

Μαθηματικά Γενικής Παιδείας Γ' Λυκείου



Θέματα Εξετάσεων-Ο.Ε.Φ.Ε.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΚΑΡΑΦΕΡΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

ΘΕΜΑ 1^ο

- A1.** Ποιά από τα παρακάτω μεγέθη είναι μέτρα θέσης και ποιά είναι μέτρα διασποράς;
- α. Διάμεσος
 - β. Διακύμανση
 - γ. Μέση τιμή
 - δ. Επικρατούσα τιμή
 - ε. Εύρος
 - στ. Τυπική απόκλιση

ΜΟΝΑΔΕΣ 6,5

- A2.** Έστω X μια μεταβλητή που αφορά τα άτομα ενός πληθυσμού. Για ένα συγκεκριμένο δείγμα μεγέθους n , οι τιμές της μεταβλητής είναι x_i και οι αντίστοιχες συχνότητες v_i , με $i=1, 2, 3, \dots, k$ όπου $k \leq n$. Να γράψετε ποιος αριθμός εκφράζει τη σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i και να αποδείξετε ότι:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

- B1.** Στον επόμενο πίνακα φαίνεται η κατανομή των τερμάτων (γκόλ) (X) που πέτυχε μία ομάδα ποδοσφαίρου σε 20 αγώνες πρωταθλήματος.

Τέρματα x_i	0	1	2	3	4	5
Αγώνες v_i	3	8	4	2	2	1

Στις παρακάτω ερωτήσεις 1-3, να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

1. Η μέση τιμή είναι:

A. 1,75 B. 3,5 Γ. 3,75 Δ. 1 Ε. 2,5

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

2. Η διάμεσος είναι:

A. 1,75 B. 3,5 Γ. 3,75 Δ. 1 Ε. 2,5

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

3. Η σχετική συχνότητα της τιμής 3 είναι:

- A. 0 B. 0,1 Γ. 0,2 Δ. 0,3 Ε. 0,4

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

B2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α. Η διακύμανση και η τυπική απόκλιση έχουν τις ίδιες μονάδες μέτρησης.
- β. Το 50% των παρατηρήσεων σε κάθε σύνολο δεδομένων είναι μικρότερες ή ίσες από τη μέση τιμή και το υπόλοιπο 50% είναι μεγαλύτερες ή ίσες από τη μέση τιμή.

γ. Δίνονται δύο ομάδες τιμών που έχουν μέση τιμή 50:

A ομάδα: 0 20 40 50 60 80 100

B ομάδα: 0 48 49 50 51 52 100

Μεγαλύτερη διασπορά παρουσιάζει η ομάδα B.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4,5

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + a^2 - 4a$, $a \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο.

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του a για τις οποίες το τοπικό μέγιστο της f είναι 3-πλάσιο από το τοπικό ελάχιστο.

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

γ) Να βρείτε, αν υπάρχει, την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ γίνεται ελάχιστος.

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύουν:

$$P(A-B) = \frac{1}{4}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{20} \quad \text{και} \quad P(B'-A) = \frac{1}{2}$$

- α) Να βρείτε την πιθανότητα $P(A)$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 7**
- β) Να αποδείξετε ότι η πιθανότητα $P(B) = \frac{1}{4}$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 9**
- γ) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A και B . **ΜΟΝΑΔΕΣ 9**

ΘΕΜΑ 4^ο

Ο επόμενος πίνακας δίνει τον αριθμό των ανέργων (X) σε εκατοντάδες χιλιάδες και τον αριθμό των εγκληματικών ενεργειών (Y) σε εκατοντάδες για τα έτη 1993-1997 σε μία χώρα.

	1993	1994	1995	1996	1997
Αριθμός ανέργων x_i	4	4,3	8,3	8,7	7,3
Αριθμός εγκληματικών πράξεων y_i	24	25	28	29	32

- α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των μεταβλητών X και Y . **ΜΟΝΑΔΕΣ 8**
- β) Από την εξίσωση $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ της ευθείας των ελαχίστων τετραγώνων της Y πάνω στη X εκτιμήσαμε ότι για κάθε αύξηση του αριθμού των ανέργων κατά 100.000 ο αριθμός των εγκληματικών πράξεων αυξάνεται κατά 111.
Να βρείτε την εξίσωση: $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 8**
- γ) Ο αριθμός των ανέργων το έτος 1998 αυξήθηκε κατά 10 % σε σχέση με το 1997. Να εκτιμήσετε τον αριθμό των εγκληματικών ενεργειών το έτος 1998. **ΜΟΝΑΔΕΣ 6**
- δ) Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση της ευθείας παλινδρόμησης του ερωτήματος β για να εκτιμήσουμε τον αριθμό των ανέργων όταν ο αριθμός των εγκληματικών πράξεων είναι 2.600; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. **ΜΟΝΑΔΕΣ 3**

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ 2002
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Για δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδείξετε ότι:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(μονάδες 5)

B. Δίνεται η ευθεία $\hat{y} = \hat{a} + \hat{\beta}x$ της παλινρόμησης της μεταβλητής Y πάνω στη X .

α. Να δώσετε, με απόδειξη, την ερμηνεία της εκτιμήτριας $\hat{\beta}$.

(μονάδες 5)

β. Να εξηγήσετε γιατί διέρχεται από το σημείο (\bar{x}, \bar{y}) .

(μονάδες 2)

Γ. Να δώσετε τους ορισμούς των εννοιών που αναφέρονται στις προτάσεις (α) έως (δ).

α. Τι λέμε καμπύλη συχνοτήτων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής;

β. Πώς ορίζεται η παράγωγος $f'(x_0)$ της συνάρτησης f στο x_0 ;

γ. Τι είναι το εύρος ενός δείγματος;

δ. Τι ονομάζεται στατική ομαλότητα;

(μονάδες 8)

Δ. Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση:

α. Αν ο ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης f στο διάστημα $\Delta = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ τότε ο τύπος της } f \text{ είναι:}$$

A) $2\ln x + \frac{1}{\eta\mu^3 x} + \frac{\sqrt{x}}{2},$

B) $\frac{2}{x} + \epsilon\phi x + \sqrt{x},$

Γ) $2\ln x + \epsilon\phi x + \sqrt{x},$

Δ) $(\ln x)^2 + (\epsilon\phi x)^2 + \sqrt{x},$

Ε) Τίποτα από τα A, B, Γ, Δ

(μονάδες 2,5)

β. Αν για την πιθανότητα $P(A)$ του ενδεχομένου A ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $[P(A)]^2 - 2P(A) + 1 = 0$ (1), τότε:

A) το A είναι το αδύνατο ενδεχόμενο

B) το A είναι βέβαιο ενδεχόμενο

Γ) ισχύει $0 < P(A) < \frac{1}{2}$

Δ) η σχέση (1) είναι αδύνατη

Ε) τίποτα από τα A, B, Γ, Δ

(μονάδες 2,5)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται οι συναρτήσεις φ, f, g με $f(1)=f'(1)=1$ και $\varphi(x)=f(g(x)), g(x)=\ln x+x$, με $x>0$.

