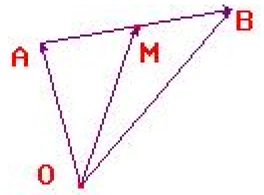
ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Β΄ ΤΑΞΗΣ Γ.Ε.Λ. ΕΡΕΤΡΙΑΣ
19/5/2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΗΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. i) Να αποδείξετε ότι για τη διανυσματική ακτίνα του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ ισχύει: $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$ **Μονάδες 11**



Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i) Η εξίσωση $x^2 + y^2 + \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο αν ισχύει $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + 4\Gamma = 0$ **Μονάδες 2**

ii) Η ευθεία ε: Αx + Βy + Γ = 0 είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (\mathrm{B}, \mathrm{A})$ **Μονάδες 2**

iii) Αν $\lambda \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{w}$ και λ πραγματικός αριθμός με $\lambda \neq 0$, τότε ισχύει $\vec{v} = \vec{w}$. **Μονάδες 2**

iv) Σε κάθε έλλειψη, για την εκκεντρότητα $\varepsilon = \dfrac{\gamma}{\alpha}$, ισχύει ε > 1. **Μονάδες 2**

v) Η εξίσωση $(\alpha^2 - 4)x + (a+2)y - \alpha^2 + 3 = 0$ παριστάνει ευθεία για κάθε $\alpha \in \Re$. **Μονάδες 2**

vi) Η εξίσωση $x^2 - y^2 + 6y - 9 = 0$ παριστάνει δυο ευθείες κάθετες μεταξύ τους. **Μονάδες 2**

vii) Αν η εξίσωση $y^2 = 2px$ διέρχεται από το σημείο Α (2, 4), τότε η εστία της παραβολής είναι Ε (2, 0). **Μονάδες 2**

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα σημεία Α(5, 3), Β(-1, 5), Γ(4, 0).

Β1. Να αποδείξετε ότι τα παραπάνω σημεία δεν είναι συνευθειακά. **Μονάδες 8**

Β2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ. **Μονάδες 8**

Β3. Να υπολογίσετε:

i) την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ΒΓ και
ii) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. **Μονάδες 5+4**

ΘΕΜΑ Γ

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -1)$, $\vec{\beta} = (-3, 0)$ και $\vec{v} = \kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, όπου κ πραγματικός αριθμός.

Γ1. Να βρεθεί η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. **Μονάδες 9**

Γ2. Να βρεθεί ο αριθμός κ, ώστε $\vec{v} \perp \vec{\beta}$. **Μονάδες 8**

Γ3. Αν κ = 3, να βρεθεί

i) το μέτρο του διανύσματος $\vec{v}$

ii) η προβολή του διανύσματος $\vec{v}$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$ $(\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v})$

Μονάδες 4+4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η υπερβολή $C_1 : x^2 - 4y^2 = 16$ και η γραμμή C_2: $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$

Δ1. Να βρείτε τις εστίες της υπερβολής και να αποδείξετε ότι οι ασύμπτωτες της υπερβολής C_1 έχουν εξισώσεις ε_1: $y = \frac{1}{2}x$ και ε_2: $y = -\frac{1}{2}x$ αντίστοιχα. **Μονάδες 6**

Δ2. Να αποδείξετε ότι η γραμμή C_2 είναι κύκλος και

i) να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

ii) να αποδείξετε ότι εφάπτεται στον άξονα x΄x. **Μονάδες 2+2+2**

Δ3. Να εξετάσετε τη σχετική θέση του κύκλου C_2 και της ασύμπτωτης της υπερβολής που σχηματίζει οξεία γωνία με τον x΄x. **Μονάδες 6**

Δ4. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της υπερβολής που είναι παράλληλες στην ευθεία y = x + 2015. **Μονάδες 7**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ ΟΙ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ

Ο Δ Η Γ Ι Ε Σ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο **φύλλο απαντήσεων σας** να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο**.**
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμία άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με **το φύλλο απαντήσεων σας** και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο φύλλο απαντήσεων σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: δύο (2) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 1/2 ώρα μετά από την διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΘΕΤΙΚΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΛΥΚΕΙΑΚΩΝ ΤΑΞΕΩΝ ΣΤΥΡΩΝ

