξεκίνησαμ τον απειροστικό λογισμό. Οι P.de Fermat και B. Pascal ασχολήθηκαν με πιθανότητες και θεωρία παιγνίων.

Τον 18ο αι. έχουμε τον ελβετό L. Euler (εικόνα αριστερά) και τους J.L. Lagrange, P.S. Laplace, A.M. Legendre και τον γερμανό C.F.Gauss (εικόνα δεξιά) που έγραψε το Disquisitiones Arithmeticae (1798).

1 συγγραφέα των *Εννεάδων*

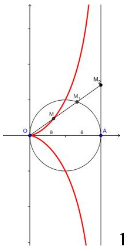
Ο 19ος αι. οι N. Lobachevsky & J. Bolyai ορίζουν την υπερβολική γεωμετρία και ο B. Riemann την ελλιπτική γεωμετρία. Ακολουθούν οι N.H.Abel, E. Galois, G. Cantor, J.H. Poincare, D. Hilbert.

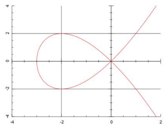
Στον 20ο έχουμε τους A. Wiles, που απέδειξε την τελευταία εικασία του Fermat, τον K. Gedel τον B. Mandelbrot. Ο A. Einstein χρησιμοποίησε διαφορική γεωμετρία για τη Γενική Σχετικότητα. Επίσης τον J. Neumann, τον ινδό S. Ramanujan.

Το 2003 λύθηκε η εικασία του Poincare από τον G. Perelman.

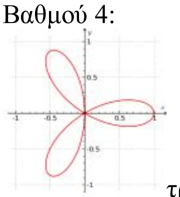
13. Καμπύλες: καρδιοειδής - κογχοειδής - κισσοειδής - στροφοειδής - δελτοειδής

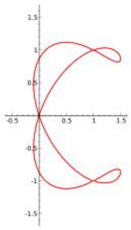
Βαθμού 1: η ευθεία. Βαθμού 2: παραβολή, υπερβολή, έλλειψη.
Βαθμού 3:

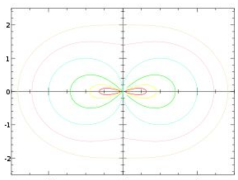

κισσοειδής Διοκλέους (για το διπλασιασμό του κύβου)

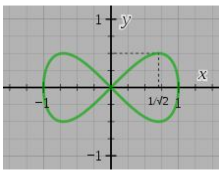

κυβική του Tschirnhausen

Βαθμού 4:


τριφύλλι (clover)


& (ampersand)


ιπποπέδη



φιόγκος (λημνίσκος)

Άλλες:

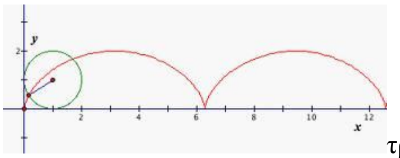
Ρουλέττες λέγονται οι καμπύλες που παράγονται από ένα σημείο μιας καμπύλης που κινείται (εφάπτεται και κυλάει) πάνω σε μια άλλη καμπύλη.

Πχ1 αν σε δύο αντικρυστές <u>παραβολές</u> (που εφάπτονται στις κορυφές τους) κρατήσω τη μια σταθερή και κυλίσω την άλλη πάνω στην πρώτη, η κορυφή της κινούμενης θα σχεδιάσει την *κισσοειδή του Διοκλέους*.

Πχ2 αν μία <u>παραβολή</u> κυλήσει πάνω σε μια <u>ευθεία</u>, τότε η εστία της παραβολής θα παράξει μια *αλυσσοειδή* καμπύλη.

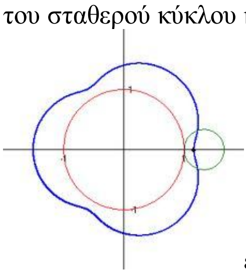
Πχ3 αν ένας <u>κύκλος</u> ο οποίος κυλάει πάνω σε μια <u>ευθεία</u>, παράγει ρουλέττα καμπύλη που τη λέμε *τροχοειδή*. Το σημείο που σχεδιάζει μπορεί να απέχει οσοδήποτε από το κέντρο του κινούμενου κύκλου, ας πούμε d αυτή την απόσταση. Ας είναι r η ακτίνα του κινούμενου κύκλου.

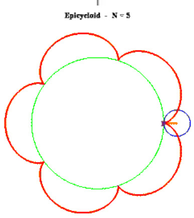
Ειδικότερα, αν σε μια τροχοειδή, το σημείο είναι πάνω στον κινούμενο κύκλο, δηλ. d=r, τότε η τροχοειδής λέγεται *κυκλοειδής*.


τροχοειδής με $d=r$

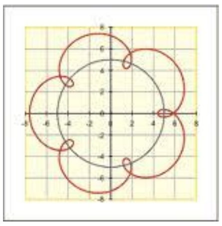
Το εμβαδό μιας περιοχής είναι 3 φορές το εμβαδό του κινούμενου κυκλικού δίσκου. Αν $d>r$ η τροχοειδής θα τέμνει την ευθεία, ενώ αν $d<r$ δεν θα την τέμνει.

Πχ4 αν ένας <u>κύκλος</u> ο οποίος κυλάει και εφάπτεται **εξωτερικά** πάνω σε ένα σταθερό <u>κύκλο</u>, παράγει ρουλέττα καμπύλη που τη λέμε επι*τροχοειδή*. Το σημείο που σχεδιάζει μπορεί να απέχει οσοδήποτε από το κέντρο του κινούμενου κύκλου, ας πούμε d αυτή την απόσταση. Ας είναι R η ακτίνα του σταθερού κύκλου και r η ακτίνα του κινούμενου.


επιτροχοειδής με $d<r$ ($R=3$, $r=2$, $d=0,5$)

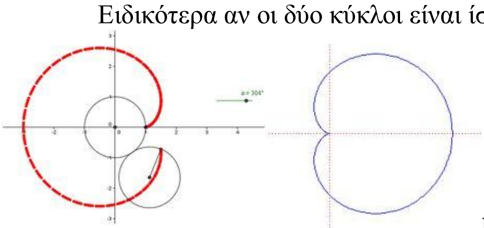


επιτροχοειδής με $d=r$

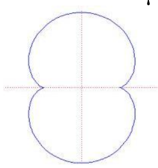

επιτροχοειδής με $d>r$

Ειδικότερα, αν σε μια επιτοχοειδή, το σημείο είναι πάνω στον κινούμενο κύκλο, τότε η επιτροχοειδής λέγεται *επικυκλοειδής*.

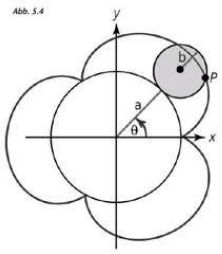
Ειδικότερα αν οι δύο κύκλοι είναι ίσοι τότε θα παραχθεί η:


καρδιοειδής

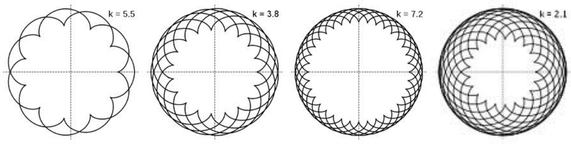
Αν ο Κ είναι μικρότερος, παράγεται η


νεφροειδής (δηλ. με 2 λοβούς).

Αν ο Κ είναι πολύ μικρότερος παράγεται η επικυκλοειδής με 3 λοβούς, 4 λοβούς, κοκ.



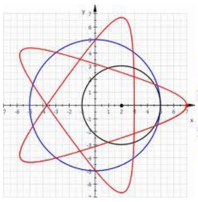
επικυκλοειδής με 3 λοβούς.

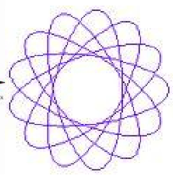


11/2 19/5 36/5 21/10

επικυκλοειδείς με 11, 19, 36, 21 άκρα

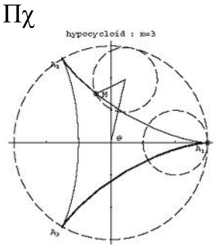
Πχ5 αν ένας <u>κύκλος</u> ο οποίος κυλάει και εφάπτεται **εσωτερικά** πάνω σε ένα σταθερό <u>κύκλο</u>, παράγει ρουλέττα καμπύλη που τη λέμε υπο*τροχοειδή*. Το σημείο που σχεδιάζει μπορεί να απέχει οσοδήποτε από το κέντρο του κινούμενου κύκλου.



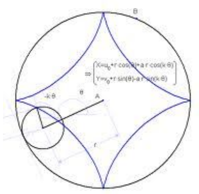


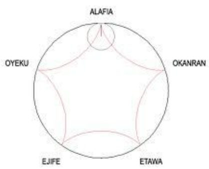
Ειδικότερα, αν σε μια υποτροχοειδή, το σημείο είναι πάνω στον κινούμενο κύκλο, τότε η επιτροχοειδής λέγεται *υποκυκλοειδής*.

Πχ

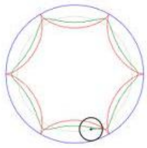


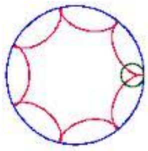
δελτοειδής (3 άκρα)


αστεροειδής (4 άκρα)

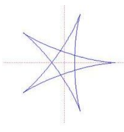
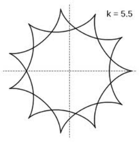


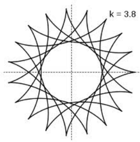
υποκυκλοειδείς με 5 άκρα (cusps)

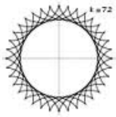

υποκυκλοειδής με 6 άκρα



υποκυκλοειδής με 7 άκρα

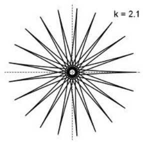
 

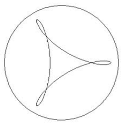




5/3 11/2 19/5 36/2

υποκυκλοειδείς με 5, 11, 19, 36 άκρα



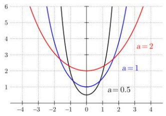


21/10 R=3,5 r=1 d=0,8

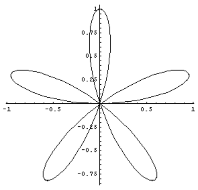
Με το *σπειρογράφο* μπορούμε να σχεδιάσουμε επιτροχοειδείς και υποτροχοειδείς καμπύλες. Το πορτοκαλί τμήμα λέγεται *στράτωρ* και ο εσωτερικός δίσκος *ρότωρ*.

Αλυσσοειδής (catenary)

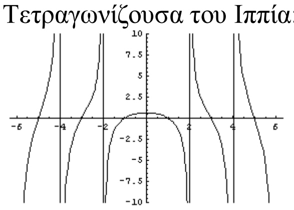


Πχ τα συρματόσχοινα που συγκρατούν μια γέφυρα, τα καλώδια ανάμεσα από δύο κολώνες της ΔΕΗ, τα νήματα του ιστού της αράχνης, η αλυσίδα από την άγκυρα ως το πλοίο, κά. Μοιάζει με παραβολή, αλλά δεν είναι.

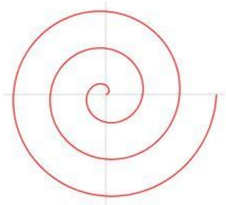
Με 5 πέταλα:



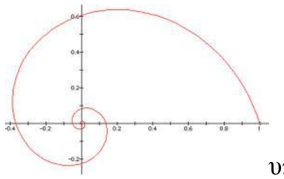
Τετραγωνίζουσα του Ιππία:



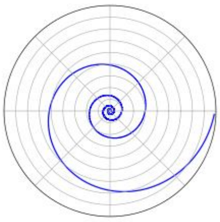
Σπείρες:



σπείρα του Αρχιμήδη

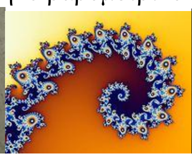


υπερβολική σπείρα



λογαριθμική σπείρα

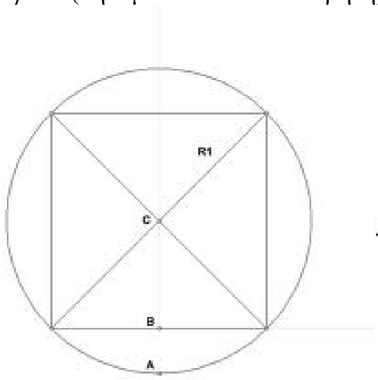
Οι σπείρες στη Φύση είναι λογαριθμικές: πχ στο ναυτίλο, στο σύνολο του Mandelbrot, στους σπειροειδείς γαλαξίες, σε ένα χαμηλό βαρομετρικό πεδίο, σε ένα ρωμαϊκό μπρόκολο.

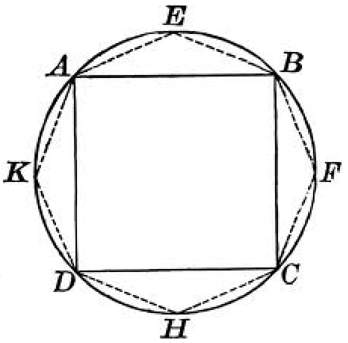


14. Κανονικά πολύγωνα και αριθμοί Fermat

Ένα πολύγωνο που έχει όλες τις πλευρές του και όλες τις γωνίες του[2] ίσες θα λέγεται κονονικό (regular). Το κανονικό 5πλευρο λέγεται 5γωνο, κτό.

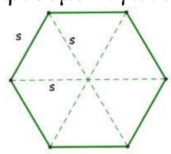
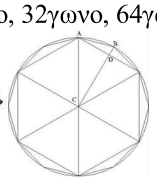
Αν έχουμε ένα κύκλο, μπορούμε να εγγράψουμε ένα κανονικό πολύγωνο κατασκευάζοντάς το *γεωμετρικά* (δηλ. με κανόνα και διαβήτη);





Πχ μπορούμε να κατασκευάσουμε το 4γωνο: σε ένα κύκλο φέρνουμε δύο κάθετες διαμέτρους, κλπ.

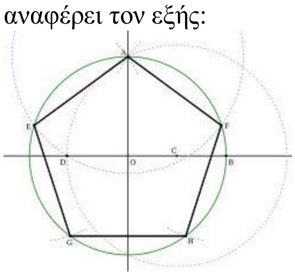
Επίσης αν διχοτομήσουμε τα ενδιάμεσα τόξα, παίρνουμε ένα 8γωνο. Αν διχοτομήσουμε τα τόξα, παίρνουμε 16γωνο, 32γωνο, 64γωνο, κοκ.