A. Να αποδείξετε ότι: $g(1)=\varphi(1)=1$ και $g'(1)=\varphi'(1)=2$.
(μονάδες 7)

B. Να εξετάσετε αν η $g(x)$ έχει ακρότητα στο διάστημα $\Delta=(0,+\infty)$
(μονάδες 5)

Γ. Να υπολογιστεί η τιμή του ορίου: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(h+1) + (h+1) - g(1)}{h}$.
(μονάδες 4)

Δ. α. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ των γραφικών παραστάσεων των φ και f στα σημεία τους $A(1,\varphi(1))$ και $B(1,f(1))$ αντίστοιχα.
(μονάδες 7)

β. Να υπολογιστεί η γωνία που σχηματίζει η ε_2 με τον άξονα των x .
(μονάδες 2)

ΘΕΜΑ 3^ο

n τηλεθεατές δήλωσαν την προτίμησή τους σε ένα μόνο από κ προγράμματα τα $a_1, a_2, \dots, a_\kappa$ με $n, \kappa \in \mathbb{N}^*$. Από τις μετρήσεις προέκυψε ότι για τα ποσοστά προτίμησης $f(a_i)$ των a_i είναι: $f(a_3)=\frac{400}{31}\%$ και $f(a_i)=\lambda \cdot 2^{i-1}$ με $i=1,2,\dots,\kappa$ και λ σταθερό αριθμό.

A. Να αποδείξετε ότι $\lambda=\frac{1}{31}$ και $\kappa=5$.
(μονάδες 4)

B. Επιλέγουμε ένα τηλεθεατή στην τύχη. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεκωμένων:

A: Να προτίμησε το πρόγραμμα a_4 .

B: Να προτιμήσε ένα από τα 2 πιο δημοφιλή προγράμματα.

Γ: Να μην προτίμησε το a_1 .

(μονάδες 6)

Γ. Αν το a_4 προτιμήθηκε από 160 άτομα, να βρείτε το n .
(μονάδες 5)

Δ. α. Να γίνει το ραβδόγραμμα συχνοτήτων της μεταβλητής X : « ο αριθμός των προτιμήσεων» που έλαβε κάθε πρόγραμμα.
(μονάδες 7)

β. Να βρείτε την επικρατούσα τιμή της μεταβλητής X .
(μονάδες 3)

ΘΕΜΑ 4^ο

Το πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής X των ετήσιων μισθών (σε εκατοντάδες €) ενός δείγματος εργαζομένων, ομαδοποιημένης σε κλάσεις ίσου πλάτους, έχει κορυφές τα σημεία:

A(20,0), B(40,5), Γ(60,10), Δ(80,20), E(100,30), Z(120, v_5), H(140,10), Θ(160,0).

Η κατακόρυφη γραμμή με εξίσωση $x=100$ διαιρεί το χωρίο που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

A. Να αποδείξετε ότι $v_5=25$.

(μονάδες 5)

B. Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων της κατανομής X .

(μονάδες 5)

Γ. Να υπολογίσετε τις τιμές των μέτρων θέσης της X .

(μονάδες 7)

Δ. Αν σαν «όριο φτώχειας» θεωρήσουμε τον μισθό των 7200 €, να εκτιμήσετε το ποσοστό επί τοις % των φτωχών του δείγματος.

(μονάδες 5)

E. Να χαρακτηρίσετε την κατανομή ως προς την συμμετρία της.

(μονάδες 3)

Προσομοίωση 2002 (2η εκδωχή)
Μαθηματικά Γ' Λυκείου Γενικής Παιδείας

Θέμα 1

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha + e^x}{x-2} & x \in (-\infty, 0] \\ \ln(1-x) + 2x^2 & x \in (0, 1) \end{cases}$$

α) Να προσδιορίσετε την τιμή του α ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

Μονάδες 7

β) Να μελετήσετε τη μονοτονία της f στο διάστημα $(0, 1)$ και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατα της.

Μονάδες 7

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f με το $x_0 \in (-\infty, 0]$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο A να είναι παράλληλη προς τον xx' .

Μονάδες 6

Θέμα 2

Σε ένα κουτί υπάρχουν 50 μπαλάκια αριθμημένα από το 1 έως το 50. Αν ο Μιχάλης τραβήξει τυχαία έναν αριθμό που διαιρείται με το 2 κερδίζει ένα βιβλίο, ενώ αν τραβήξει έναν αριθμό που διαιρείται με το 5 κερδίζει ένα CD. Να βρείτε την πιθανότητα για καθένα από τα επόμενα ενδεχόμενα.

A: Θα κερδίσει ένα βιβλίο.

Μονάδες 4

B: Θα κερδίσει ένα βιβλίο ή ένα CD.

Μονάδες 4

Γ: Θα κερδίσει ένα βιβλίο και ένα CD.

Μονάδες 4

Δ: Θα κερδίσει μόνο ένα βιβλίο.

Μονάδες 4

E: Δε θα κερδίσει ούτε βιβλίο ούτε CD.

Μονάδες 4

Θέμα 3

A. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$4f(x) + 4 = \sqrt{x+12} + f(x) \cdot 2\sqrt{x}. \text{ Να βρεθεί η } f(x).$$

Μονάδες 10

B. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = \frac{2}{x}$ και $g(x) = (x-1)^2$.

Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες των C_f, C_g στο σημείο τομής αυτών είναι κάθετες μεταξύ τους.

Μονάδες 10

Θέμα 7

Έστω $\hat{y} = \hat{a} + 0,7x$ η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων για τα παρακάτω ζεύγη τιμών:

x	1	2	4	5
y	2	4	y_3	5

Να βρείτε:

- Την τιμή y_3
- Την εκτιμήτρια \hat{a}

Μονάδες 10

Θέμα 8

Μια επιχείρηση έχει προς ενοικίαση αυτοκίνητα για τα οποία ο μέσος χρόνος λειτουργίας τους πριν την εμφάνιση της πρώτης βλάβης είναι 12 μήνες με τυπική απόκλιση 3 μήνες.

- Να αποδείξετε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Μονάδες 10

ii) Αν η επιχείρηση έχει φροντίσει (βελτιώνοντας τη συντήρηση κλπ.) να μεγαλώσει τον χρόνο λειτουργίας κάθε αυτοκινήτου πριν την εμφάνιση της πρώτης βλάβης κατά c μήνες, να βρείτε την ελάχιστη τιμή του c για την οποία το δείγμα θα ήταν ομοιογενές.