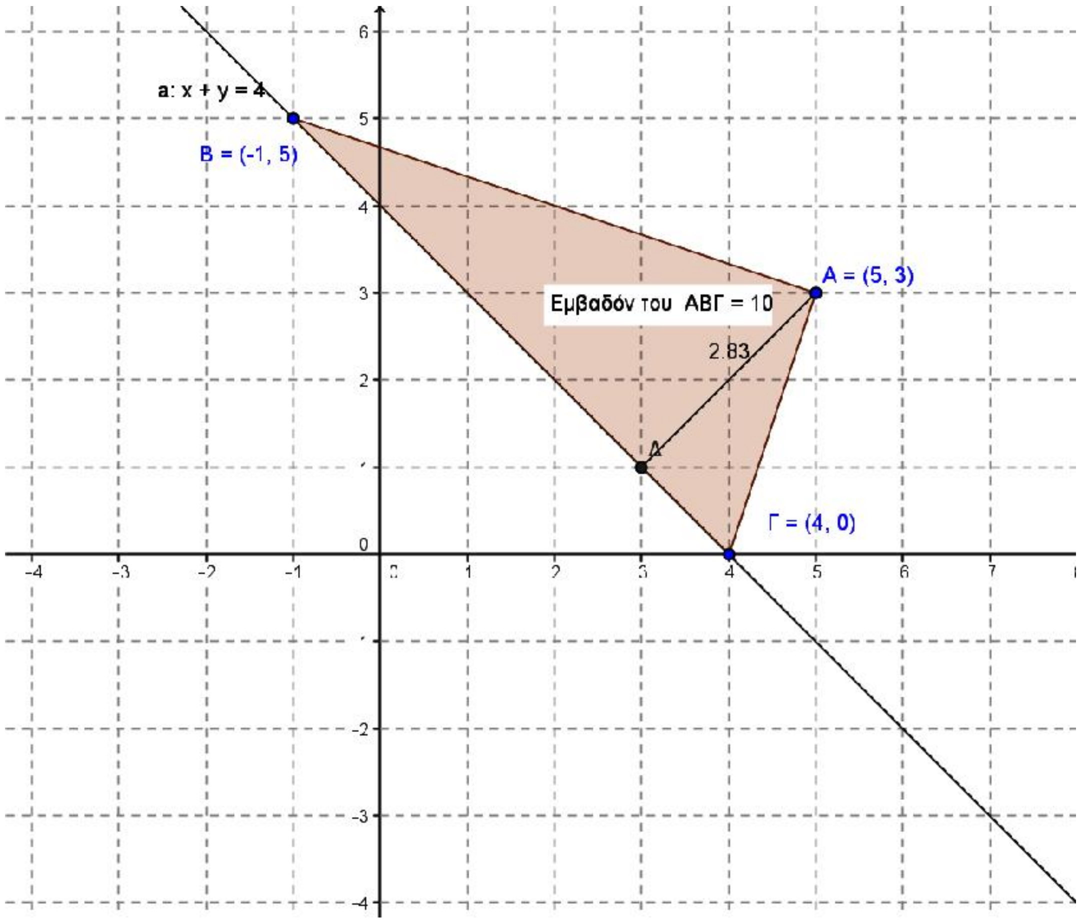
ΘΕΜΑ Α

Α1. i) θεωρία,

Α2.

i. Λάθος
ii. Λάθος
iii. Σωστό
iv. Λάθος
v. Λάθος
vi. Σωστό
vii. Σωστό

ΘΕΜΑ Β



Β1. $\lambda_{AB} = \dfrac{5-3}{-1-5} = -\dfrac{2}{6} = -\dfrac{1}{3}$, $\lambda_{A\Gamma} = \dfrac{0-3}{4-5} = 3$ άρα $\lambda_{AB} \neq \lambda_{A\Gamma}$, δηλαδή τα σημεία Α, Β, Γ δεν είναι συνευθειακά.