Μπορούμε να κατασκευάσουμε και ένα 6γωνο, γιατί η πλευρά του 6γωνου είναι ρ (όση η ακτίνα του κύκλου), δηλ παίρνω ένα σημείο Α του κύκλου και κάνω τη χορδή ΑΒ = ρ. Επίσης τη χορδή ΒΓ = ρ, τη ΓΔ = ρ, τη ΔΕ= ρ, τη ΕΖ =ρ. Το ΑΒΓΔΕΖ είναι το ζητούμενο 6γωνο.[3]

Επίσης αν πάρω το ΑΓΕ, έχω εγγράψει και ένα ισόπλευρο 3γωνο. Αν διχοτομήσω τα τόξα, παίρνω το 12γωνο, το 24γωνο, 48γωνο, 96γωνο, κοκ.

Μπορώ να κατασκευάσω το 5γωνο; Υπάρχουν πολλοί τρόποι,, ο Ευκλείδης στα Στοιχεία αναφέρει τον εξής:

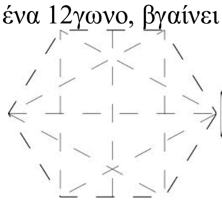


Σε δοθέντα κύκλο κέντρου Ο φέρω δύο κάθετες διαμέτρους. Η μία τέμνει τον κύκλο στο Α και η άλλη στο Β. Στην ακτίνα ΟΒ παίρνω το μέσο της C και σχεδιάζω τον κύκλο (C, CA) που τέμνει τη διάμετρο ΟΒ στο D. Η AD είναι η ζητούμενη πλευρά του 5γώνου.[4]

---

[2] ένα πολύγωνο μπορεί να έχει όλες τις πλευρές ίσες, αλλά όχι και τις γωνίες, πχ ο ρόμβος.

[3] αν σχεδιάσω όλες τις διαγωνίους ενός 6γωνου, σχηματίζεται το άστρο του Δαβίδ. Αν κάνω το ίδιο για ένα 12γωνο, βγαίνει το εξης σχήμα:



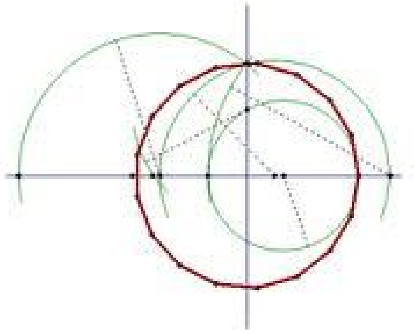

[4] Αν σχεδιάσω τον κύκλο (C, $\frac{CO}{2}$) που τέμνει την CA στο I, τότε το AI είναι πλευρά 10γώνου.

Επίσης αν διχοτομήσουμε τα ενδιάμεσα τόξα, παίρνω ένα 10γωνο. Αν διχοτομήσω πάλι, 20γωνο, 40γωνο, 80γωνο, κοκ.

Τα κανονικά πολύγωνα με 7, 9, 11, 13, 14 δεν κατασκευάζονται γεωμετρικά.

Για το 15γωνο παρατηρούμε ότι $\frac{1}{15}=\frac{2}{3}-\frac{3}{5}$, δηλ. το τόξο του 1/15 του κύκλου προκύπτει αν πάρω το τόξο 1/3 δύο φορές και από αυτό αφαιρέσω τρεις φορές το τόξο 1/5. Αρχίζοντας από ένα σημείο Α του κύκλου κατασκευάζω ένα ισόπλευρο 3γωνο ΑΒΓ και ένα 5γωνο ΑΔΕΖΗ. Το ΓΖ θα είναι η πλευρά του 15γώνου[5]. Με διχοτομήσεις κατασκευάζω και τα 30γωνο, 60γωνο, κοκ.

Η κατασκευή του 17γώνου είναι πιο σύνθετη και δόθηκε το 1796 από τον C.F. Gauss.



Με διχοτομήσεις κατασκευάζω το 34γωνο, 68γωνο, κοκ.

Η κατασκευή του 257γώνου δόθηκε από τον F.J. Richelot (1832) και αυτή του 65537γώνου από τον J.G.Hermes (1894).

Ποια πολύγωνα κατασκευάζονται: Ο C.F.Gauss στο έργο του Disqusitiones Arithmeticae (1798) διατύπωσε και απέδειξε το εξής Θεώρημα: *Αν ν = γινόμενο δύναμης του 2 με (διαφορετικούς) πρώτους αριθμούς Fermat, τότε το ν-γωνο είναι κατασκευάσιμο.*

Διατύπωσε και το αντίστροφο, το οποίο απέδειξε ο P. Wantzel (1837).

Οι **αριθμοί του Fermat** έχουν τη μορφή $2^{\nu}+1$, όπου $\nu = 2^{\mu}$. Έχουν υπολογιστεί ως τώρα οι:

μ	ν	F_μ
0	1	3
1	2	5
2	4	17
3	8	257
4	16	65537
5	32	4294967297
6	64	18446744073709551617
7	128	340282366920938463463374607431768211457
8	256	με πολλά ψηφία

Από αυτούς οι F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 είναι πρώτοι[6] ενώ οι F_5, F_6, F_7, F_8 είναι σύνθετοι. Δεν ξέρουμε αν οι επόμενοι είναι πρώτοι ή σύνθετοι: Εικασίες: υπάρχουν άλλοι πρώτοι αριθμοί Fermat; Αν ναι, είναι άπειροι; Οι σύνθετοι αριθμοί Fermat είναι άπειροι;

Το Θεώρημα του Gauss μπορεί τώρα να διατυπωθεί ως εξής:

Αν $\nu = 2^{\kappa}\cdot F_1\cdot F_2\cdot F\cdots F_\lambda$, όπου F_i πρώτοι αριθμοί Fermat διαφορετικοί μεταξύ τους, τότε το ν-γωνο είναι κατασκευάσιμο γεωμετρικά. Ισχύει και το αντίστροφο.

---

5 άλλος τρόπος: $\frac{1}{15}=\frac{1}{6}-\frac{1}{10}$

6 Αν ο $2^{\mu}+1$ είναι πρώτος, τότε πρέπει μ θα είναι δύναμη του 2, δηλ. πρέπει $\mu = 2^{\nu}$

Έτσι μόνο τα παρακάτω ν-γωνα κατασκευάζονται
3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96, 102, 120, 128, 136, 160, 170, 192, 204, 240, 255, 256, 257, …
ενώ τα πιο πολλά όχι:
7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 50, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 61, 62, 63, 65, 66, 67, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 81, 82, 83, 84, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 97, 98, 99, 100, 101, …

Αρκεί να βρω την κατασκευή των ν-γωνων με πλευρές 3, 5, 17, 257, 65537, …, δηλ. με ν = F_i. Αν ξέρω αυτών, μπορώ να κατασκευάσω και το ν-γωνο με ν = 3·5, 3·17, 3·257, 5·17, 5·257, 17·257, κά με τη βοήθεια της παρακάτω Πρότασης:

Αν κ, λ αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους, τότε υπάρχουν ακέραιοι α, β: ακ+βλ = 1.

Αν ν = λ·κ, τότε $\dfrac{\alpha}{\lambda}+\dfrac{\beta}{\kappa}=\dfrac{\alpha\kappa+\beta\lambda}{\lambda\kappa}=\dfrac{1}{\lambda\kappa}$.
Πχ το 15γωνο το κατασκευάσαμε πιο πριν επειδή 15 = 5·3 και υπάρχουν οι 2, -3:
2·5-3·3 = 1.

Για να κατασκευάσω το 51γωνο, επειδή 51 = 3·17 και 11·3-2·17 = 1 θα έχω $\dfrac{2}{3}-\dfrac{11}{17}=\dfrac{1}{51}$ δηλ. το τόξο του 3γώνου το παίρνω 2 φορές και από αυτό αφαιρώ 11 φορές το τόξο του 17γώνου.
Όμοια για ν = 85 = 5·17.
Επίσης μπορώ να κατασκευάσω και τα 3·5·17, 3·5·257, 5·17·257, κά

Μπορώ λοιπόν να κατασκευάσω τα ν-γωνα με ν = F1·F2···F_λ.[7] Αν διχοτομήσω τα ενδιάμεσα τόξα, κατασκευάζω και το $2\cdot F_1\cdot F_2\cdots F_\lambda$. Αν διχοτομήσω πάλι, κατασκευάζω το $2^2\cdot F_1\cdot F_2\cdots F_\lambda$ και γενικότερα το $2^\kappa\cdot F_1\cdot F_2\cdot F\cdots F_\lambda$.

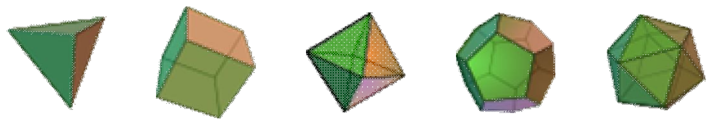
Επίσης το ν-γωνο με ν = 2^κ κατασκευάζεται με διχοτομήσεις, αρχίζοντας από το 4γωνο.

[7] είναι 31 περιπτώσεις, με τους μέχρι τώρα γνωστούς πρώτους αριθμούς Fermat

15. Κανονικά πολύεδρα 5 (Πλάτωνα) - Ημικανονικά πολύεδρα 13 (Αρχιμήδης)

Στο χώρο των 2 διαστάσεων (επίπεδο) έχουμε τα πολύγωνα, στο χώρο των 3 διαστάσεων έχουμε τα *πολύεδρα* και στο χώρο των 4 (ή περισσότερο) διαστάσεων τα *πολύτοπα.*

Ειδικότερα, γενίκευση των κανονικών πολυγώνων είναι τα *κανονικά πολύεδρα*, δηλ. <u>τα κυρτά στερεά με ίσες έδρες (από κανονικά πολύγωνα), που σε κάθε κορυφή συναντώνται ο ίδιος αριθμός ακμών</u>[8]. Πχ ο κύβος είναι 6εδρο με πλευρές τετράγωνα και σε κάθε κορυφή συναντώνται 3 ακμές. Τα κανονικά πολύεδρα μπορεί να είναι μόνο πέντε και τα περιέγραψε ο Πλάτωνας στον *Τίμαιο (360 πΚΕ)*[9], για αυτό τα λέμε **πλατωνικά στερεά**. Την απόδειξη γι' αυτό τη δίνει ο Ευκλείδης που μελετά την κατασκευή τους, τον όγκο τους, καθώς και το πώς μπορούν να εγγραφούν σε σφαίρα στο τελευταίο βιβλίο των *Στοιχείων*.

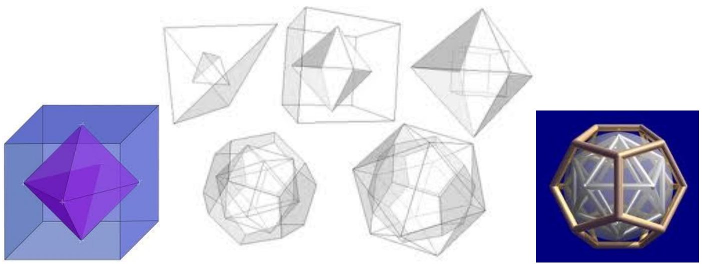


Αυτά είναι το 4εδρο (μια τριγωνική πυραμίδα), το 6εδρο (κύβος), το 8εδρο (δύο τετραγωνικές πραμίδες ενωμένες στη βάση τους), το 12εδρο και το 20εδρο.

Συμβολισμοί: Ε για τις έδρες (face), Α για τις ακμές (edges), Κ για τις κορυφές (vertices), p το είδος του πολυγώνου που είναι κάθε έδρα (3γωνο, 4γωνο, 5γωνο), q ο αριθμός των εδρών που συναντώνται σε κάθε ακμή.

πλατωνικό Ε-εδρο	*κορυφές Κ*	*p*	*q*
4εδρο	4	3	3
6εδρο	8	4	3
8εδρο	6	3	4
12εδρο	20	5	3
20εδρο	12	3	5

Από τον τύπο του L. Euler μπορούμε να βρούμε τις ακμές: Α+2 = Ε+Κ. Επίσης ισχύει ότι 2Α = pE = qK.



Παρατηρούμε ότι το 6εδρο έχει Κ=8 και το 8εδρο Κ=6, δηλ. αν πάρω το κέντρο κάθε έδρας και ενώσω όλα τα κέντρα, παίρνω Κ=6, δηλ. το 8εδρο. Και αντίστροφα, τα κέντρα των εδρών ενός 8γωνου προκύπτει 6εδρο. Λέμε ότι το *δυικό* του πρώτου είναι το δεύτερο. Το ίδιο χιαστό σχήμα είναι και στα p και q αυτών. Όμοια το 12εδρο έχει δυικό το 20εδρο. Το δυικό του 4έδρου είναι πάλι 4εδρο.

Η απόδειξη του Ευκλείδη είναι εύκολη: κάθε στερεά γωνία που αποτελείται από 3γωνα (p=3) μπορεί να έχει 3, 4 ή 5 από αυτά, όχι 6 διότι $6 \cdot 60^o = 360^o \geq 360^o$.

Κάθε στερεά γωνία που αποτελείται από 4γωνα μπορεί να έχει 3 από αυτά, όχι 4 διότι $4 \cdot 90^o = 360^o \geq 36o^0$.

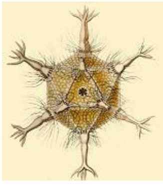
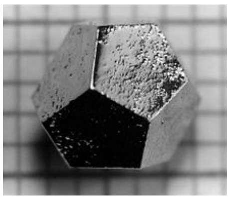
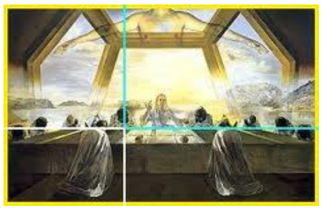
Κάθε στερεά γωνία που αποτελείται από 5γωνα μπορεί να έχει 3 από αυτά, όχι 4 διότι $4 \cdot 108^o = 432^o \geq 360^o$.

Στη Φύση το αμοιβαδο-πρωτόζωο radiolaria έχει σκελετό στο σχήμα 8εδρου, 12εδρου, 20εδρου. Ο ιός του έρπη έχει το σχήμα του 20εδρου. Το μέταλο πυριτόεδρο (quasicrystal) έχει το σχήμα του12εδρου, ο πυρίτης του 6εδρου. Τα γονίδια φτιάχνουν με πρωτείνες 20εδρα. Όλα αυτά προκύπτουν από την οικονομία που κανει η Φύση.