Μονάδες 10

Θέμα 9

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

Μονάδες 5

- Να μελετηθεί η f ως προς, τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

γ) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) όπου $AB = x$ μονάδες μήκους και $A\Gamma = 1$ μονάδα μήκους. Κατασκευάζουμε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις x και y , όπου $y = B\Gamma + AB$, ($B\Gamma, AB$ τα μήκη των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$).

Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ως προς x , όταν $x = \sqrt{3}$

Μονάδες 8

Θέμα 10

Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων – σχετικών συχνοτήτων.

x_i	v_i	f_i	$f_i \%$	N_i	F_i	$F_i \%$
1					0,1	
2		0,1		8		
3						50
4						
Σύνολο						

Μονάδες 20

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2003

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΖΗΤΗΜΑ 1^ο

Α. Αν A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , δείξτε ότι ισχύει:
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

(7 μονάδες)

Β. Έστω ότι έχουμε την κατανομή συχνοτήτων ενός δείγματος μεγέθους n . Αν X_1, \dots, X_k οι τιμές της (ποσοτικής) μεταβλητής, με συχνότητες n_1, n_2, \dots, n_k και σχετικές συχνότητες f_1, f_2, \dots, f_k αντίστοιχα και \bar{X} ο αριθμητικός μέσος των τιμών του δείγματος, δείξτε ότι $\bar{X} = \sum_{i=1}^k X_i f_i$

(4 μονάδες)

Γ. Απαντήστε (χωρίς απόδειξη - αιτιολόγηση) στις επόμενες ερωτήσεις.

1. Σε ένα δείγμα μεγέθους n , παρατηρήθηκε ότι για κάθε τιμή της μεταβλητής x_i , η απόλυτη συχνότητα n_i ισούται με την (αντίστοιχη) εκατοστιαία σχετική συχνότητα $f_i\%$, δηλαδή ισχύει $n_i = f_i\%$ για κάθε $i=1,2,3,\dots$. Ποιο είναι το μέγεθος n του δείγματος;

(2 μονάδες)

2. Τις τελευταίες 7 ημέρες, οι θερμοκρασίες σε ένα χωριό της Νορβηγίας ήταν $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ βαθμούς αντίστοιχα. Τι έχετε να παρατηρήσετε για το συντελεστή μεταβλητότητας της θερμοκρασίας αυτού του επταημέρου;

(2 μονάδες)

3. Έστω x_1, \dots, x_n οι τιμές ενός δείγματος, \bar{x} η μέση τιμή τους και s η τυπική τους απόκλιση. Αν κάθε μία από τις πιο πάνω τιμές πολλαπλασιαστεί με τον αριθμό a και σε κάθε γινόμενο προστεθεί ο αριθμός b , γράψτε τη μέση τιμή \bar{x}' και την τυπική απόκλιση s' των νέων τιμών $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b$

(2 μονάδες)

4. Έστω ότι έχουμε ένα δείγμα μεγέθους n και συμβολίζουμε με n_i τις συχνότητες και f_i τις αντίστοιχες σχετικές συχνότητες των τιμών x_i της μεταβλητής. Αν συμβολίσουμε με a_i το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων του δείγματος, γράψτε με τι ισούται το a_i .

(2 μονάδες)

Δ. Ένας μαθητής της Γ' Λυκείου, διεκδικεί την εισαγωγή του στην

τριτοβάθμια εκπαίδευση με τους εξής βαθμούς:

1. Γενικός βαθμός πρόσβασης: 16
2. 1^ο μάθημα αυξημένης βαρύτητας: 15
3. 2^ο μάθημα αυξημένης βαρύτητας: 17

Υπολογίστε τη μέση επίδοση του συγκεκριμένου μαθητή.

(Υπενθυμίζεται ότι ο γενικός βαθμός πρόσβασης έχει συντελεστή βαρύτητας 8, το 1^ο μάθημα αυξημένης βαρύτητας έχει συντελεστή βαρύτητας 1,3 και το 2^ο 0,7).

(2 μονάδες)

Ε. Ένα φορτηγό κινείται ευθύγραμμα πάνω στην Εθνική οδό, μεταφέροντας εμπορεύματα από τη Θεσσαλονίκη προς την Αθήνα. Καθώς πλησιάζει προς τη Λάρισα, η θέση του πάνω στην Εθνική οδό συναρτήσει του χρόνου t , δίνεται από τη συνάρτηση

$$x(t) = -\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - t.$$

Βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του φορτηγού. Η ταχύτητά του αυξάνεται ή ελαττώνεται; (4 μονάδες)

ΖΗΤΗΜΑ 2^ο

Στον επόμενο πίνακα συχνοτήτων, φαίνεται η κλιμάκωση των βαθμών πρόσβασης του συνόλου των μαθητών της Γ' Λυκείου, που εξετάστηκαν σε εθνικό επίπεδο το έτος 2002, σύμφωνα με τα επίσημα στοιχεία που έδωσε στη δημοσιότητα το Υπουργείο Παιδείας.

Κλάσεις [-)	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$
0 – 2	1
2 – 4	2
4 – 6	
6 - 8	16
8 – 10	18
10 – 12	16
12 – 14	14
14 - 16	13
16 – 18	
18 - 20	5

1. Αν είναι γνωστό ότι το πλήθος των μαθητών που πήραν βαθμό πρόσβασης μεγαλύτερο ή ίσο του 16 και μικρότερο του 18, ήταν τετραπλάσιο αυτών που πήραν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 4 και μικρότερο του 6, να συμπληρώσετε τον πίνακα με τις δύο σχετικές συχνότητες που λείπουν. **(5 μονάδες)**
2. Είναι γνωστό, ότι 55872 μαθητές, πήραν βαθμό πρόσβασης μεγαλύτερο ή ίσο του 10. Να βρείτε το συνολικό πλήθος των υποψηφίων. **(4 μονάδες)**
3. Να υπολογίσετε πόσοι υποψήφιοι είχαν βαθμό πρόσβασης μεγαλύτερο ή ίσο του 11 και μικρότερο του 13. **(4 μονάδες)**
4. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Η πιθανότητα αυτός να είναι υποψήφιος της θεωρητικής κατεύθυνσης είναι 0,34 ενώ η πιθανότητα να είναι υποψήφιος της θετικής, είναι μισή από την πιθανότητα να είναι υποψήφιος της τεχνολογικής. Βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου «ο μαθητής προέρχεται, είτε από τη θεωρητική, είτε από την τεχνολογική κατεύθυνση», καθώς και το πλήθος των μαθητών της θετικής κατεύθυνσης (στρογγυλοποιείστε την απάντησή σας στον πλησιέστερο ακέραιο). **(12 μονάδες)**

ΖΗΤΗΜΑ 3^ο

Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα δύο φορές και θεωρούμε το ενδεχόμενο A: «να φέρουμε τουλάχιστον μία φορά κεφάλι».