Β2. Η εξίσωση της ευθείας ΒΓ είναι:

$y - y_\Gamma = \lambda(x - x_\Gamma) \Leftrightarrow y - 0 = -1(x-4) \Leftrightarrow x + y - 4 = 0$, όπου $\lambda = \lambda_{B\Gamma} = \dfrac{0-5}{4+1} = -1$

Β3.

i)

$d(A, B\Gamma) = \dfrac{|5+3-4|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83\ldots$ μ. μήκους

ii)

$\vec{AB} = (-6, 2)$, $\vec{B\Gamma} = (5, -5)$ ....Εμβαδό$_{AB\Gamma}$ = 10 τετραγ. μονάδες

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\vec{\alpha} = (1, -1)$, $\vec{\beta} = (-3, 0)$,

$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = (1, -1)\cdot (-3, 0) = -3$

$|\vec{\alpha}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$|\vec{\beta}| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3$

συν($\vec{\alpha}, \vec{\beta}$) = $\dfrac{-3}{\sqrt{2}\cdot 3} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, άρα η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι 135^o

Γ2. $\vec{v} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{v}\cdot\vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow (\kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta})\cdot\vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \ldots\ldots \Leftrightarrow \kappa = 3.$

Γ3. i) $|\vec{v}|^2 = |3\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = (3\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = \ldots\ldots = 9$, άρα $|\vec{v}| = 3$

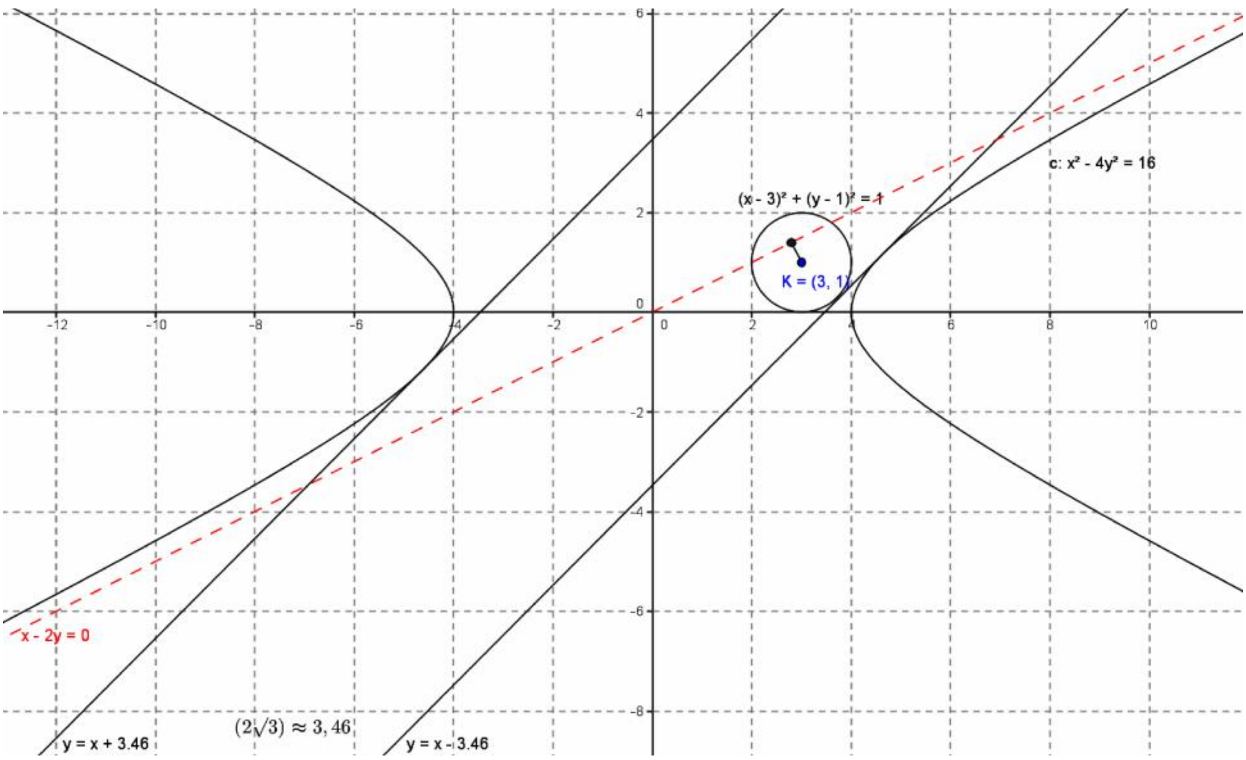
β΄τρόπος: $\vec{v} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta} = 3(1, -1) + (-3, 0) = (0, -3)$, άρα $|\vec{v}| = 3$

ii). Ισχύει $\text{προβ}_{\alpha}\vec{v} = \lambda\cdot\vec{\alpha}$ όπου $\lambda \in R$

και $\vec{\alpha}\cdot\vec{v} = \vec{\alpha}\cdot\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{v} = \vec{\alpha}\cdot\lambda\cdot\vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot(3\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \lambda\cdot|\vec{\alpha}|^2$

$\ldots\ldots \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{3}{2}$, άρα $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v} = \dfrac{3}{2}\vec{\alpha} = \left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$.