---

[8] αυτό περίπου σημαίνει ότι οι όλες στερεές γωνίες του είναι ίσες

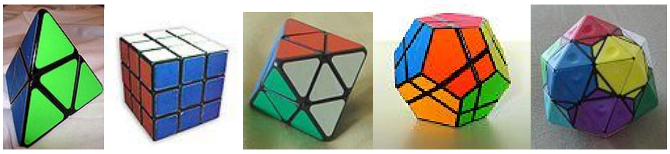
[9] τα ήξερε από τον Θεαίτητο. Παλαιότερα ο Πυθγόρας ήξερε 3 από αυτά.

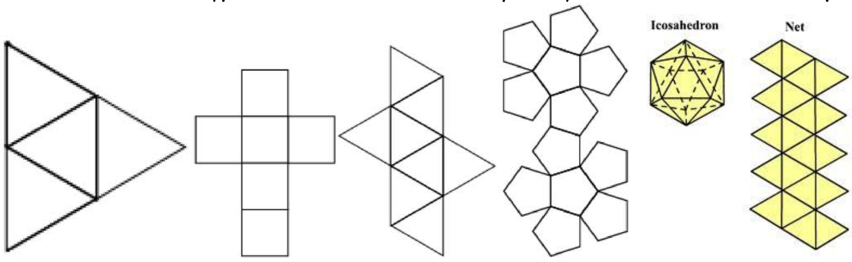
Radiolaria πυριτόεδρο Μ. Δείπνος

Ο S. Dali ζωγράφησε τον πίνακα Ο Μ. Δείπνος με φόντο ένα 12γωνο.

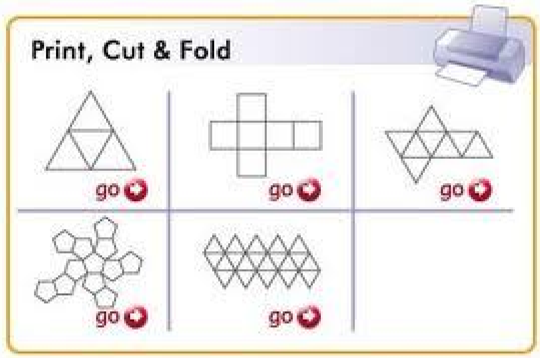
Εκτός από τα κυβικά ζάρια έχουν φτιαχτεί και άλλα με σχήμα από όλα τα πλατωνικά στερεά. Το ίδιο έκανε και ο Rubic με τον κύβο του.



Τα αναπτύγματα των πλατωνικών στερεών για να τα κατασκευάσουμε με χαρτόνι, είναι:



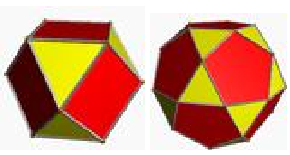
ή πάτε στο www.learner.org/interactives/geometry/platonic:



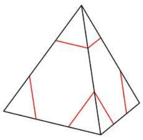
Ημικανονκά στερεά του Αρχιμήδη

Αν παραβιάσουμε την αρχή του να είναι όλες οι έδρες το ίδιο πολύγωνο, τότε μπορούμε να έχουμε στερεά με έδρες 4γωνα και 4γωνα, κά. Ορισμός:

Το κυρτό πολύεδο που έχει ίσες ακμές και οι έδρες είναι κανονικά πολύγωνα, όχι όμως απαραίτητα ίδια, λέγεται *ημικανονικό* πολύεδρο. Τα μελέτησε ο Αρχιμήδης, και τα συμπεράσματά του μας τα διέσωσε ο Πάππος. Πχ στα παρακάτω στερεά

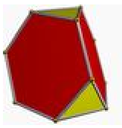
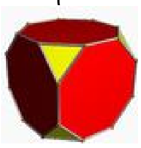
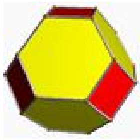
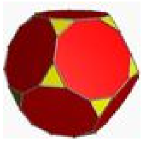
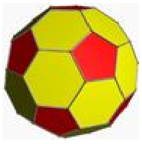


Σε μια κορυφή του πρώτου συναντώνται οι εξής έδρες (τις περιγράφουμε κυκλικά): 3γωνο, 4γωνο, 3γωνο, 4γωνο. Συμβολικά θα γράφουμε (3, 4, 3, 4). Έχει 6 4γωνα (όσα το 6εδρο ή κύβος) και 8 3γωνα (όσα το 8εδρο, το δυικό του) και θα το λέμε 6-8εδρο (ή κυβο-8εδρο). Σε μια κορυφή του δεύτερου συναντώνται: 3γωνο, 5γωνο, 3γωνο, 5γωνο, συμβολικά (3, 5, 3, 5). Έχει 20 3γωνα (όσα το 20εδρο) και 12 5γωνα (όσα το 12εδρο, το δυικό του) και θα το λέμε 20-12εδρο. Ειδικά αυτά τα δύο λέγονται *σχεδόν-κανονικά* πολύεδρα (quasi-regular polyhedra).

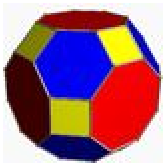


Αν πάρουμε τα 5 πλατωνικά στερεά και τα 2 σχεδόν-κανονικά πολύεδρα και τους κόψουμε τις κορυφές τους (κόβοντας κάθετα στην ευθεία κορυφής - κέντρου πολυέδρου), παίρνουμε την κόλουρη (κομμένη, truncated) μορφή τους.[10] Είναι τα αρχιμήδεια στερεά που σε κάθε κορυφή συναντώνται 3 έδρες:

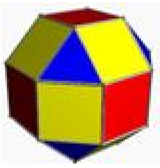
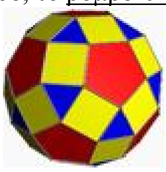
Το κόλουρο 4εδρο (3, 6, 6), το κόλουρο 6εδρο (3, 8, 8) το κόλουρο 8εδρο (4, 6, 6), το κόλουρο 12εδρο (3, 10, 10), το κόλουρο 20εδρο (5, 6, 6), που είναι η μπάλα του ποδοσφαίρου όπως καθιερώθηκε στη Δανία το 1950,

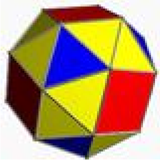
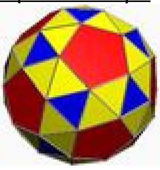
το κόλουρο 6-8εδρο (4, 6, 8) και το κόλουρο 20-12εδρο (4, 6, 10).




Τα αρχιμήδεια στερεά που σε κάθε κορυφή συναντώνται 4 έδρες είναι, εκτός από το 6-8εδρο και το 20-12εδρο, το ρομβο-6-8εδρο (3, 4, 4, 4) και το ρομβο-20-12εδρο (3, 4, 5, 4).

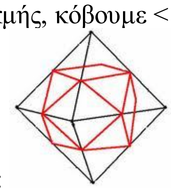
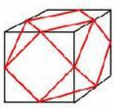



Τα αρχιμήδεια με 5 έδρες σε κάθε κορυφή τα λέμε *πεπλατυσμένα* (διογκωμένα, τραβηγμένα) πολύεδρα, δηλ. αυτά που προέρχονται από κανονικά που οι έδρες των κανονικών απέχουν η μια από την άλλη και καθεμία περιβάλλεται από τρίγωνα. Είναι το πεπλατυσμένο (snub) 6εδρο (3, 3, 3, 3, 4) και το πεπλατυσμένο 12εδρο (3, 3, 3, 3, 5).

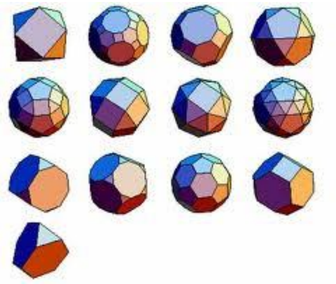



Όλα μαζί είναι 13 και ο παρακάτω πίνακας δείχνει τις Έδρες, τις Κορυφές, ποια πολύγωνα συναντώνται σε κάθε κορυφή και το πλήθος των πολυγώνων.

[10] Αν α είναι το μήκος της ακμής, κόβουμε < α/2. Αν κόψουμε α/2, τότε από το 6εδρο (και από το

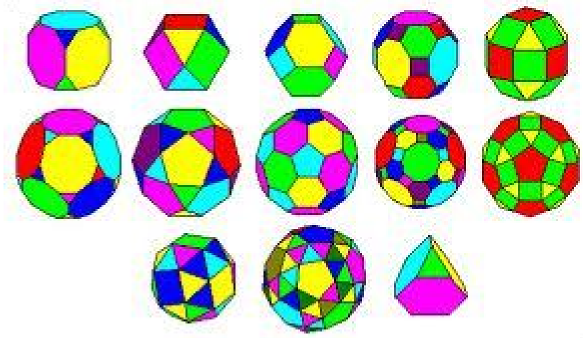



8εδρο) θα προκύψει 6-8εδρο:

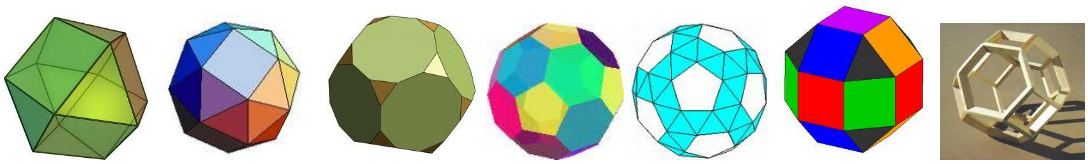


ονομασία		*Ε*	*Κ*	*3γωνα*	*4γωνα*	*5γωνα*	*6γωνα*	*8γωνα*	*10γωνα*
με 3εδρη στερεά γωνία:									
κόλουρο 4εδρο	8	12	4	-	-	4	-	-	
κόλουρο 6εδρο	14	24	8	-	-	-	6	-	
κόλουρο 8εδρο	14	24	-	6	-	8	-	-	
κόλουρο 12εδρο	32	60	20	-	-	-	-	12	
κόλουρο 20εδρο	32	60	-	-	12	20	-	-	
κόλουρο 6-8εδρο	26	48	-	12	-	8	6	-	
κόλουρο 20-12εδρο		62	60	-	30	-	20	-	12
με 4εδρη στερεά γωνία:									
6-8εδρο	26	48	8	6	-				
20-12εδρο		62	60	20	-	12			
ρομβο-6-8εδρο	26	24	8	18	-				
ρομβο-20-12εδρο	62	60	20	30	12				
με 5εδρη στερεά γωνία:									
πεπλατυσμένο 6εδρο		38	24	32	6	-			
πεπλετυσμένο 12εδρο		92	60	80	-	12			

Ο αριθμός των ακμών προκύπτει από τον τύπο του L. Euler: Α+2 = Ε+Κ.

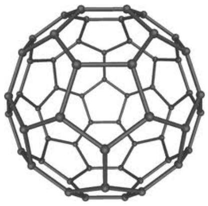


Αν έχουμε ένα αρχιμήδειο στερεό και θέλω να βρω το όνομά του, κοιτάω μια κορυφή του από τις είδους έδρες αποτελείται. Άσκηση: βρείτε το όνομα των παρακάτω



Στη φύση υπάρχει ένα μόριο που αποτελείται από 60 άτομα άνθρακα, η *φουλερίνη*[11] που η θέση των ατόμων C είναι κορυφές *κόλουρου 20εδρου* (μπάλας ποδοσφαίρου):

[11] fullerene, ονομάστηκε έτσι προς τιμήν του R. Buckminster-Fuller που κατασκεύαζε σφαιρικά-πολυεδρικά αρχιτεκτονήματα. Ειδική περίπτωση οι μπακμινστερφουλερίνες. Βρέθηκαν και στο διάστημα: αν από εκεί ήρθαν στη γη, τότε η ζωή μπορεί να προέκυψε από αυτές

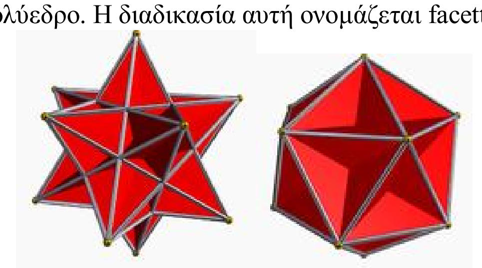


Αστεροειδή των Kepler - Poinsot

Αν παραβιάσουμε την αρχή του να είναι το πολύεδρο κυρτό, παίρνουμε τα *αστεροειδή πολύεδρα (stellated polyhedra)*. Αυτά είναι γενίκευση των αστεροειδών πολυγώνων (star polygon). Το 1619 ο J. Kepler[12] παρατήρησε ότι αν προεκτείνω τις ακμές ενός 12έδρου ή 20έδρου, συναντώνται και σχηματίζουν ένα κανονικό, αλλά μη κυρτό, πολύεδρο. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται αστεροποίηση (sellation).

Ονομάζονται το <u>μικρό αστεροειδές 12εδρο</u> και το <u>μεγάλο αστεροειδές 12εδρο</u>. Προκύπτουν και ως εξής: σε ένα 12εδρο προσθέτω σε κάθε έδρα του μια 5γωνική πυραμίδα (έτσι ώστε οι ακμές της να είναι προέκταση των ακμών του 12έδρου) και σε ένα 20εδρο προσθέτω σε κάθε έδρα του μια κατάλληλη 3γωνική πυραμίδα. Στο 1ο η έδρα δεν είναι το 3γωνο (η πλευρά της πυραμίδας) αλλά το πεντάγραμμο (που στη μέση του έχει την πυραμίδα). Έχουμε 12 τέτοια πεντάγραμμα, άρα **Ε=12**.[13] Οι ακμές τώρα: κάθε πεντάγραμμο έχει 5 πλευρές και έχω 12 τέτοια, άρα 5·12 = 60. αλλά κάθε ακμή μετρήθηκε 2 φορές, έτσι Α=60:2=30. Επίσης Κ=12. Βλέπουμε ότι Α-6 = Ε+Κ, δηλ. δεν ισχύει εδώ ο τύπος του Euler. Στο 2ο, κάθε 5 τρίγωνα είναι ένα πεντάγραμμο που είναι μία έδρα (στο σχήμα τα 3γωνα με ανοιχτό κόκινο αποτελούν ένα πεντάγραμμο, πάνω στο οποίο υπάρχουν 5 πυραμίδες). Έχουμε 20·3 = 60 τρίγωνα, άρα 60:5 = **12 = Ε**[14]. Γι' αυτό λέγεται μ. α. 12εδρο! Για να βρω τις έδρες, δεν μετράμε τις πυραμίδες, αλλά τα πεντάλφα. Οι ακμές τώρα: έχουμε 20 πυραμίδες, η καθεμία έχει 3 ακμές, άρα 60 ακμές, που τις έχουμε μετρήσει δύο φορές, άρα Α = 30. Επίσης Κ = 20.