1. Βρείτε την πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο A. **(8 μονάδες)**
2. Δίνεται ο πιο κάτω πίνακας συχνοτήτων:

Τιμές μεταβλητής y_i	Απόλυτες συχνότητες n_i
$2x^2 P(A)$	3
$3x^2 P(A')$	2
$xP(\Omega)$	3

Όπου Ω και $P(A)$ ο δειγματικός χώρος και η πιθανότητα

αντίστοιχα του 1^{ου} ερωτήματος και $x \in R - \left\{0, -\frac{1}{2}\right\}$.

α. Υπολογίστε (ως συνάρτηση του x) τη μέση τιμή \bar{y} της μεταβλητής y

(4 μονάδες)

β. Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{y}$

(13 μονάδες)

ΖΗΤΗΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (P(A))^2 x^3 - [7P(A) - 3]x - x \ln x + P(B)$, με $x > 0$ και $P(A), P(B)$, οι πιθανότητες των ενδεχομένων A, B αντίστοιχα, ενός δειγματικού χώρου Ω .

1. Βρείτε την $f'(x)$ **(4 μονάδες)**
2. Βρείτε την $P(A)$, αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της f έχει, για $x=1$, εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα $x'x$. **(6 μονάδες)**
3. Αν $P(A) = \frac{1}{3}$ και $f(1) = \frac{55}{36}$, δείξτε ότι $P(B) = \frac{3}{4}$ και ότι τα ενδεχόμενα A, B δεν είναι ασυμβίβαστα. **(7 μονάδες)**
4. Δείξτε ότι $\frac{1}{12} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$ **(8 μονάδες)**

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2004

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Δίνεται η συνάρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες, να αποδείξετε ότι: $F'(x)=f'(x)+g'(x)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

B. Ρίχνουμε ένα ζάρι μια φορά και η ένδειξή του είναι ο αριθμός 4. Έστω τα ενδεχόμενα $A=\{1, 3, 5\}$ και $B=\{2, 4, 6\}$

Να χαρακτηρίσετε σαν Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ) καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις 1 έως 4:

1. Πραγματοποιήθηκε το ενδεχόμενο $A \cap B$.
2. Πραγματοποιήθηκε τουλάχιστον ένα από τα A και B .
3. Πραγματοποιήθηκε το αντίθετο ενδεχόμενο του B .
4. Πραγματοποιήθηκε το ενδεχόμενο $A \cap B'$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Γ. Οι παρατηρήσεις $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 4$, εύρος $R=10$ και τυπική απόκλιση $s=2$.

Να γράψετε τη μέση τιμή, το εύρος και την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων $-2t_1, -2t_2, -2t_3, \dots, -2t_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Δ. Να γράψετε τους κανόνες, που δίνουν τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$cf(x)$ με c πραγματική σταθερά, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ με $g(x) \neq 0$, $f(g(x))$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

ΘΕΜΑ 2°

Ένα κουτί περιέχει μία κόκκινη σφαίρα K και τρεις μαύρες τις M_1 , M_2 και M_3 . Αφαιρούμε τυχαίως μια σφαίρα από το κουτί, την καταγράφουμε και στην συνέχεια αφαιρούμε τυχαίως μια δεύτερη σφαίρα και την καταγράφουμε επίσης.

- α. Να βρείτε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος. ΜΟΝΑΔΕΣ 9
- β. Να παραστήσετε με αναγραφή τα ενδεχόμενα, που προσδιορίζονται από την αντίστοιχη ιδιότητα:
- A: “Και οι δύο σφαίρες είναι μαύρες”
- B: “Μόνο μία σφαίρα είναι μαύρη”
- Γ “Καμία σφαίρα δεν είναι μαύρη” ΜΟΝΑΔΕΣ 7
- γ. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των A, B και Γ. ΜΟΝΑΔΕΣ 4
- δ. Να σχεδιάσετε το σημειόγραμμα, που περιγράφει τον αριθμό των μαύρων σφαιρών, που περιέχουν τα απλά ενδεχόμενα του Ω . ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ΘΕΜΑ 3°

Έστω ο δειγματικός χώρος Ω και ένα μη κενό ενδεχόμενό του A. ($A \neq \emptyset$)

- A. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. ΜΟΝΑΔΕΣ 10
- B. Θεωρούμε τις παρατηρήσεις: $P(A)$, $P(A')$, $P(\emptyset)$, $P(\Omega)$.
- α. Να υπολογίσετε την μέση τιμή τους και την διάμεσό τους. ΜΟΝΑΔΕΣ 6
- β. Να δείξετε, ότι η διακύμανσή τους είναι: $s^2 = \frac{1}{4} [2P^2(A) - 2P(A) + 1]$ ΜΟΝΑΔΕΣ 5
- γ. Να δείξετε, ότι: $CV \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ και η ισότητα ισχύει, όταν $P(A) = P(A')$. ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ΘΕΜΑ 4°

Τα ψυγεία μιας εταιρείας συντήρησης τροφίμων είναι κατανομημένα σε τέσσερις κλάσεις, σύμφωνα με την θερμοκρασία X (σε $^{\circ}\text{C}$), που επικρατεί στο εσωτερικό τους, όπως φαίνεται στη πρώτη στήλη του επόμενου πίνακα.

Κλάσεις [$-$, $-$)	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητες v_i	Σχετικές συχνότητες f_i %
[-4, -2)			
[-2, 0)			
[0, 2)			
[2, 4)			
ΣΥΝΟΛΟ:			

Σε σχέση με τον αριθμό των ψυγείων της πρώτης κλάσης, η δεύτερη κλάση έχει τριπλάσιο αριθμό και η τέταρτη πενταπλάσιο αριθμό ψυγείων.

- A.** Να αποδείξετε, ότι η μέση θερμοκρασία των ψυγείων είναι $\bar{x} = 1^{\circ}\text{C}$
MONADEΣ 6
- B.** Έστω, ότι η τρίτη κλάση έχει ίδιο αριθμό ψυγείων με την πρώτη κλάση.
- α.** Να συμπληρώσετε την στήλη με τις σχετικές συχνότητες f_i % του παραπάνω πίνακα και να κατασκευάσετε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.
MONADEΣ 9
- β.** Να υπολογίσετε την διάμεσο θερμοκρασία δ .
MONADEΣ 5
- γ** Από το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, να εκτιμήσετε το ποσοστό των ψυγείων με θερμοκρασία μεγαλύτερη από $0,5^{\circ}\text{C}$. MONADEΣ 5



