ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο $[\alpha, \beta]$ με $g(\alpha) = g(\beta)$ και $f(a) = f(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε :

$$g'(\xi) = g(\xi) \cdot f'(\xi).$$

2. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(a) = f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε:

$$3f'(\xi_1) + 2f'(\xi_2) = 0.$$

3. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(a) = f(\beta) = 0$. Αν υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\gamma) > 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) < 0$.

4. Δίνονται οι πολυωνυμικές συναρτήσεις f, g, h για τις οποίες ισχύει $g(x) = h(x)f'(x) - h'(x)f(x)$. Αν $h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$, να αποδείξετε ότι μεταξύ δύο πραγματικών ριζών ρ_1, ρ_2 της $f(x)$ περιέχεται μία τουλάχιστον ρίζα της $g(x)$.

5. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f(a) = f(\beta) = 0$.

α) Να δείξετε ότι για την συνάρτηση g, με τύπο $g(x) = \dfrac{f(x)}{x - x_0}$ όπου $x \notin [\alpha, \beta]$ υπάρχει αριθμός $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του διαγράμματος της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από το σημείο $\mathrm{N}(x_0, 0)$.

6. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[-\alpha, \alpha]$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-\alpha, \alpha)$ με $f(0) = \dfrac{f(a) + f(-a)}{2}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (-\alpha, \alpha)$, τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \beta x + \gamma - 2, & -2 \leq x < 0 \\ \alpha x^2 + 3x + 3, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$

Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in R$ ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[-2, 2]$

8. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[0,1]$ με $f(0)=-\frac{1}{e}$ και η $F(x)=f(x)+e^{-x},\ x\in[0,1]$ για την οποία ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$ με $f(x_0)=0$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ με $f'(\xi)=\frac{1}{e^{\xi}}$.

9. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ με $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[1,2]$. Αν ισχύει $f(2)=2f(1)$ να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(1,2)$ ώστε να ισχύει $f'(x_0)=\frac{f(x_0)}{x_0}$.

10. Να δείξετε ότι υπάρχει σημείο της C_f της συνάρτησης $f(x)=(x-5)\ln(x-2)$ με τετμημένη $\xi\in(3,5)$ στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα x'x.

11. Έστω f παραγωγίσιμη στο $[-3,5]$ με $f(-3)=f(5)$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in(-3,1)$ και ένα τουλάχιστον $\xi_2\in(1,5)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$.

12. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-3,2]$. Αν για κάθε $x\in(-3,2)$ ισχύει $-1\leq f'(x)\leq 5$ και $f(-3)=5$, να δείξετε ότι $0\leq f(2)\leq 30$.

13. Αν $\alpha<\beta$ να δείξετε ότι $(\beta-\alpha)e^{\alpha}<e^{\beta}-e^{\alpha}<(\beta-\alpha)e^{\beta}$.

14. Για την συνάρτηση f που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[2002,2006]$ ισχύει $2f(2004)=f(2002)+f(2006)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(2002,2006)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

15. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=e$ και $f(\beta)=-e$.

α) Να αποδείξετε ότι η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α,β).

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε:

$$\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}=-\frac{\beta-\alpha}{e}.$$