Το 1809 ο L. Poinsot παρατήρησε ότι αν αφαιρέσω κομμάτια από ένα μικρό αστεροειδές 12εδρο ή από ένα 20εδρο έτσι ώστε να μείνουν οι κορυφές (και οι ακμές) ίδιες, σχηματίζεται ένα κανονικό, αλλά μη κυρτό, πολύεδρο. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται facetting.



Ονομάζονται το <u>μεγάλο 20εδρο</u> και το <u>μεγάλο 12εδρο</u>. Στο πρώτο σε κάθε κορυφή συναντώνται 5 έδρες (3γωνα), δηλ. 12·5 = 60, αλλά τις έχουμε μετρήσει τρεις φορές, έτσι **Ε=20**. Οι ακμές και οι κορυφές είναι όσες του πολυέδρου από το οποίο προήλθε. Στο δεύτερο σε κάθε κορυφή συναντώνται 5 έδρες (5γωνα), δηλ. 12·5 = 60, αλλά τις έχουμε μετρήσει πέντε φορές, έτσι **Ε=12**. Βλέπουμε ότι Ε+Κ = Α-6, δηλ. δεν ισχύει εδώ ο τύπος του Euler. Τώρα ο πίνακας είναι πλήρης:

αστεροειδές πολύεδρο	*είδος έδρας*	*Ε*	*Κ*	*Α*	*χ*
μικρό αστεροειδές 12εδρο	πεντάγραμμο	12	12	30	-6
μεγάλο αστεροειδές 12εδρο	πεντάγραμμο	12	20	30	2
μεγάλο 20εδρο	3γωνο	20	12	30	2
μεγάλο 12εδρο	5γωνο	12	12	30	-6

Επειδή στον τύπο Ε+Κ = Α+χ το χ δεν είναι 2 για το μικρό α. 12εδρο και για το μεγάλο 20εδρο, μερικοί δεν τα θεωρούν πολύεδρα. Παρατηρείστε ότι οι έδρες του 2ου και οι ακμές του 3ου εναλλάσσονται, άρα το ένα είναι το δυαδικό του άλλου. Επίσης το 1ο και το 4ο.

[12] το αστεροειδές 12εδρο υπάρχει και παλαιότερα; στο δάπεδο του αγ. Μάρκου στη Βενετία και σε ένα βιβλίο του 16ου αι. του καλιτέχνη Wenzel Jamnitzer.
[13] ή: έχω 60 τρίγωνα. Κάθε 5 είναι μία έδρα, δηλ. 60:5 = 12 έδρες
[14] ή: κάθε πεντάγραμμο-έδρα αντιστοιχεί σε μια κορυφή, που είναι 12.

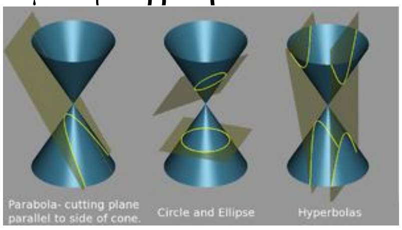
Το 1ο ενέπνευσε τον M.C. Escher στο έργο του Gravitation. Βασιζόμενος στο 2ο, το 1982 ο μαθηματικός Adam Alexander έφτιαξε το παρακάτω παιχνίδι (puzzle):


Λύση άσκησης στα αρχιμήδεια στερεά:

(3, 4, 3, 4) 6-8εδρο
(3, 3, 3, 3, 4) πεπλατυσμένο 6εδρο
(3, 10, 10) κόλουρο 12γωνο
(5, 6, 6) κόλουρο 20εδρο
(5, 3, 3, 3, 3) πεπλατυσμένο 12εδρο
(3, 4, 4π, 4) ρομβο-6-8εδρο
(4, 6, 6) κόλουρο 8εδρο

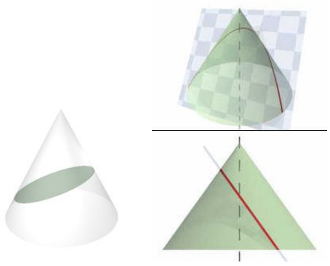
17. Κωνικές τομές: οι 3 καμπύλες του Απολλώνιου

Ο Μένεχμος όρισε τις κωνικές τομές με έναν άλλο τρόπο από αυτόν του Απολλώνιου. Μετά ασχολήθηκε με αυτές ο Ευκλείδης και ο Αρχιμήδης. Ο Απολλώνιος έγραψε το έργο *Κωνικά* και περισυνέλλεξε όλες τις ως τότε προόδους, προάγοντας με δικά του θεωρήματα τη μελέτη τους. Σύγκρινε το εμβαδό χωρίου τους με ένα ορθογώνιο. Στη μία περίπτωση, το εμβαδό του χωρίου της καμπύλης ήταν *μικρότερο* από του ορθογωνίου, έτσι την είπε **έλλειψη**. Στη δεύτερη περίπτωση ήταν *ίσο* (μπορούσε να παραβληθεί) και την είπε **παραβολή**. Στην τρίτη περίπτωση το *ξεπερνούσε* (υπερέβαλε), οπότε ονόμασε την καμπύλη **υπερβολή**.



Η τομή ενός κώνου με ένα επίπεδο δίνει έναν όμοιο τρόπο περιγραφής των τριών καμπυλών. Η επιφάνεια ενός κώνου σχηματίζεται από την περιστροφή μιας ευθείας, της *γενέτειρας*. Η εσωτερική γωνία του κώνου ας είναι η οφεία γωνία φ. Με ένα επίπεδο τέμνουμε τον κώνο. Η τομή του επιπέδου με τον κώνο σχηματίζει μια καμπύλη. Αν η (οξεία) γωνία του επιπέδου με τη γενέτειρα του κώνου είναι

$>$φ τότε η καμπύλη είναι έλλειψη (αν $=90^o$ τότε είναι κύκλος)
$=$φ είναι παραβολή (το επίπεδο είναι // με τη γενέτειρα)
$<$φ είναι υπερβολή (τέμνει και τον άλλο κώνο).



Αν εγγράψω μια σφαίρα μέσα στον κώνο μεταξύ του επιπέδου της κωνικής και της κορυφής του κώνου, εφάπτεται του επιπέδου της κωνκής σε ένα σημείο που το λέμε εστία (focus) της κωνικής (σφαίρα του G.P. Dandelin).

Η έλλειψη χρειάστηκε από τον J. Kepler για να περιγράψει την τροχιά των πλανητών, που αντιλήφθηκε ότι δεν είναι κυκλική. Ο R. Descartes εφάρμοσε την αναλυτική του γεωμετρία στις τρεις καμπύλες.

Η παραβολή, στην πιο απλή της μορφή, είναι η συνάρτηση $y = x^2$. Είναι η γραφική παράσταση του τριωνύμου $y = ax^2+bx+c$.

Η υπερβολή είναι, στην πιο απλή της μορφή, η γραφική παράσταση της $y = 1/x$. Αν $y = a/x$ τα ποσά x, y είναι αντιστρόφως ανάλογα.

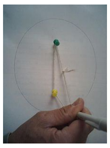
Ο R. Descartes έδωσε έναν γενικό τύπο και για τις τρεις:
$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f = 0$, όπου a, b, c όχι όλα μηδέν.
Θέτουμε $\Delta = b^2-4ac$, οπότε αν:
$\Delta < 0$ η εξίσωση παριστά έλλειψη
$\Delta = 0$ παριστά παραβολή
$\Delta > 0$ υπερβολή.

Για την έλλειψη αυτό γίνεται $(x/a)^2+(y/b)^2 = 1$.

Τα πόσο διαφέρει η καμπύλη από τον κύκλο, το μετρά η εκκεντρότητα ε. Αν ε=0 η καμπύλη είναι κύκλος. Αν
$\varepsilon<1$ είναι έλλειψη με $\varepsilon = \sqrt{(1-(b/a)^2)}$
$\varepsilon=1$ παραβολή
$\varepsilon>1$ υπερβολή με $\varepsilon = \sqrt{(1+(b/a)^2)}$
όπου α ο μεγάλος ημιάξονας και β ο μικρός.

ε Ερμή = 0,2056

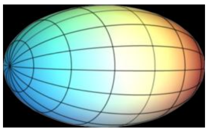
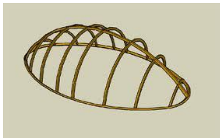
Η **έλλειψη** έχει την ιδιότητα το άθροισμα των αποστάσεων ενός σημείου της από τις εστίες της, είναι ίσο με 2α = σταθερό. Με αυτή την ιδιότητα μπορούμε με 2 πινέζες και ένα σπάγγο να τη σχεδιάσουμε. Ο Αρχιμήδης επινόησε τον *ελλειψογράφο*.



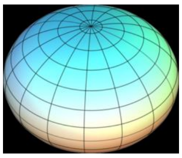

Η πολική της εξίσωση είναι x(t) = acos(t), y(t) = bsin(t).

Είναι ειδική περίπτωση υποτροχοειδούς καμπύλης.

Αν σε μια λεκάνη ελλειπικού σχήματος με νερό, δημιουργήσω κύματα από τη μία εστία της έλλειψης, μετά από την ανάκλασή τους στα τοιχώματα, θα συγκλίνουν στη δεύτερη εστία της. Το ίδιο σε έναν ελλειπτικό κάτοπτρο, ένα φως στη μία εστία θα δημιουργήσει ακτίνες που θα συγκλίνουν στη δεύτερη. Αν σε ένα ελλειπτικό δωμάτιο ένας στέκεται στη μια εστία και μιλάει, θα τον ακούς καθαρά όταν σταθείς στη δεύτερη εστία.

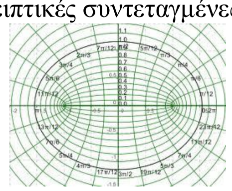
Το φαινόμενο είναι πιο έντονο αν η οροφή είναι *ελλειψοειδής*, πχ οι τρούλοι των ναών έχουν το σχήμα του *σφαιροειδούς* (ή *μεγάλης έλλειψης*).




Η μεγαλύτερη απόσταση ενός πλανήτη είναι Μ=α(1+ε), η μικρότερη μ=α(1-ε). Το p είναι ο αρμονικός μέσος των Μ, μ: 1/Μ + 1/μ = 2/p.

Παρακάτω φαίνεται μια ελλειπτική οροφή.

Μπορούμε να ορίσουμε και ελλειπτικές συντεταγμένες.



Ο B. Riemann δημιούργησε (1854) μια γεωμετρία που δεν ισχύει το 5ο αίτημα του Ευκλείδη[15]. Στη γεωμετρία αυτή δεν έχουμε επίπεδη επιφάνεια (τη λέμε μη-Ευκλείδεια γεωμετρία) αλλά την επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς (πχ σφαίρας). Τη λέμε *ελλειπτική* γεωμετρία. Εδώ, αν έχω μια

---

[15] ή αίτημα των παραλλήλων: αν ένα ευθ. τμήμα τέμνει δύο ευθείες έτσι ώστε οι δύο γωνίες που σχηματίζονται εσωτερικά να έχουν άθροισμα < 2 ορθές, τότε, αν οι ευθείες προεκταθούν, θα τμηθούν (προς τη μεριά των γωνιών που έχουν άθροισμα < 2 ορθές).

ισοδύναμη διατύπωση (του J. Playfair): αν έχω μία ευθεία και ένα σημείο εκτός αυτής, μπορώ να φέρω **μία** μόνο παράλληλη από το σημείο προς την ευθεία. Δες σχήμα 1. Η γεωμετρία του B. Riemann είναι η περίπτωση 2. Για το 3 δες παρακάτω *υπερβολική γεωμετρία των Lobachevsky-Bolyai*

ευθεία και ένα σημείο εκτός αυτής, καμία παράλληλη δεν μπορεί να αχθεί (όλες οι ευθείες από το σημείο, τέμνουν την αρχική).

Επίσης εδώ το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι > 180^o.

Η **παραβολή** έχει εξίσωση $y^2 = 4px$ όπου (p, 0) είναι η εστία και x = -p η διευθετούσα.

Η πολική εξίσωση της παραβολής είναι r(1+cosθ) = p, όπου (r, θ) σημείο της.

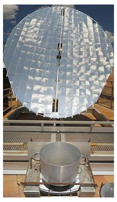
Η ταχύτητα διαφυγής στη γη είναι 11,2 km/s, δηλ. αν ένα σώμα κινείται με μικρότερη, θα διαγράφει ελλειπτική τροχιά γύρω από τη γη, αν κινείται με 11,2 km/h θα διαφύγει και θα κινηθεί σε παραβολική τροχιά (ενώ αν κινείται με μεγαλύτερη θα διαφύγει με υπερβολικά τροχιά). Ο Γαλιλαίος απέδειξε ότι ένα τόπι που αναπηδά στο πάτωμα κάνει κάθε φορά παραβολικά τόξα. Τέτοια κάνει και το νερό στα συντριβάνια.

Αν το φως του ήλιου πέσει στο εσωτερικό ενός παραβολικού κατόπτρου, οι ακτίνες θα συγκλίνουν στην εστία της παραβολής. Αντίστροφα, αν έχω μια λάμπα στην εστία, θα προκαλέσει δέσμη παράλληλων ακτίνων φωτός (πχ τα φανάρια των αυτοκινήτων). Η παρακάτω κατασκευή μαζεύει ενέργεια του ήλιου από την εστία του παραβολικού πιάτου:

National Solar energy Center, Israel. Ηλιακός φούρνος

Ο ηλιακός φούρνος στα γαλλικά Πυρηναία φθάνει τους 3500^o C.

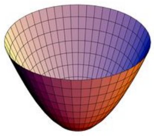
Στην Αφρική με ηλιακούς φούρνους παστεριώνουν το νερό ή ζεσταίνουν τσάι στο Θιβέτ.



Λέγεται ότι ο Αρχιμήδης στον 2ο Καρχηδονιακό πόλεμο έκαιγε πλοία των ρωμαίων με παραβολικά κάτοπτρα.

Η ιδιότητα αυτή της παραβολής χρησιμοποιείται σε τηλεσκόπια, φανούς φάρων, δορυφορικά πιάτα, καθρέφτες παραμόρφωσης, κά.

Με την κατάλληλη περιστροφή μιας υπερβολής, δημιουργείται η *υπερβολοειδής* επιφάνεια:



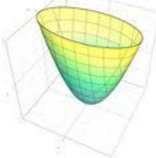
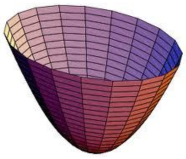
$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Από έξω λέγεται *κοίλη* (convex) ενώ από μέσα λέγεται *κυρτή* (concave).