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

- A.** i) Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης f στο πεδίο ορισμού της A . *Μονάδες 2*
- ii) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; *Μονάδες 3*
- B.** Να γράψετε και να αποδείξετε τις ιδιότητες που ισχύουν για την σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i , $i=1,2,\dots,k$ του δείγματος μεγέθους $n \geq k$, των τιμών μιας μεταβλητής X . *Μονάδες 10*
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις.
1. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποιοτικών δεδομένων. *Μονάδες 2*
 2. Αν για τις αθροιστικές συχνότητες N_i , $i=1,2,3,4,5$ ενός δείγματος τιμών x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 της μεταβλητής X , ισχύει $N_i = 4 \cdot i^2 + 2i$, τότε το μέγεθος του δείγματος είναι $n=110$. *Μονάδες 2*
 3. Σε ομαδοποιημένα δεδομένα, το εύρος ισούται με την διαφορά της κεντρικής τιμής της πρώτης κλάσης από την κεντρική τιμή της τελευταίας κλάσης. *Μονάδες 2*
 4. Σε κανονική κατανομή ισχύει: $\bar{x} = \delta$, όπου \bar{x} είναι η μέση τιμή και δ η διάμεσος της. *Μονάδες 2*
 5. Αν για τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$ δύο ενδεχομένων A , B ενός δειγματικού χώρου Ω είναι $P(A) \leq P(B)$ τότε ισχύει πάντα $A \subseteq B$. *Μονάδες 2*

ΘΕΜΑ 2°

Έστω t_1, t_2, \dots, t_{100} ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής T με μέση τιμή \bar{t} , τυπική απόκλιση $s \neq 0$ και η συνάρτηση F με τύπο

$$F(x) = \begin{cases} \frac{(\bar{t} - 2s)(x - 4)}{\sqrt{x} - 2}, & \text{αν } x \geq 0 \text{ και } x \neq 4 \\ -24 \cdot s, & \text{αν } x = 4 \end{cases},$$

η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $A = [0, +\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι για $x \neq 4$ ο τύπος της συνάρτησης F είναι

$$F(x) = (\bar{t} - 2s)(\sqrt{x} + 2). \quad \text{Μονάδες 7}$$

β) Να εξετάσετε αν είναι ομοιογενές το δείγμα των τιμών t_1, t_2, \dots, t_{100} της μεταβλητής T . Μονάδες 10

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τύπο $g(x) = \frac{F(x)}{\bar{t} - 2s}$ στο σημείο της $A\left(\frac{1}{4}, g\left(\frac{1}{4}\right)\right)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3°

Ο κυβισμός των κινητήρων X , σε κυβικά εκατοστά (κ.εκ.), ενός δείγματος 4.000 αυτοκινήτων, ακολουθεί κανονική κατανομή.

Στο παραπάνω δείγμα βρέθηκαν 100 αυτοκίνητα με κυβισμό μικρότερο από 1.400κ.εκ. και 3.360 αυτοκίνητα με κυβισμό μικρότερο από 2.000κ.εκ.

α) Να βρείτε τη μέση τιμή \bar{x} , την τυπική απόκλιση s και να εκτιμήσετε το εύρος R του κυβισμού των κινητήρων των αυτοκινήτων του δείγματος.

Μονάδες 12

β) Επιλέγουμε τυχαία ένα αυτοκίνητο από το δείγμα. Να βρείτε την πιθανότητα να έχει κινητήρα με κυβισμό μικρότερο από 1.200κ.εκ. ή μεγαλύτερο από 2.000κ.εκ.

Μονάδες 7

γ) Αν, μετά από επισκευή, ο κυβισμός κάθε κινητήρα αυξηθεί κατά 6%, να βρείτε την μέση τιμή και την διασπορά των νέων τιμών του, και να εκτιμήσετε το εύρος τους.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνονται τα ενδεχόμενα K, Λ ενός δειγματικού χώρου Ω με πιθανότητες $P(K), P(\Lambda)$ αντίστοιχα, όπου $P(K) \neq 0$.

α) Η συνάρτηση

$$f(x) = -\frac{1}{2} \cdot [x - P(\Lambda)]^2 + x \cdot P(K), \quad x \in \mathbb{R}$$

έχει στο σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ μέγιστο το $\frac{5}{2} \cdot [P(K)]^2$.

Να αποδείξετε ότι:

i) $x_0 = P(K) + P(\Lambda)$

Μονάδες 6

ii) $P(\Lambda) = 2 \cdot P(K)$

Μονάδες 4

β) Έστω, επιπλέον, ότι οι παρατηρήσεις:

$$P(\emptyset), P(K), P(\Lambda), P(K \cup \Lambda), P(\Omega), P(K), P(\emptyset), P(K), P(K \cup \Lambda), P(K \cap \Lambda)$$

έχουν διάμεσο $\delta = \frac{1}{4}$ και $P[(K - \Lambda) \cup (\Lambda - K)] = \frac{2}{3}$.

i) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων: $K, \Lambda, K \cap \Lambda, K \cup \Lambda$.

Μονάδες 12

ii) Να κάνετε το διάγραμμα συχνοτήτων καθώς και το αντίστοιχο πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής των παραπάνω παρατηρήσεων. *Μονάδες 3*



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Αν x_1, x_2, \dots, x_k οι τιμές μιας μεταβλητής X που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n όπου k, n μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $k \leq n$

- i) Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i , $i = 1, 2, \dots, k$
- ii) Δείξτε ότι $0 \leq f_i \leq 1$ για $i = 1, 2, \dots, k$
- iii) Δείξτε ότι $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$

(9 ΜΟΝΑΔΕΣ)

B. Έστω A, B δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Να αποδείξετε ότι $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(8 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Γ. Να γράψετε στην τελευταία στήλη το γράμμα της σωστής απάντησης

		Α	Β	Γ	Δ	ΑΠΑΝΤΗΣΗ	
1	Αν $P(A)=0.3$ τότε το $P(A')$ ισούται με	0.3	0.8	0.7	0.1		
2	Αν $P(A)=0.3, P(B)=0.4, P(A \cap B)=0.1$ τότε το $P(A \cup B)$ ισούται με	0.6	0.7	0.8	0.9		
3	Αν $P(A)=0.8, P(A \cap B)=0.2$ τότε	Το $P(A - B)$ ισούται με	0.6	0.7	0.8	0.9	
		Το $P(A' \cup B')$ ισούται με	0.6	0.7	0.8	0.9	
4	Αν $P(A)=0.3$ και $P(B)=0.6$ Ποια από τις διπλανές σχέσεις ΔΕΝ μπορεί να ισχύει	$P(A \cup B) =$	0.5	0.6	0.7	0.8	
		$P(A \cap B) =$	0.1	0.2	0.3	0.4	
		$P(A - B) =$	0.1	0.2	0.3	0.4	

(8 ΜΟΝΑΔΕΣ)**ΘΕΜΑ 2^ο**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lambda x^3 - 6x + \mu$.

Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - x - 1}{x^2 - 1} = -\frac{1}{2\lambda}$ και το μέγιστο της συνάρτησης f είναι 9 :

- i) Δείξτε ότι $\lambda = 2$

(7 ΜΟΝΑΔΕΣ)

- ii) Δείξτε ότι $\mu = 5$

(6 ΜΟΝΑΔΕΣ)

- iii) Βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f όπου η εφαπτομένη (ϵ) είναι παράλληλη στον x'

(6 ΜΟΝΑΔΕΣ)

- iv) Να βρείτε για ποια τιμή του x ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος.