ΘΕΜΑ Δ



Δ1. $C_1 : x^2 - 4y^2 = 16$

$x^2 - 4y^2 = 16 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

Άρα $\alpha^2 = 16$, δηλαδή $\alpha = 4$ και $\beta^2 = 4$, δηλαδή $\beta = 2$.

Άρα $\gamma = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ και οι εστίες είναι Ε΄(-$2\sqrt{5}$, 0) και Ε($2\sqrt{5}$, 0) και οι ασύμπτωτες $y = \pm\frac{\beta}{\alpha}x \Leftrightarrow y = \pm\frac{1}{2}x$

Δ2. i). Έστω Κ το κέντρο του κύκλου C_2: $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$

Ο κύκλος C_2: $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$ γίνεται είτε με τη μέθοδο συμπλήρωσης, είτε με τους τύπους..... C_2: $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 1$, άρα έχει κέντρο Κ(3, 1) και ακτίνα ρ = 1

ii). Αφού $y_o = 1$ και ρ = 1, ισχύει $|y_o| = \rho$, άρα ο κύκλος εφάπτεται στον άξονα x΄x.

Δ3. Η ασύμπτωτη της υπερβολής που σχηματίζει οξεία γωνία ω με τον x΄x είναι η ε_1: $y = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow x - 2y = 0$

αφού εφω = λ > 0. Για να εξετάσουμε τη σχετική θέση του κύκλου C_2 και της ασύμπτωτης ε_1 : y = 1/2x, αρκεί να συγκρίνουμε την απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ασύμπτωτη με την ακτίνα του κύκλου.

$d(K, \varepsilon_1) = \frac{|3 - 2\cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|1|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \prec \rho = 1$, άρα η ασύμπτωτη τέμνει τον κύκλο.

Άλλος τρόπος: λύνω σύστημα εξισώσεων κύκλου και ασύμπτωτης……και βρίσκω δύο λύσεις (δύο σημεία …….)

Δ4. Αφού η εφαπτομένη της υπερβολής είναι παράλληλη στην ευθεία y = x + 2015 θα είναι της μορφής y = x + β, $\beta \in R$.

Λύνω το σύστημα των εξισώσεων $x^2 - 4y^2 = 16$ και y = x + β και απαιτώ στη δευτεροβάθμια που προκύπτει Δ = 0, αφού θέλουμε το σύστημα να έχει μια λύση (ένα κοινό σημείο). Η δευτεροβάθμια είναι μετά από τη μέθοδο της αντικατάστασης

$-3x^2 - 8\beta x - 4\beta^2 - 16 = 0$ με Διακρίνουσα Δ = 0 $\Leftrightarrow$ $(-8\beta)^2 - 4(-3)(-4\beta^2 - 16) = 0 \Leftrightarrow$ ....

$\Leftrightarrow \beta^2 = 12 \Leftrightarrow \beta = 2\sqrt{3}$ ή $\beta = -2\sqrt{3}$

Άρα $y = x + 2\sqrt{3}$ ή $y = x - 2\sqrt{3}$.

Άλλος τρόπος για να βρω την εξίσωση της εφαπτομένης είναι με τη χρήση του σημείου επαφής $A(x_1, y_1)$ της παραβολής $C_1 : x^2 - 4y^2 = 16$ και της εφαπτομένης της:

$xx_1 - 4yy_1 = 16$

Ισχύουν $\frac{x_1}{4y_1} = 1$ και $x_1^2 - 4y_1^2 = 16$ ....$(x_1, y_1) = (\frac{8}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$ ή $(x_1, y_1) = (-\frac{8}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}})$

Άρα $y = x + 2\sqrt{3}$ ή $y = x - 2\sqrt{3}$.