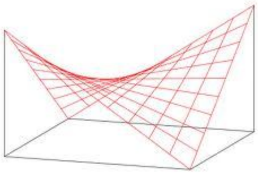
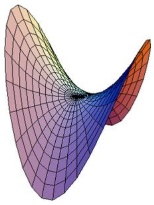
Σε ένα παραβολικό κοίλο κάτοπτρο, μπορούμε να δούμε γύρω από μια γωνία:

Αν ένας φακός είναι παραβολικός κοίλος και από τις δύο πλευρές, είναι μεγεθυντικός. Αν είναι κυρτός, σμικρύνει τα αντικείμενα.

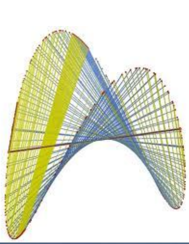
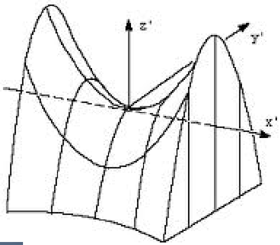
Το *ελλειπτικό παραβολοειδές* είναι η παρακάτω επιφάνεια:

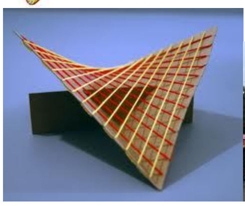



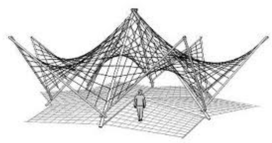
Το *υπερβολικό παραβολοειδές* είναι μια σαγμοειδής επιφάνεια. Τα πατατάκια Pringles χρησιμοποιούν αυτό το σχήμα για να στοιβιάζονται χωρίς να πέφτει η στοίβα.


Επειδή έχει την ιδιότητα σε κάθε σημείο του να μπορώ να φέρω δύο (διαφορετικές) ευθείες που να ανήκουν πάνω στην επιφάνειά του (*διπλά τυλιγμένη επιφάνεια, duble scrolled surface*), χρησιμοποιείται σε οροφές, δηλ. μπορεί να χρησιμοποιηθούν μόνο ίσες ξύλινες δοκοί, που είναι οικονομικότερο.



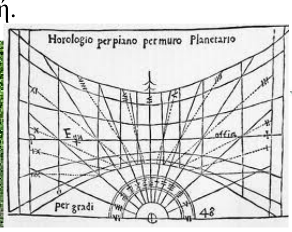
Η **υπερβολή** είναι το σχήμα που αφήνει μια λάμπα οροφής στον τοίχο. Η υπερβολή y = a/x παριστά αντιστρόφως ανάλογα ποσά (inversly proportional).

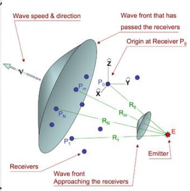
Έχει εξίσωση $(x/a)^2-(y/b)^2 = 1$ ή

σε πολικές συντεταγμένες x = Rcost, y = Rsint, όπου $R^2 = (b^2)/(e^e\cos^2 t-1)$.

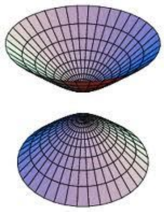
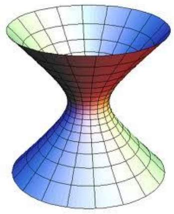
Ο Απολλώνιος τη χρησιμοποίησε για να τριχοτομήσει τη γωνία.

Στα ηλιακά ωρολόγια (sundials), καθώς ο ήλιος προχωράει στον ουρανό, η ευθεία ήλιου - επάνω άκρο του γνώμωνα διαγράφει έναν κώνο. Η τομή του επιπέδου του ωρολογίου και του κώνου είναι γενικά μια υπερβολή. Η καμπύλη αυτή εξαρτάται από το γεωγραφικό πλάτος και την ημέρα του έτους, έτσι κάθε ημέρα είναι διαφορετική.



Σε κάθε σημείο της υπερβολής, η διαφορά την αποστάσεών του από τις εστίες είναι σταθερή. Αυτό χρησιμοποιείται στη ναυσιπλοΐα στο GPS (σύστημα TDOA) και στους οικιακούς ανιχνευτές κλεπτών. Ο ανιχνευτής εκπέμπει ακτίνες και κάθε φορά βρίσκει τη διαφορά τους, που είναι πάντα ίδια. 'Οταν δεν είναι, κάποιος βρίσκεται στο χώρο.

Αν περιστρέψουμε στο χωρο κατάλληλα μια υπερβολή, παίρνουμε το τρισδιάστατο σχήμα που το λέμε *υπερβολοειδές*. Μόνο ευθείες γραμμές, πχ ξυλάκια, μπορούν να το σχηματίσουν. Ο παρακάτω πύργος φτιάχτηκε στην Ιαπωνία.

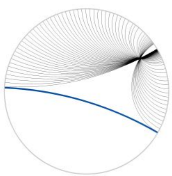
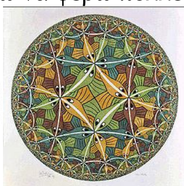
  

Το υπερβολοειδές έχει την ιδιότητα ότι σε κάθε σημείο του μπορώ να φέρω δύο (διαφορετικές) ευθείες που να ανήκουν πάνω στην επιφάνειά του (*διπλά τυλιγμένη επιφάνεια, duble scrolled surface*). Αυτό χρησιμοποιείται σε στερεές κατασκευές, δηλ. μπορεί να χρησιμοποιηθούν μόνο ίσες ατσάλινες ράβδοι, που είναι οικονομικότερο. Οι πύργοι ψύξης είναι τέτοιοι, πχ της ΔΕΗ.

Αν αντί για τριγωνομετρικό κύκλο πάρω υπερβολή, την x^2-y^2 = 1, τότε ορίζονται οι υπερβολικοί τριγωνομετρικοί αριθμοί. ένα σημείο θα έχει συντεταγμένες (cosh(α), sinh(α)).

Η αύξηση του πληθυσμού στη γη ακολουθεί την καμπύλη της υπερβολής. Επίσης ο πολλαπλασιασμός των ενζύμων.

Οι N. Lobachevsky & J. Bolyai δημιούργησαν (1830) μια γεωμετρία όπου δεν ισχύει το 5ο αίτημα του Ευκλείδη. Στη γεωμετρία αυτή δεν έχουμε επίπεδη επιφάνεια (τη λέμε μη-Ευκλείδεια γεωμετρία) αλλά την επιφάνεια ενός υπερβολοειδούς. Τη λέμε *υπερβολική* γεωμετρία. Εδώ, αν έχω μια ευθεία και ένα σημείο εκτός αυτής, μπορώ να φέρω πολλές ευθείες που να μην τέμνουν την αρχική:

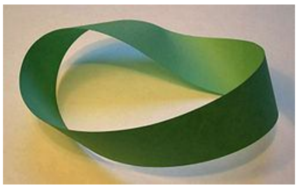
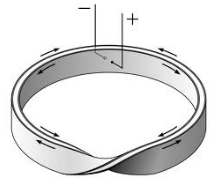
Στο πιο πάνω μοντέλο της υπερβολικής γεωμετρίας, που το έφτιαξε ο M.C. Escher, οι λευκές γραμμές είναι οι ευθείες. Σχηματίζουν υπερβολικά τρίγωνα και τετράγωνα. Σε μια κορυφή συναντώνται τρία 4γωνα και τρία ίσα 3γωνα. Εδώ βλέπουμε και το ότι αν και όλα τα ψάρια είναι θεωρητικά ίσα, στο μοντέλο τα μεσαία φαίνονται μεγαλύτερα.

Επίσης εδώ το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι $< 180^o$ και αν το τρίγωνο έχει τις 3 κορυφές του στο όριο του δίκου (βλέπε στο πιο πάνω μοντέλο) το άθροισμα είναι 0^o.

Η επιφάνεια μερικών κοραλλιών μοιάζει με αυτήν το υπερβολοειδούς.

17. Möbius ταινία

Το 1858 οι γερμανοί μαθηματικοί A.F. Möbius & J.B. Listing επινόησαν την παρακάτω λωρίδα: είναι μια ταινία (επιφάνεια) αλλά μόνο με μια πλευρά (σύνορο). Οι επιφάνειες σε ένα χώρο (που μπορεί να έχει και διάσταση μεγαλύτερη του 3) ονομάστηκαν από τον Riemann *πολλαπλότητες* (manifolds).

Για να τη φτιάξουμε, παίρνουμε μια λωρίδα χαρτί, την κυρτώνουμε να σχηματίσει κύκλο και πριν κολλήσουμε τα άκρα της μεταξύ τους, περιστρέφουμε το ένα άκρο κατά μισή στροφή (180^o).

Έχει περίεργες ιδιότητες: αν ξεκινώντας από ένα σημείο σχεδιάζουμε μια γραμμή πάνω στην επιφάνειά της κατά το μήκος της ταινίας τότε, όταν θα έχουμε προχωρήσει όσο το μήκος της ταινίας, θα έχουμε φθάσει στο σημείο, αλλά από την άλλη μεριά. Αν συνεχίσουμε τη γραμμή, αφού διατρέξουμε άλλο τόσο όσο το μήκος της ταινίας, θα έχουμε φθάσει στο αρχικό σημείο. Δηλ. η ταινία έχει μόνο μία πλευρά με διπλάσιο μήκος. Αυτό φαίνεται με το ακόλουθο:


Αν την κόβουμε στη μέση και με το ψαλίδι διατρέξουμε όλο το μήκος της, δεν προκύπτουν δύο ταινίες, αλλά μία που το ένα άκρο της πριν κολληθεί έχει περιστραφεί 2 πλήρης στροφές. Αν την ξανακόψουμε στη μέση, παίρνουμε δύο ταινίες, όμοιες με την προηγούμενη (στο μήκος και στις στροφές) αλλά τη μία τυλιγμένη μέσα στην άλλη, τις.

Αν την κόβουμε στο 1/3 του πλάτους της και με το ψαλίδι διατρέξουμε όλο το μήκος της, προκύπτουν δύο ταινίες τυλιγμένες τη μία μέσα στην άλλη, όπου η μία έχει πλάτος 2/3 και είναι όμοια με την αρχική (σε μήκος και στροφές), ενώ η άλλη έχει πλάτος 1/3, διπλάσιο μήκος και δύο πλήρεις στροφές στο σημείο κόλλησης.

Ακόμη και αν κατά την κόλληση περιστρέψω το ένα άκρο 3, 5, 7, … μισές στροφές, πάλι η ταινία λέγεται του Möbius. Η παρακάτω δεν είναι:

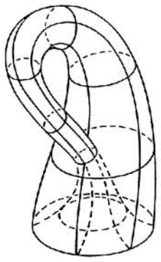
Αν πάρω μια λωρίδα χαρτί, την κυρτώσω να σχηματίσει κύκλο και πριν κολλήσω τα άκρα της μεταξύ τους, περιστρέφω το ένα άκρο κατά δύο πλήρεις στροφές ($2 \cdot 360^o$) τότε προκύπτει μια ταινία με σχήμα όπως αυτό


που λέγεται *κόμπος-τριφύλλι*, *trefoil knot* (ένας σφιχτός κόμπος-τριφύλλι είανι το σύμβολο για τα μάλλινα).

Παρακάτω βλέπουμε έργα εμπνευσμένα από την ταινία του Möbius.

Άλλο σχήμα με ασυνήθιστες ιδιότητες είναι το μπουκάλι του F. Klein:

πχ, επειδή δεν έχει εσωτερικό, ο όγκος του είναι 0. Μελετάται στα ανώτερα μαθηματικά.

18. Μουσική & Μαθηματικά: το μονόχορδο του Πυθαγόρα

Ο Πυθαγόρας θεμελίωσε την αρχαία ελληνική μουσική με έναν απλό τρόπο. Οι μεταγενέστεροι την τελειοποίησαν προσδιορίζοντας τα διαστήματα (τους *τόνους*) με περισσότερη ακρίβεια. Από το μεσαίωνα και μετά, η δυτικοευρωπαϊκή μουσική απλοποιήθηκε, επιστρέφοντας στην αρχή της θεμελίωσής της. Οι αρχαίοι τραγουδούσαν ποιήματα και με τα μουσικά όργανα κρατούσαν το ρυθμό. Ήταν μονοφωνική μουσική, από το μεσαίωνα και μετά όμως στη δυτική ευρώπη αναπτύχθηκε η πολυφωνική. Κάθε τμήμα από το ενιαίο για τους αρχαίους *ποίηση - τραγούδι - μουσική* αναπτύχθηκε ξεχωριστά.

Στο μονόχορδο τέντωσε μια χορδή πάνω σε ένα όργανο που είχε *σκάφος* και *λαβή* για τα τονικά διαστήματα (*τάστα)* και κρατιόταν κατακόρυφα (σαν την λύρα της Κρήτης ή του Πόντου). Κρατώντας σταθερά τη χορδή σε διάφορες θέσεις (με το δάκτυλο ή με μαγάδα (καβαλάρη) που κινείται), έκρουε το κάτω τμήμα της και προσπάθησε να βρει ποιοι ήχοι ήταν ευχάριστοι.

Ας θεωρήσουμε το κάτω μέρος της χορδής ως αρχή των μετρήσεων, δηλ. 0 και ας είναι το μήκος της 1, δηλ. στο επάνω άκρο της χορδής είναι το 1. Όσο πιο μικρό είναι το τμήμα της χορδής που πάλλεται, τόσο υψηλότερος είναι ο ήχος. Το κάτω ήμισυ του οργάνου είναι το σκάφος και το άνω ήμισυ η λαβή, εκεί όπου βάζουμε το δάκτυλο για να κρατήσουμε σταθερά τη χορδή (να μικρύνουμε το μήκος της). Δηλ. το δάκτυλο τοποθετείται από τη θέση 1/2 ως τη θέση 1. Η 1η νότα (*φθόγγος*) θα βγεί πατώντας στη θέση 1/2 (στο πιο κάτω από τα τάστα), η τελευταία πατώντας στη θέση 1 (στο πιο πάνω).