(6 ΜΟΝΑΔΕΣ)

ΘΕΜΑ 3^ο

Μελετήσαμε ένα δείγμα Ι.Χ. αυτοκινήτων που κυκλοφορούν στο κέντρο της Αθήνας ως προς τον αριθμό των επιβατών συμπεριλαμβανομένου και του οδηγού. Μερικά από τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

Αριθμός επιβατών x_i	Αριθμός αυτοκινήτων v_i	f_i	$f_i \%$	N_i	F_i	$F_i \%$
1						
2	110			160		
3						70
4		0.075				
5				400		
ΣΥΝΟΛΑ						

A.

- i) Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε. **(4 ΜΟΝΑΔΕΣ)**
- ii) Να υπολογίσετε την μέση τιμή και τη διάμεσο του δείγματος **(3 ΜΟΝΑΔΕΣ)**
- iii) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές **(4 ΜΟΝΑΔΕΣ)**

B. Επιλέγουμε τυχαία ένα αυτοκίνητο. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

A: “το αυτοκίνητο έχει το πολύ δύο επιβάτες”

(3 ΜΟΝΑΔΕΣ)

B: “το αυτοκίνητο έχει τουλάχιστον τέσσερις επιβάτες”

(3 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Γ. Επιλέγουμε στην τύχη έναν επιβάτη. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Γ: “ο επιβάτης έχει τρεις συνεπιβάτες”

(4 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Δ: “ο επιβάτης δεν έχει συνεπιβάτες”

(4 ΜΟΝΑΔΕΣ)

ΘΕΜΑ 4^ο

Σ' ένα χωριό υπάρχουν n άνθρωποι που ο καθένας είναι x_1, x_2, \dots, x_n ετών.

A. Αν το δείγμα x_1, x_2, \dots, x_n των ηλικιών τους έχει συντελεστή μεταβολής 20% και μετά από 25 χρόνια γίνεται για πρώτη φορά ομοιογενές,

- i) Βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των ηλικιών τους
- ii) Βρείτε τη μέση τιμή του δείγματος $x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$
- iii) Αν ο μικρότερος σε ηλικία είναι 10 ετών, βρείτε προσεγγιστικά τη μεγαλύτερη ηλικία, αν υποθέσουμε ότι η κατανομή των ηλικιών είναι κανονική.

(9 ΜΟΝΑΔΕΣ)

B. Στο παραπάνω χωριό υπάρχουν μόνο 2 καφενεία, το A και το B. Αν το 30% των κατοίκων πηγαίνει στο A καφενείο και το 60% δεν πηγαίνει στο B ενώ το 50% πηγαίνει σε ένα τουλάχιστον από τα δύο καφενεία, να βρείτε:

- i) Τι ποσοστό των κατοίκων πηγαίνει και στα δύο καφενεία
- ii) Απ' αυτούς που πηγαίνουν μόνο στο ένα καφενείο ποιοι είναι οι περισσότεροι, αυτοί που πηγαίνουν μόνο στο A ή αυτοί που πηγαίνουν μόνο στο B.

(8 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Γ. Το κάθε ένα από τα n άτομα αγοράζει ένα λαχνό. Οι λαχνοί είναι αριθμημένοι από το 1 έως το n και έχουν ίδια πιθανότητα κλήρωσης. Αν η πιθανότητα να κληρωθεί περιττός αριθμός είναι κατά 0,8% μεγαλύτερη από το να κληρωθεί άρτιος να βρείτε πόσα άτομα έχει το χωριό.

(8 ΜΟΝΑΔΕΣ)



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A 1. Τι λέγεται δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης;

Μονάδες 3

2. Πώς ορίζεται η διάμεσος ενός δείγματος n παρατηρήσεων; (n θετικός ακέραιος)

Μονάδες 4

B. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, να αποδείξετε ότι:

$$(cf(x))' = cf'(x), \quad c \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 8

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν σαν Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ), γράφοντας στο τετράδιο σας την ένδειξη (Σ) ή (Λ) δίπλα στον αριθμό της ερώτησης.

1. Αν A είναι το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f και υπάρχει $x_0 \in A$ για το οποίο ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ τότε η f δεν είναι συνεχής στο A .

Μονάδες 2

2. Ένα τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό της μέγιστο.

Μονάδες 2

3. Η διάμεσος της κανονικής κατανομής συμπίπτει με τη μέση τιμή της.

Μονάδες 2

4. Ο συντελεστής μεταβολής (CV) είναι μέτρο σχετικής διασποράς.

Μονάδες 2

5. Η διακύμανση εκφράζεται με τις μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \ln x$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

β. Να υπολογίσετε την παράγωγό της.

Μονάδες 5

γ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση δεν έχει ακρότατα.

Μονάδες 7

δ. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf'(x) - 3}{x - 1}$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3^ο

Ο χρόνος εργασίας 80 υπαλλήλων μιας εταιρείας, που εργάζονται από 5 έως 30 χρόνια, έχει ταξινομηθεί σε 5 ισοπλατείς κλάσεις. Είναι γνωστό ότι το ύψος του ορθογωνίου του ιστογράμματος συχνοτήτων που αντιστοιχεί στην τέταρτη κλάση είναι 30, η συχνότητα της δεύτερης κλάσης είναι τετραπλάσια από τη συχνότητα της τρίτης κλάσης, η σχετική συχνότητα της πρώτης κλάσης είναι 10% και ο αριθμός των υπαλλήλων που εργάζονται τουλάχιστον 15 χρόνια είναι 40.

α. Να παραστήσετε τα παραπάνω δεδομένα σε έναν πίνακα συχνοτήτων (απολύτων, σχετικών, αθροιστικών και αθροιστικών σχετικών).

Μονάδες 8

β. Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων και το αντίστοιχο πολύγωνο.

Μονάδες 8

γ. Να υπολογίσετε το ποσοστό των υπαλλήλων που εργάζονται λιγότερο από 23 χρόνια.