Όταν κράτησε τη χορδή στη μέση της, δηλ. στη θέση 1/2 η νότα ήταν η πιο οξεία[16] και την ονόμασε *νεάτη/νήτη* (η κάτω), επειδή έτσι όπως κρατιόταν κατακόρυφα το όργανο, η χορδή κρατιόταν στην πιο κάτω της θέση[17]. Από τη θέση 1/2 ανεβαίνοντας ως τη θέση 1 βρήκε 8 νότες (οκτάβα). Όταν την κράτησε στη θέση 2/3 βρήκε την 4η νότα, και στη θέση 3/4 την 5η. Στη θέση 1 η νότα ήταν η πιο *βαρεία* και την ονόμασε *υπάτη* (η επάνω). Είναι το βαρύ κε της βυζαντινής μουσικής. Είναι εντυπωσιακό ότι οι νότες ταιριάζουν με αναλογίες και μάλιστα μικρών αριθμών. Έχουμε λοιπόν ως τώρα

1η νότα 4η 5η 8η
1/2 2/3 3/4 1
Επειδή ΕΚΠ(2, 3, 4) = 12 οι λόγοι γράφονται και ως
6/12 8/12 9/12 12/12
δηλ. αν το μήκος της χορδής το πάρω ίσο με 12, τότε οι νότες αυτές παράγονται στα σημεία
6 8 9 12

Ο ευχάριστος ήχος για αυτές τις νότες έχει σχέση με αυτούς τους αριθμούς, αλλά πώς προκύπτουν; Εδώ παρατήρησε ότι το 8 είναι ο μέσος αρμονικός των 6, 12 (δηλ. 2/8 = 1/6+1/9) ενώ το 8 είναι ο αριθμητικός μέσος των 6, 12 (δηλ. 2·8 = 6+12). Ίσως αυτό να ήταν η σχέση.

Αν δύο νότες ηχήσουν ταυτόχρονα, μπορεί να ακουστούν ευχάριστα (*συμφωνία*) ή όχι (*διαφωνία*). Ευχάριστο αίσθημα δίνουν οι νότες 2/3 και 1/2, που έχουν πηλίκο 1 + 1/3 και ο Πυθαγόρας ονόμασε *λόγον επίτριτον* (είναι η συμφωνία δια 4 χορδών), οι νότες 1 και 1/2, που έχουν πηλίκο 2 και ο Πυθαγόρας ονόμασε *λόγον διπλάσιον* (είναι η συμφωνία δια 8 χορδών) και οι νότες 3/4 και 1/2, που έχουν πηλίκο 1,5 και ονόμασε *λόγον ημιόλιον* (είναι η συμφωνία δια 5 χορδών).

Πριν διαίρεσε τη χορδή σε 3 μέρη και βρήκε ποιο μέρος δίνει ωραίο ήχο, το 1/3 ή το 2/3. Το ίδιο έκανε και διαιρώντας την σε 4 μέρη. Τώρα διαίρεσε τη χορδή σε 5 και βρήκε ότι το μήκος χορδής 3/5 δίνει ευχάριστο ήχο, αλλά η ταυτόχρονη ήχηση με την 1/2 δίνει μέτρια ευχάριστο αίσθημα. Το ίδιο και η 4/5. Αυτές λέγονται ατελείς συμφωνίες.

Η θέση 8/9 δίνει ευχάριστο ήχο, αλλά μαζί με την 1/2 κάνουν διαφωνία. Το ίδιο και η 8/15.

Ορολογία: Ο *φθόγγος* (νότα) παράγεται από μία χορδή. Η απόσταση δύο φθόγγων λέγεται *διάστημα (*συμφωνία δια δύο φθόγγων). Αυτό μπορεί να είναι *τόνος* ή *ημιτόνιο*. Το ημιτόνιο (*λείμμα*),

[16] είχε τη χαμηλότερη συχνότητα
[17] οι αρχαίοι διάβαζαν τις νότες από κάτω προς τα επάνω, από την οξύτερη στη βαρύτερη, αντίστροφα από ότι τις γράφουν οι ευρωπαίοι στο πεντάγραμμο. Έτσι οι αρχαίοι *χαμηλή* έλεγαν την οξύτερη νότα, ενώ οι ευρωπαίοι λένε τη βαρύτερη.

που στην ευρωπαϊκή είναι το ήμισυ του τόνου, στην αρχαία ελληνική & στη βυζαντινή δεν ήταν ακριβώς, πχ 5/12 ή 7/12 του τόνου.

Έτσι ο Πυθαγόρας ασχολήθηκε πρώτα με 4 νότες στη σειρά (**τετράχορδο**) που δίνουν συμφωνία. Παρατήρησε ότι το διάστημα 4ης-3ης δίνει 2/3 : 3/5 = 10/9 = 1,12 και το διάστημα 3ης-2ης 3/5 : 8/15 = 9/8 = 1,12 ενώ το διάστημα 2ης-1ης δίνει λόγο 8/15 : 1/2 = 16/15 = 1,06 δηλ. το τρίτο διάστημα έχει τη μισή διαφορά από τη μονάδα από ότι τα άλλα δύο. Ο Πυθαγόρας ονόμασε *τόνο* τα μεγάλα διαστήματα και *ημιτόνιο* το τρίτο. Τις νότες του τετραχόρδου τις ονόμασε μα βάση τα φωνήεντα α, ε, η, ω ή για να προφέρονται καλύτερα, τα, τε, τη, τω. Είναι το βαρύ τετράχορδο. Αν ο τόνος έχει μέγεθος 2 κομμάτια (*κόμματα*), τότε το τετράχορδο είναι 1-2-2.

Παρατήρησε επίσης ότι το ίδιο ισχύει και με τα επόμενα τρια διαστήματα, δηλ. το 5ης-4ης δίνει 9/8, το 6ης-5ης δίνει 16/15 και το 7ης-6ης δίνει 10/9. Αυτό είναι το μέσο τετράχορδο.

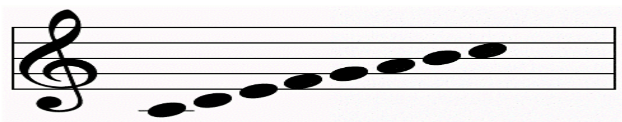
Επίσης μαζί με το διάστημα 8ης-7ης που δίνει 9/8 δηλ. τόνο, τα δύο προηγούμενα τετράχορδα αποτελούν **οκτάχορδο** (οκτάβα): 2 - 1-2-2 - 1-2-2.

Αν ο τόνος είναι 6, το ημιτόνιο θα είναι 3 και το τετράχορδο 3-6-6. Αν θέλουμε να είμαστε πιο ακριβείς όμως, το τετράχορδο είναι 4-5-6.

Πράγματι από τον πίνακα:

όνομα	νότας	συχνότητα	μονόχορδο		αρχαία ονομασία	βυζαντινή
C	do	256	8η	1	υπάτη (η επάνω)	κε$^{\text{κάτω}}$
D	re	288	7η	8/9		ζω$^{\text{κάτω}}$
E	mi	324	6η	4/5		νη$^{\text{κάτω}}$
F	fa	341,3	5η	3/4	παραμέση	πα
G	sol	384	4η	2/3	μέση	βου
A	la[18]	432	3η	3/5		γα
B	si	486	2η	8/15	παρανήτη	δι
C	do	512	1η	1/2	νεάτη/νήτη (η κάτω)	κε

έχουμε για τη sol: 384/512 = 3/4 και για την fa: 341,3/512 = 2/3.



Η 8 νότες της μουσικής κλίμακας από το κάτω do ως το πάνω do

Οι τρόποι της αρχαιοελληνικής μουσικής

Αν το όργανο έχει 4 χορδές (*τετράχορδο*) τότε έχουμε 4 νότες (μία από κάθε χορδή) που αποτελούνται από 3 ενδιάμεσα διαστήματα: 1 ημιτόνιο και 2 τόνους.

Αν το ημιτόνιο είναι το 1ο διάστημα, δηλ. ημιτόνιο - τόνος - τόνος, το τετράχορδο λέγεται *Δώριο*. Αν το ημιτόνιο είναι το 2ο διάστημα, δηλ. τόνος - ημιτόνιο - τόνος, το τετράχορδο λέγεται *Φρύγιο*. Αν το ημιτόνιο είναι το 3ο διάστημα, δηλ. τόνος - τόνος - ημιτόνιο, το τετράχορδο λέγεται *Λύδιο*.

Το σχήμα δείχνει ποιες νότες περιελάμβανε κάθε τετράχορδο.

[18] το λα είναι ο απλός ήχος που παράγει το όργανο διαπασών και έχει συχνότητα 440 Hz.. Είναι η τελευταία νότα του υποδώριου τρόπου ή καλύτερα, επειδή οι αρχαίοι διάβαζαν τις νότες από την υψηλότερη προς τη βαρύτερη, η πρώτη νότα του και σε αυτό βασίστηκε το μουσικό τους οικοδόμημα. Είναι το Κε των βυζαντινών, το ίσο των ψαλτών.

Σε αυτές τις 4 νότες *προσθέτουμε*[19] και άλλο ένα τετράχορδο (άλλες 4 νότες) <u>οξύτερο</u>, έτσι συμπληρώνεται η οκτάβα Αυτό καλείται *τρόπος*.

Έχουμε λοιπόν το Δώριο, το Φρύγιο και το Λύδιο μέλος. Αν στο Δώριο τετράχορδο *συνάψω*[20] και ένα άλλο τετράχορδο βαρύτερο (χαμηλότερο), παίρνω το *Μικτολύδιο* τρόπο.

Αν στα αρχικά τετράχορδα συνάψω και ένα άλλο τετράχορδο <u>βαρύτερο</u>, έχουμε τον *Υποδώριο*, τον *Υποφρύγιο*, τον *Υπολύδιο* και τον *Υπομικτολύδιο* τρόπο.

Επειδή ο υπομικτολύδιος δημιουργήθηκε έτσι από το δώριο τετράχορδο, δηλ. με την προσθήκη ενός βαρυτέρου τετραχόρδου, αν του προσθέσω ακόμη ένα βαρύτερα, θα είμαι μια οκτάβα πιο χαμηλά από τον αρχικό δώριο τετράχορδο.

Οι ήχοι της βυζαντινής μουσικής

Είναι ακριβώς οι 8 τρόποι της αρχαίας Ελληνικής μουσικής. Τον 4ο αι. ο Αμβρόσιος επίσκοπος Μεδιολάνου και ο Γρηγόριος Α' πάπας Ρώμης τους ονόμασαν Ήχο Α', Ήχο Β', Ήχο Γ', Ήχο Δ' και Ήχο πλάγιο του Α', Ήχο πλάγιο του Β', Ήχο βαρύ, Ήχο πλάγιο του Δ'. Ο Α' Ήχος και ο πλάγιός

---

[19] δηλ. η ένωση γίνεται με την προσθήκη, μεταξύ των δύο τετραχόρδων, ενός τόνου

[20] δηλ. έτσι ώστε η τελευταία χορδή του ενός τεραχόδου να είναι η πρώτη του άλλου. Για να συμπληρωθεί η οκτάβα, προσθέτω ένα τόνο βαρύτερα (αν το τετράχορδο που

του ανήκουν στο *διατονικό* γένος, ο Β' Ήχος και ο πλάγιός του στο *χρωματικό*, ο Γ' Ήχος και ο πλάγιός του στο *εναρμόνιο* και ο Δ' Ήχος με τον πλάγιό του στο πρώτο γένος.[21]

Τις χορδές (νότες) τις ονόμασαν α, β, γ, δ, ε, ζ, η και για να προφέρονται ευκολότερα, έβαλαν ένα σύμφωνο σε κάθε φωνήεν και αντίστροφα, έτσι έλεγαν πα, βου, γα, δι, κε, ζω, νη. Τους έγραφαν σύντομα ως π, β, γ, δ, κ, ζ, ν.

Τη μουσική των βυζαντινών παρέλαβαν οι άραβες. Το χαλιφάτο των Ομμεϋαδών είχε πρωτεύουσα τη Δαμασκό, μια πρώην βυζαντινή μεγαλούπολη, όπου ήκμασε ο Ιωάννης ο συγγραφέας της Οκτωήχου. Τους 8 ήχους τους επεξέτειναν σε 72 μακάμια. Διαδόθηκαν σε όλο το μουσουλμανικό κόσμο και είναι η μουσική του παράδοση ως σήμερα.

Οι κλίμακες της ευρωπαϊκής μουσικής

Υπάρχει η εξής αντιστοιχία:

do	re	mi b	fa	sol	la	si b	do$^{\text{άνω}}$
νη$^{\text{κάτω}}$	Πα	Βου	Γα	Δι	Κε	Ζω	Νη

όπου με b εννοούμε ότι η νότα είναι μειωμένη κατά το 1/6 του τόνου. Υπάρχει δηλ. διαφορά στα ανάμεσα από τις νότες διαστήματα:

δώριος τρόπος	12	10	8	12	12	10	8
μείζων κλιμαξ	12	12	6	12	12	12	6.

Επειδή μετά το mi και το si ακολουθεί ημιτόνιο δεν βάζουμε δίεση #, δηλ. τα λευκά πλήκτρα mi και si του πιάνου δεν ακολουθούνται από μαύρο πλήκτρο.

Υπάρχει η μείζων κλίμαξ με διαστήματα

2 2 1 2 2 2 1

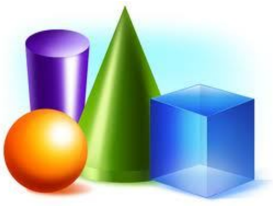
όπου 2 (ή 12 πριν) είναι η διάρκεια του τόνου και 1 (ή 6 πρν) είναι η διάρκεια του ημιτονίου
και η ελάσσων κλίμαξ

2 1 2 2 1 3 1

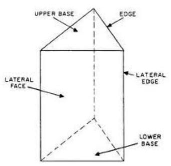
Την κλίμακα οι Πόντιοι τη λένε *σκοπό*, η λαϊκή ελληνική μουσική *δρόμο*, οι άραβες μακάμια.

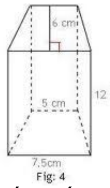
[21] διότι ο μικτολύδιος προέρχεται από το δώριο και ο υπομικτολύδιος είναι ο δώριος κατά μία οκτάβα βαρύτερος

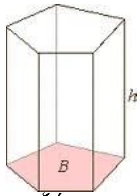
19. Όγκοι στερεών: $V_{κώνου}+V_{σφαίρας} = V_{κυλίνδρου}$

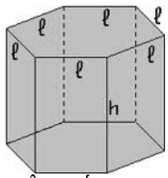



Ο γενικός τύπος του όγκου (volume) ενός <u>πρίσματος</u> (ορθού ή πλαγίου) με εμβαδό βάσης Β και ύψος υ είναι:
$V_{πρίσματος} = Bυ$
Πχ στον *κύβο* είναι $V_{κύβου} = α^3$, όπου α η ακμή του.

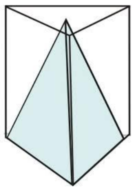
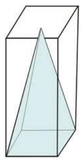




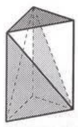
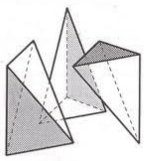




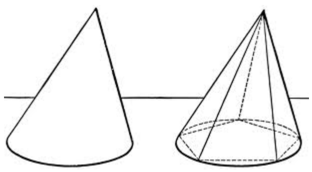
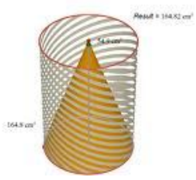
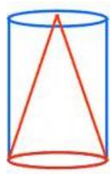
Η βάση του πρίσματος είναι πολύγωνο, όσο όμως αυξάνουν οι πλευρές του τόσο πλησιάζει στον κύκλο. Στο άπειρο γίνεται κύκλος. Έτσι ο όγκος του <u>κυλίνδρου</u> θα είναι
$V_{κυλίνδρου} = Bυ = πρ^2$.

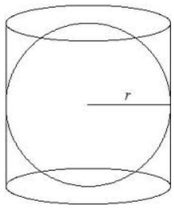
Ποιος να είναι ο όγκος της <u>πυραμίδας</u>; Ο Αρχιμήδης (200 πΚΕ) με την ιδιοφυή *μέθοδό του της εξάντλησης*, που είναι η βάση του λογισμού των απειροστών (infinitesimal calculus) και θα συνεχίσουν το 1700 οι I. Newton & G. Leibniz, απέδειξε ότι
$V_{πυραμίδας} = 1/3\ Bυ$
δηλ. το 1/3 του όγκου ενός πρίσματος μέσα στον οποίο μπορεί να περικλειστεί.

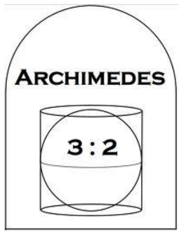



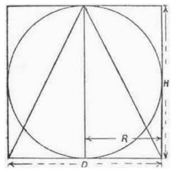
Η βάση της πυραμίδας είναι πολύγωνο, όσο όμως αυξάνουν οι πλευρές του τόσο πλησιάζει στον κύκλο. Στο άπειρο γίνεται κύκλος. Έτσι ο όγκος του <u>κώνου</u> θα είναι
$V_{κώνου} = 1/3\ Bυ = 1/3\ πρ^2υ$.
δηλ. το 1/3 του όγκου ενός κυλίνδρου μέσα στον οποίο περικλείεται.

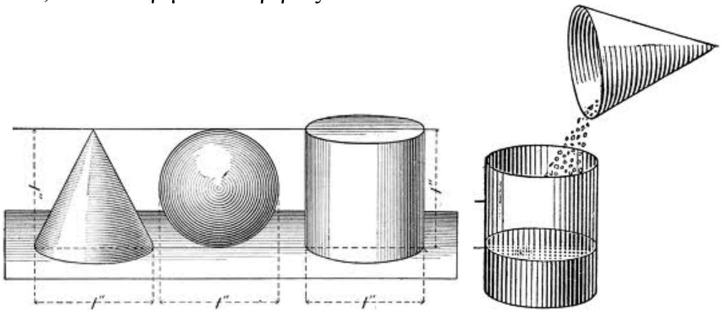
Το δύσκολο για τους αρχαίους ήταν ο όγκος της σφαίρας. Η μέθοδος του Αρχιμήδους έδωσε
$V_{σφαίρας} = 4/3\ πρ^3$
δηλ. τα 2/3 του όγκου ενός κυλίνδρου μέσα στον οποίο περικλείεται, διότι το ύψος του κυλίνδρου θα είναι 2ρ και ο όγκος του $2πρ^3$.



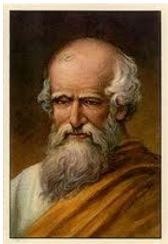


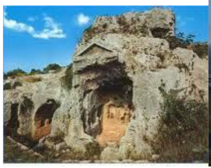


Έχουμε λοιπόν $V_{κυλίνδρου} = Bυ = 1/3Bυ+2/3Bυ = V_{κώνου}+V_{σφαίρας}$.
Δηλ. αν έχουμε τρία δοχεία, ένα κυλινδρικό, ένα κωνικό (με το ίδιο ύψος) και ένα σφαιρικό (με διάμετρο ίση με το ύψος τους) και γεμίσουμε με νερό (ή άμμο) το 2ο και το 3ο και ρίξουμε το περιεχόμενό τους στο 1ο, αυτό θα γεμίσει ακριβώς.



Αυτό γέμισε με πολλή χαρά τον Αρχιμήδη, που έπειτα από περίπλοκους υπολογισμούς κατέληξε σε κάτι απλό. Το σχήμα του κυλίνδρου που περιέχει κώνο και σφαίρα, ζήτησε να το χαράξουν στον τάφο του. Το 75 πΚΕ ο ρήτορας Μ.Τ. Cicero ήταν quiestor στις Συρακούσες. Αναζήτησε τον τάφο του και τον ανακάλυψε στην Ακραγαντίνη πύλη. Αυτό ήταν ένα προσφιλές θέμα στους μπαρόκ ζωγράφους. Το 1965 σκάβοντας για τα θεμέλια ενός ξενοδοχείου στις Συρακούσες, ένας εκσκαφέας απεκάλυψε έναν μαρμάρινο τάφο με το σχήμα του κυλίνδρου που περιέχει κώνο και σφαίρα σκαλισμένο: ήταν του Αρχιμήδη.



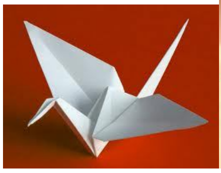
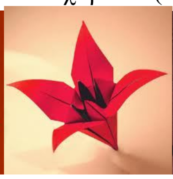




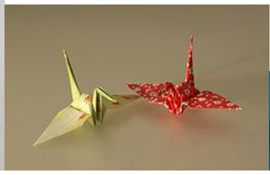
20. Origami - Tangram

Ori-gami

Στα ιαπωνικά θα πεί διπλώνοντας το χαρτί Ξεκίνησε στην Ιαπωνία από το 17ο αι. Αρχίζουμε με ένα τετράγωνο κομμάτι χαρτί και το διπλώνουμε να πάρει ένα συγκεκριμένο σχήμα, πχ ένα πουλί, μια βάρκα, μια πεταλούδα, κά. Εκτός από διασκέδαση έχει εφαρμογές στην τέχνη, στα μαθηματικά, στην ιατρική, κα. Δεν επιτρέπεται το κόψιμο του χαρτιού (επιτρέπεται στο kiri-gami).


Η πιο γνωστή κατασκευή είναι το πουλί γερανός (crane), ένα από τα ιερά ζώα της Ιαπωνίας: μια παλιά παροιμία τους λέει ότι σε όποιον κάνει 1000 γερανούς (senba zuru) με origami, θα πραγματοποιηθεί μια ευχή του. Έτσι φτιάχνουν γερανούς περασμένους σε κλωστή και τους αφήνουν έξω από τους ναούς: όσο φθείρονται με τον καιρό, τόσο πραγματοποιείται η ευχή.

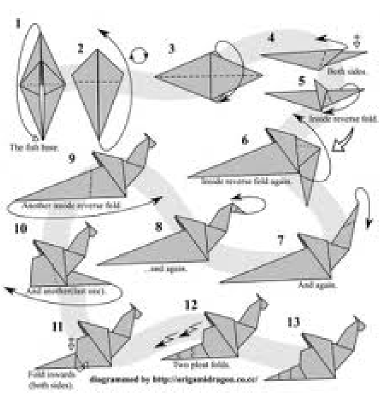



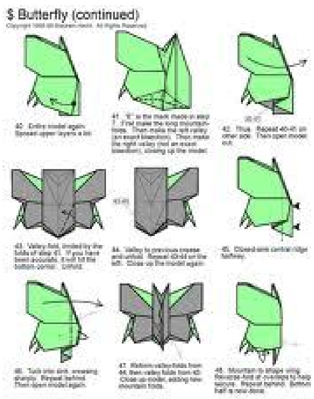

Μετά την πτώση της ατομικής βόμβας στη Χιροσίμα μια μαθήτρια, η Sadako Sasaki που έπαθε λευχαιμία, έφτιαχνε γερανούς με την ευχή να γίνει καλά, αλλά δεν πρόλαβε να κάνει 1000 όταν πέθανε.

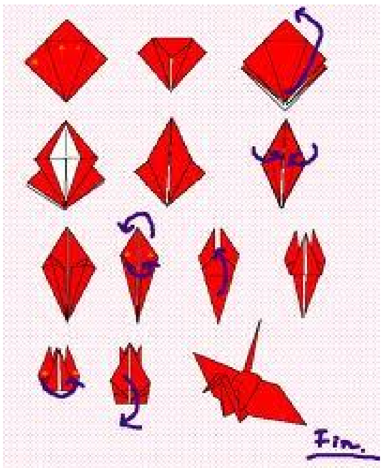
Η αρχή αυτής της τεχνικής βρίσκεται στο έθιμο που έχουν οι Ιάπωνες να καίνε στην ταφή χάρτινα ομοιόματα του νομίσματός τους, που εκείνη την εποχή είχε τη μορφή βάρκας. Ίσως με την οδό του μεταξιού να διαδόθηκε η κατασκευή της βάρκας στην Ευρώπη.

Οι πεταλούδες origami χρησιμοποιούνται στη σιντοϊστική τελετή του γάμου. Στην αποχή μας ασχολήθηκαν πολύ και μάλιστα με τη σχέση των origami με τα μαθηματικά. Αυτό δημιούργησε πιο σύνθετα σχήματα.

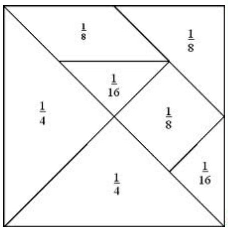
Παρακάτω φαίνεται η κατασκευή του γερανού, της πετλούδας, κά. Δείτε αναλυτικότερα στο ww.youtube.com.

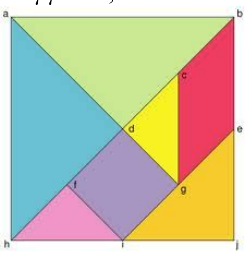






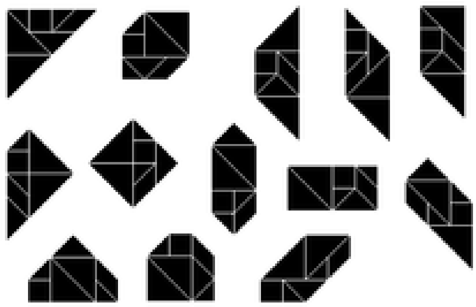
Tangram σημαίνει στα κινεζικά *επιδεξιότητα με επτά κομμάτια*, τα tan.



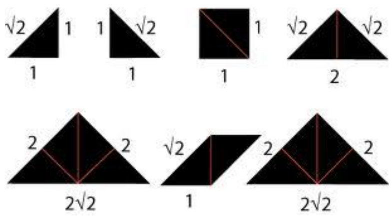
Αποτελείται από 2 μικρά τρίγωνα, 1 μεσαίο, 2 μεγάλα, ένα τετράγωνο και ένα (πλάγιο) παραλληλόγραμμο. Μας δίνεται το περίγραμμα ενόας σχήματος και εμείς προσπαθούμε να τα φτιάξουμε. Από την Κίνα ήρθε στην Ευρώπη με τα εμπορικά πλοία στις αρχές του 19ου αι. και διαδόθηκε ιδίως στις αρχές του 20ου.

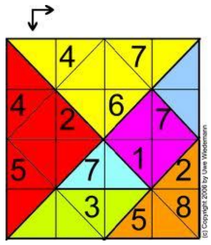
Εκδίδονται βιβλία με σχήματα, νέα κάθε φορά. Μέχρι τώρα έχουν προταθεί 6500 σχήματα. Οι Fu Traing Wang και Chuan Chin Hsiung απέδειξαν ότι μόνο 13 κυρτά σχήματα μπορούν να φτιαχθούν, τα εξής.



Τα τρίγωνα είναι ορθογώνια και ισοσκελή. Αν α=√2/2 και β = 1/2, τότε[22]

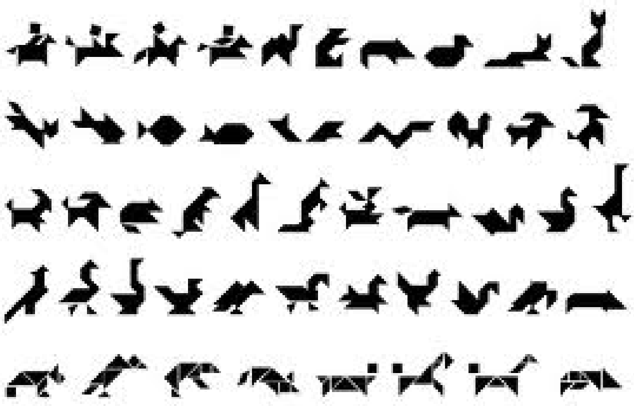
	κομμάτια	εμβαδό
τα μεγάλα τρίγωνα έχουν πλευρές 1, α, α	2	1/4
το μεσαίο α, β, β	1	1/8
τα μικρά τρίγωνα έχουν πλευρές β, αβ, αβ	2	1/16
το τετράγωνο είναι πλευράς αβ	1	1/8
το παραλληλόγραμμο έχει πλευρές β, αβ.	1	1/8

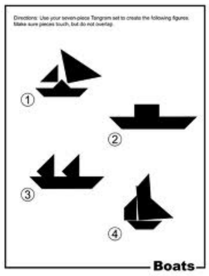




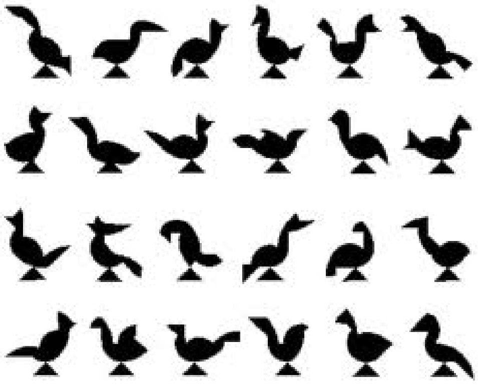
Όλα έχουν αξονική και κεντρική συμμετρία, εκτός από το παραλληλόγραμμο που έχει μόνο κεντρική. Αφού δεν έχει αξονική (ανακλαστική) συμμετρία, μπορεί να μπει με δύο τρόπους: ο άλλος τρόπος είναι να το γυρίσω ανάποδα.