Μονάδες 4

δ. Πόσα το πολύ χρόνια πρέπει να εργάζεται ένας υπάλληλος, ώστε να είναι μεταξύ των 60 υπαλλήλων με τα λιγότερα χρόνια εργασίας;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4^ο

Για τα ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω , που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, είναι

$$N(A) - N(B) = \frac{1}{5}N(\Omega)$$

Έστω R το εύρος του δείγματος των παρατηρήσεων:

$$P(A), P(B), P(A \cap B), P(A \cup B)$$

A. Να αποδείξετε ότι:

α. $0 < R \leq 1$

Μονάδες 4

β. $R = P(A-B) + P(A' - B')$

Μονάδες 7

B. Αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{5P(A)x - 5P(B) - 1}{x - 1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ 5P(A \cap B) + 3, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$ είναι συνεχής

στο \mathbb{R} να αποδείξετε ότι:

α. $P(B) = P(A \cap B) + \frac{2}{5}$

Μονάδες 7

β. $R = 1$

Μονάδες 4

γ. $P(A \cup B) = 1$ και $P(A \cap B) = 0$

Μονάδες 3



08
επαναληπτικά
θέματα

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΠΙΛΟΓΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

Θέμα 1^ο

A1. Τι ονομάζεται εύρος ή κύμανση R ενός δείγματος παρατηρήσεων και τι μειονέκτημα παρουσιάζει;

Μονάδες 3

A2. Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ ο δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Να δώσετε τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας του απλού ενδεχομένου $\{\omega_i\}$.

Μονάδες 4

A3. Αν η $f(x) = x^2$ παραγωγίσιμη συνάρτηση, να δείξετε ότι η παράγωγός της είναι $f'(x) = 2x$.

Μονάδες 8

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα το οποίο αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

α. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε ισχύει $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0)}{h}$.

Μονάδες 2

β. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης που είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ θα είναι $f'(x_0)$ δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ ως προς x όταν $x = x_0$.

Μονάδες 2

γ. Αν η πραγματοποίηση ενός ενδεχομένου A συνεπάγεται την πραγματοποίηση του ενδεχομένου B τότε $A \subseteq B$.

Μονάδες 2

δ. Πάντοτε ένα μεγαλύτερο δείγμα δίνει πιο αξιόπιστα αποτελέσματα από ένα μικρότερο δείγμα.

Μονάδες 2

ε. Ο δειγματικός χώρος κάθε πειράματος τύχης αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.

Μονάδες 2

Θέμα 2^ο

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x+2} - 2}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

Μονάδες 6

β. Να βρείτε το σημείο $M(x, f(x))$ στο οποίο η γραφική παράσταση της f τέμνει τον x' αξονα.

Μονάδες 5

γ. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 16$

Μονάδες 6

δ. Έστω $x_i, i = 1, 2, 3, 4$ οι τιμές μιας μεταβλητής x , ενός δείγματος μεγέθους $n=40$. Αν $\kappa = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ να συμπληρωθεί ο πίνακας:

X_i	v_i	f_i	N_i	F_i
1	4			
2	κ			
3				
4		0,2		
Σύνολο		1		

Μονάδες 8

Θέμα 3^ο

«Σε μια εταιρία εργάζονται συνολικά 100 υπάλληλοι στο διοικητικό ή στο τεχνικό τμήμα. Από αυτούς οι 60 είναι άνδρες, 40 άτομα εργάζονται στο διοικητικό τμήμα ενώ 10 γυναίκες εργάζονται στο τεχνικό τμήμα. Η μέση ηλικία τόσο των ανδρών όσο και των γυναικών είναι 40 χρόνια.»

α. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο που εργάζεται στην εταιρία. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

A: «Το άτομο είναι άνδρας που εργάζεται στο τεχνικό τμήμα»

B: «Το άτομο είναι άνδρας ή εργάζεται στο διοικητικό τμήμα»

Μονάδες 7

β. Κάποιοι υπάλληλοι αποχώρησαν από την εταιρία η οποία κάλυψε το κενό τους προσλαμβάνοντας για κάθε άτομο που αποχώρησε, ένα νεότερο κατά 4 χρόνια. Αν η νέα μέση ηλικία των υπαλλήλων της εταιρείας είναι 39,6 χρόνια, να βρείτε πόσοι υπάλληλοι αποχώρησαν.

Μονάδες 6

- γ. Αν είναι γνωστό ότι η κατανομή των 100 αρχικών ηλικιών είναι περίπου κανονική και το 2,5% των υπαλλήλων έχει ηλικία το πολύ 26 χρόνια, να βρείτε πόσοι υπάλληλοι της εταιρείας έχουν ηλικία μικρότερη από 33 χρόνια.

Μονάδες 6

- δ. Αν ισχύει $100 \sum_{i=1}^{\kappa} v_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{\kappa} v_i x_i \right)^2 = 250000$ μετά την πρόσληψη των νεότερων ατόμων και η κατανομή των ηλικιών εξακολουθεί να είναι κανονική, να βρείτε κατά προσέγγιση το εύρος της κατανομής των ηλικιών των υπαλλήλων της εταιρείας.

$$\text{Δίνεται } S^2 = \frac{1}{\nu} \left[\sum_{i=1}^{\kappa} v_i x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa} v_i x_i \right)^2}{\nu} \right].$$

Μονάδες 6

Θέμα 4^ο

«Εστω πείραμα τύχης με δειγματικό χώρο $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ και m η ελάχιστη τιμή της μέσης τιμής των αριθμών $x, 5e^x, x+4, -7x, 1$ ($x \in \mathfrak{R}$). Επιλέγουμε τυχαίο $\kappa \in \Omega$ και σχηματίζουμε τη συνάρτηση $g(x) = \kappa x^2 - \kappa^2 x + 3$ ($x \in \mathfrak{R}$)»

- A. Να δείξετε ότι $m=2$.

Μονάδες 9

- B. Θεωρούμε το ενδεχόμενο $E = \{ \kappa \in \Omega / \text{«η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης } g \text{ στο σημείο της } A(1, g(1)) \text{ δεν είναι παράλληλη στον άξονα } x'x \}$. Να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου E.

Μονάδες 8

- Γ. Αν A,B ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$, $A \neq B$, να δειχτεί ότι $h(x) = \frac{3-2 \cdot P(A \cap B)}{12} x^3 + \frac{P(A)}{2} x^2 + x + 2008$, $x \in \mathfrak{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στο \mathfrak{R} .

Μονάδες 8

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΟΕΦΕ 2009
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Αν A, B είναι δυο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , να δείξετε ότι: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Μονάδες 9

B. α. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 3

β. Τι ονομάζεται δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης;

Μονάδες 3

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Για κάθε $x > 0$ ισχύει $(\sqrt{x})' = \frac{\sqrt{x}}{2x}$.

Μονάδες 2

β. Όταν ένα δείγμα τιμών ακολουθεί ασύμμετρη κατανομή με θετική ασυμμετρία τότε ισχύει $\delta > \bar{x}$.

Μονάδες 2

γ. Η μέση τιμή που βρίσκουμε σε ομαδοποιημένα δεδομένα είναι πάντα ίδια με αυτήν που είχαμε πριν την ομαδοποίηση.

Μονάδες 2

δ. Μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της λέγεται γνησίως φθίνουσα όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

Μονάδες 2

ε. Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Αν $P(A) \leq P(B)$ τότε κατ' ανάγκη ισχύει $A \subseteq B$.