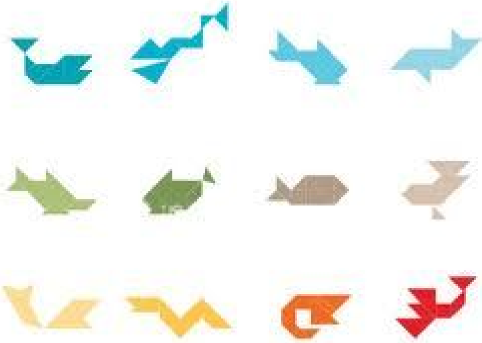
Άλυτα tangram:



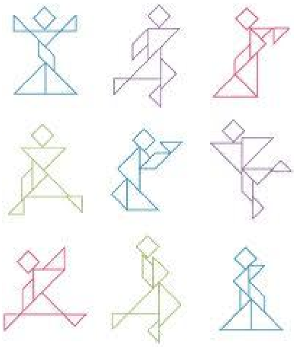


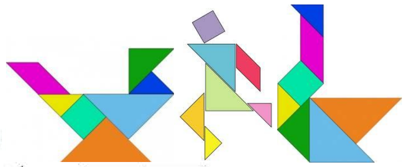
[22] 1:α = α:β = β:αβ, δηλ. για τις βάσεις 1, α, β των ορθογωνίων ισχύει ότι η α είναι η μέση ανάλογος

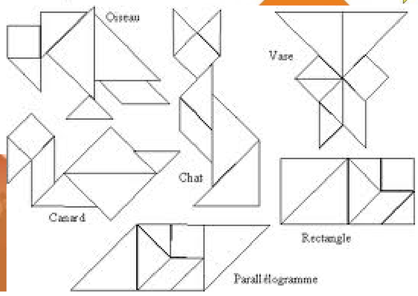




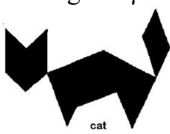
Λυμένα tangram:







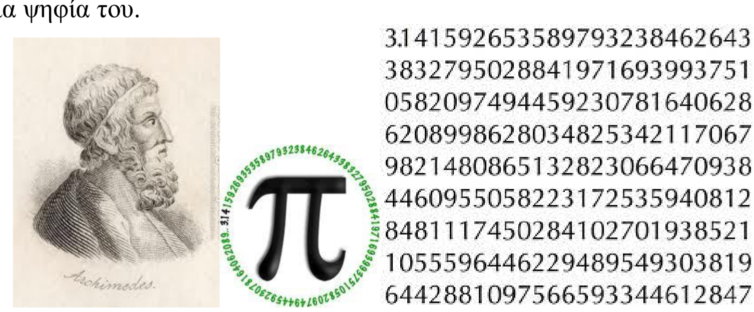
το tangram γάτα με τη λύση του



21. π = 3,14… (το πηλίκο της περιφέρειας του κύκλου με τη διάμετρο)

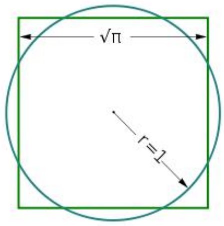
Το πηλίκο του μήκους του κύκλου C προς τη διάμετρό του δ είναι σταθερό και το συμβολίζουμε με **π**, το πρώτο γράμμα της λέξης περιφέρεια (έτσι έλεγαν οι αρχαίοι το μήκος του κύκλου).

Δεν είναι κλάσμα (ρητός) αλλά άρρητος, δηλ. είναι δεκαδικός με άπειρα (μη επαναλαμβανόμενα) δεκαδικά ψηφία. Αυτό ήταν μια δυσκολία για τους Αιγύπτιους, Βαβυλώνιους και Ινδούς μαθηματικούς στις πράξεις τους: έπαιρναν αντί για το π κλάσματα με ακρίβεια μόλις 1 δεκαδικού ψηφίου. Οι Έλληνες ανέπτυξαν πληθώρα κλασμάτων. Επειδή έκαναν πράξεις με κλάσματα, έπαιρναν μια προσέγγιση του π όπως το 22/7. Τις πιο ακριβείς προσεγγίσεις έκανε ο Αρχιμήδης: έδωσε έναν τρόπο δημιουργίας κλασμάτων που προσεγγίζουν ολοένα και περισσότερο το π, γι' αυτό και το π λέγεται και *σταθερά του Αρχιμήδη*. Εμείς που χρησιμοποιούμε δεκαδικούς, παίρνουμε το 3,14. Το 1600 ο L. Ceulen υπολόγισε τα πρώτα 35 δεκαδικά ψηφία. Ως το 2011 έχουν υπολογιστεί τα πρώτα 10 τρισεκατομμύρια ψηφία του.



Από το 1706 άρχισε να χρησιμοποιείται ο συμβολισμός π, κυρίως με τη χρήση του από τον L .Euler. Το 1761 ο J.H. Lambert απέδειξε ότι είναι άρρητος (irrational), ο Ch. Hermite αργότερα έδωσε μια πιο απλή απόδειξη και η M. Cartwright μια απλούστερη. Ακόμη ο Niven και ο Lacszkovich.

Ένας αριθμός που μπορεί να είναι λύση πολυωνύμου (με ρητούς συντελεστές) λέγεται *αλγεβρικός (algebraic)*, πχ το √2.[23] Το 1882 ο F. Lindemann απέδειξε ότι δεν είναι αλγεβρικός: τέτοιους αριθμούς τους λέμε *υπερβατικούς (transcendental)*, πχ το e. O E. Galois έδειξε ότι οι υπερβατικοί αριθμοί δεν είναι κατασκευάσιμοι *γεωμετρικά*, με κανόνα και διαβήτη, έτσι δεν μπορούμε να τετραγωνίσουμε τον κύκλο (αυτό ήταν ένα από τα άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας). Παρατηρείστε ότι ένα γεωμετρικό πρόβλημα λύθηκε με άλγεβρα.



Τα πρώτα 10 δεκαδικά είναι αρκετά για τους υπολογισμούς σε κύκλους μικρότερους της γης. Για αστρονομικούς υπολογισμούς τα πρώτα 40 είναι αρκετά. Ο Αρχιμήδης πήρε την περίμετρο Π του εγγεγραμμένου πολυγώνου σε κύκλο, οπότε Π/δ είναι μια προσέγγιση. Όταν οι πλευρές το υπολυγώνου αυξάνονται, αυξάνεται και η ακρίβεια της προσέγγισης. Πήρε και το πολύγωνο το περιγεγραμμένο στον κύκλο, πχ για ν=96 βρήκε τις τιμές 223/71 < π < 220/70 (ακρίβεια 3 δ. ψ.).

Ο Κλ. Πτολεμαίος στη *Μεγίστη Μ. Σ.* παίρνει το κλάσμα 377/120 (ακρίβεια 3-4 δ.ψ.).

Οι κινέζοι τον 3ο αι. βρήκαν ακρίβεια 4 δ.ψ. με το 96γωνο, ενώ τον 5ο αι. βρήκαν 7 δ.ψ. με το 12288γωνο. Το 15ο αι. ένας Ινδός έδωσε ακρίβεια 11 και λίγο αργότερα ένας Πέρσης 16 δ.ψ.

Άλλες προσεγγίσεις είναι με τα συνεχή κλάσματα

$\pi = 4 / (1 + 1^2/(2+3^2/(2+5^2/(2+7^2/(2+9^2/(2+\ldots$

$\pi = 3 + 1^2/(6+3^2/(6+5^2/(6+7^2/(6+9^2/(6+\ldots$

$\pi = 4 / (1+1^2/(3+2^2/(5+3^2/(7+4^2/(9+\ldots$

Το πρώτο δίνει:

3	22/7	333/106	355/113	52163/16604	103993/33102	
0	2	6	7	7	10	

Στην κάτω γραμμή είναι το πλήθος των δ.ψ. που είναι αληθινά (η ακρίβεια).

[23] σχεδόν όλοι οι πραγματικοί είναι αλγεβρικοί. Με πιο αυστηρή διατύπωση: οι αλγεβρικοί είναι αριθμήσιμοι.

Οι J. Gregory & G. Leibniz έδωσαν τον ωραίο τύπο
$\pi = 4/1 - 4/3 + 4/5 - 4/7 + 4/9 + \ldots$
αλλά έχει πολλές πράξεις και αργεί να δώσει ακρίβεια.

Ο J. Wallis έδωσε τον τύπο
$\pi = 2/1 \cdot 2/1 \cdot 2/3 \cdot 4/3 \cdot 4/5 \cdot 6/5 \cdot 6/7 \cdot 8/7 \cdots$

Η έκπληξη είναι στη συνάρτηση ζ του Riemann:
$\pi^2/6 = 1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \ldots$

Ο J. Neumann με τον ENIAC (έναν από τους πρώτους υπολογιστές) μετά από 70 ώρες υπολογισμών βρήκε 2000 δ.ψ.

Στην εποχή μας ο εμπνευσμένος Ινδός S. Ramanujan έδωσε μια προσέγγιση του π, το $\sqrt[4]{(2143/22)}$, με ακρίβεια 10 ψηφίων.

Το π υπάρχει στην περίφημη ταυτότητα του Euler: $e^{i\pi} = -1$.

Στη Φυσική εμφανίζεται στον 3ο νόμο του Kepler, στο νόμο του Coulomb, στη Γενική Σχετικότητα του Einstein.

Όλο και πιο πολλοί άνθρωποι με ειδικά, σπάνια χαρίσματα απομνημονεύουν ψηφία του π. Πχ ο 24χρονος Lu Chao έγραψε σε 24 ώρες τα πρώτα 67.890 ψηφία του π. Το 2006 ο Akira Haraguchi έγραψε 100.000 ψηφία.

Ένας μνημονικός τρόπος δόθηκε από τον Πλάτωνα: στη φράση
αεί ο θεός ο μέγας γεωμετρεί
κάθε λέξη έχει
3 1 4 1 5 9 ψηφία.

Αυτό επεκτάθηκε με τη φράση του καθηγητή Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο Αθηνών Ν. Χατζηδάκη:
αεί ο θεός ο μέγας γεωμετρεί, το κύκλου μήκος ίνα ορίση διαμέτρω παρήγαγεν αριθμόν απέραντον, καί όν φεύ, ουδέποτε όλον θνητοί θα εύρωσι
κάθε λέξη έχει
3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 8 9 7 9 3 2 3 8 4 6 2 6

Στα ιταλικά υπάρχει η φράση
Che n' ebbe d' utile Archimede da ustori vetri sua somma scoperta? που δίνει
3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 8

Στα αγγλικά η εξής
how I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics
3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 8 9 7 9 ψηφία.

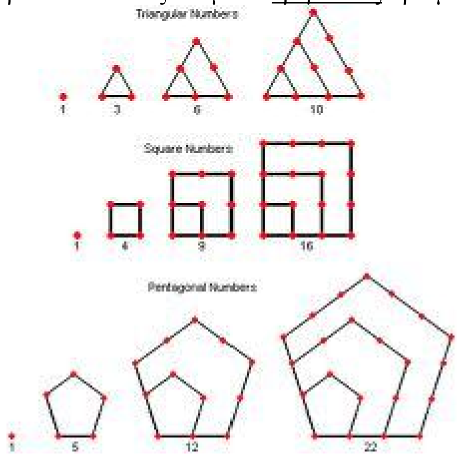
Στα γαλλικά υπάρχει η φράση
Que j'aime à faire apprendre ce nombre utile aux sages!
Immortel Archimède antique, ingénieur,
Qui de ton jugement peut sonder la valeur?
Pour moi ton problème eut de pareils avantages
δίνει
3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 - 8 9 7 9 -
3 2 3 8 4 6 2 6 - 4 3 3 8 3 2 7 9

Τέλος, στις 14 Μαρτίου 'εορτάζεται' η ημέρα του π σε σχολεία της Αμερικής, στην οποία η ημερομηνία γράφεται με τον μήνα πρώτα, πχ 3/14/2012. Το π στα αγγλικά προφέρεται pi και η ημέρα αυτή λέγεται pi day.[24]

[24] λογοπαίγνιο: pi - pie

22. Πολύγωνοι αριθμοί: τρίγωνοι, τετράγωνοι, …

Ο Πυθαγόρας τοποθέτησε βότσαλα ώστε να σχηματίζουν τρίγωνο. Μπορούσε να βάλει
1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, …
βότσαλα. Τους ονόμασε τρίγωνους αριθμούς.



Επίσης μπορούσε να σχηματίσει τετράγωνο με τους αριθμούς
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, …
που τους ονίμασε τετράγωνους.

Έτσι εποπτικά μπόρεσε να δει αμέσως πράγματα που αλγεβρικά θέλουν αυστηρή απόδειξη.

Για τους 3γωνους είδε ότι 10+15 = 25 που είναι 4γωνος, δηλ. το άθροισμα δύο διαδοχικών 3γωνικών αριθμών, έδινε 4γωνο αριθμό.

Πρώτα βάζω 1 βότσαλο, για να σχηματιστεί ο επόμενος προσθέτω 2, για να σχηματιστεί ο επόμενος προσθέτω 3, 4, 5, … Δηλ. ο 5ος 3γωνος είναι 1+2+3+4+5 = το άθροισμα των 5 πρώτων φυσικών αριθμών.

Αν πάρω δύο φορές έναν τριγωνικό αριθμό, πχ τον 4ο, τα βότσαλα σχηματίζουν παραλληλόγραμμο 4 Χ 5 με 20 βότσαλα. Δηλ. αν T_4 ο 4ος 3γωνος αριθμός, έχω $2\cdot T_4 = 4\cdot 5$, όπου ο T_4 είναι το άθροισμα των 4 πρώτων φυσικών:
$2(1+2+3+4) = 4\cdot 5$
και γενικότερα
$2(1+2+3+\ldots+\nu) = \nu(\nu+1)$
ή
$1+2+3+..+\nu = \frac{1}{2}\nu(\nu+1)$.

Για τους 4γωνους είδε ότι πρώτα βάζω 1 βότσαλο, για να σχηματιστεί ο επόμενος προσθέτω 3, για να σχηματιστεί ο επόμενος προσθέτω 5, 7, 9, … Δηλ. ο 5ος 4γωνος είναι 1+3+5+7+9 = το άθροισμα των 5 πρώτων περιττών αριθμών.

Μπορούμε να γενικεύσουμε και για 5γωνους, 6γωνους, … αριθμούς. Φτιάχνω τον πίνακα:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
1	5	12	22	35	51	70	92	117	145
1	6	15	28	45	66	91	120	153	190

κοκ