Μονάδες 2

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΟΕΦΕ 2009
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 2^ο

Την 29^η Μαρτίου στις 4 π.μ. οι θερμοκρασίες 20 πόλεων σε βαθμούς Κελσίου ομαδοποιήθηκαν σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους και δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις σε βαθμούς Κελσίου °C	v_i
[0,2)	2
[2,4)	4
[4,6)	6
[6,8)	8

α. Να βρεθεί η μέση θερμοκρασία των πόλεων σε °C .

Μονάδες 6

β. Να κατασκευαστεί το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων % και να εκτιμηθεί η διάμεσος της θερμοκρασίας.

Μονάδες 7

γ. Να υπολογίσετε τη διακύμανση και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες 6

δ. Να βρεθεί το ποσοστό των πόλων με θερμοκρασία από 3 έως και 7 βαθμούς °C .

Μονάδες 6

$$\text{Δίνεται: } s^2 = \frac{1}{v} \left[\sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v} \right]$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΟΕΦΕ 2009
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω δειγματικός χώρος Ω με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα όπου $\Omega = \{1, 2, 3, 4, \dots, 25\}$ και η συνάρτηση $f(x) = x^2 - kx + 9$, $k \in \Omega$ για κάθε $x \in R$. Επιλέγουμε τα παρακάτω ενδεχόμενα:

$A = \{ k \in \Omega / k \text{ πολλαπλάσιο του } 3 \}$

$B = \{ k \in \Omega / \text{η } f \text{ δεν έχει πραγματικές ρίζες} \}$

$A = \{ k \in \Omega / \text{το όριο } \lim_{x \rightarrow k} \frac{x^2 - kx}{\sqrt{x} - \sqrt{k}} \leq 16\sqrt{k} \}$

α. Να βρεθούν τα ενδεχόμενα A , B , Γ .

Μονάδες 6

β. Να βρεθούν οι πιθανότητες $P(A)$ και $P(\Gamma)$.

Μονάδες 6

γ. Να δείξετε ότι $P(B) = \frac{1}{5}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{25}$.

Μονάδες 6

δ. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(A \cup B)$, $P(A \cup B^c)$, $P(B - A^c)$.

Μονάδες 7

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΟΕΦΕ 2009
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνονται τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{P(A \cup B)}{2[P(A) + P(B)]}x^2 + \frac{P(B - A)}{P(A) + P(B)}, \quad x \in R$$

Για την οποία είναι γνωστό ότι η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο $K(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 2$.

α. Να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα.

Μονάδες 7

β. Αν $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ και η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f

διέρχεται από το σημείο $\Lambda\left(0, \frac{1}{3}\right)$ να υπολογιστούν τα $P(A)$ και $P(B)$.

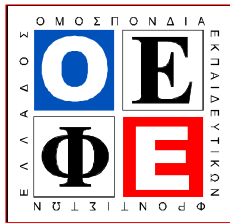
Μονάδες 6

γ. Αν $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{1}{4}$ να υπολογίσετε τα ακρότατα της συνάρτησης $g(x) = 6f(x) - 12x + 2019$.

Μονάδες 6

δ. Αν (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $K(1, f(1))$ και $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \dots, M_{10}(x_{10}, y_{10})$ 10 σημεία της (ε) που οι τετμημένες x_1, x_2, \dots, x_{10} έχουν μέση τιμή $-\frac{59}{6}$ και τυπική απόκλιση $s_x = 2$ να βρεθεί ο συντελεστής μεταβολής των τεταγμένων τους.

Μονάδες 6



Γ' ΤΑΞΗ ΓΕΝ.ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Αν $f(x)$ και $g(x)$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις, να δείξετε ότι για την συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$ ισχύει $F'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Μονάδες 9

B. α. Να διατυπώσετε τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας για ένα ενδεχόμενο A ενός δειγματικού χώρου Ω με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων.

Μονάδες 3

β. Τι εκφράζει η αθροιστική συχνότητα N_i της τιμής x_i μιας ποσοτικής μεταβλητής X ;

Μονάδες 3

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη *ΣΩΣΤΟ*, αν η πρόταση είναι σωστή, ή *ΛΑΘΟΣ*, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A , λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$ όταν $f(x) \geq f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1 .

Μονάδες 2

β. Το τόξο α_i ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων είναι ίσο με $\alpha_i = 360^\circ \cdot v_i$.

Μονάδες 2

γ. Αν A, B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου τότε το ενδεχόμενο να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα δύο είναι $(A \cup B)'$.

Μονάδες 2

δ. Ισχύει:
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Μονάδες 2

ε. Το εύρος σε ομαδοποιημένα δεδομένα μπορεί να διαφέρει από τα αντίστοιχα δεδομένα πριν αυτά ομαδοποιηθούν.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 + 1) + x + \sqrt{\alpha + 15}$, όπου α μια σταθερά με $\alpha \geq -15$.

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)$

Μονάδες 3

B. Να βρείτε:

α. την $f'(x)$.

Μονάδες 5

β. το $\lim_{x \rightarrow -1} \left[f'(x) \cdot \frac{x^2 + 1}{x^2 - x - 2} \right]$.

Μονάδες 5

Γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της $f(x)$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x$ είναι $y = x + \sqrt{\alpha + 15}$.

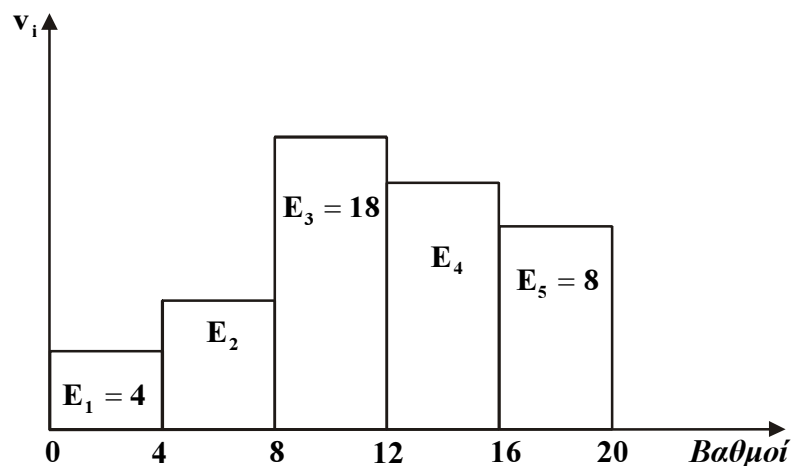
Μονάδες 6

Δ. Να βρείτε την τιμή του α αν η διάμεσος των τεταγμένων των σημείων της ευθείας (ε) τα οποία έχουν τετμημένες $0, 1, 9, 10$ είναι 50 .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3^ο

Το παρακάτω ιστόγραμμα συχνοτήτων δείχνει τις βαθμολογίες των μαθητών της Γ' Λυκείου ενός σχολείου, σε ένα διαγώνισμα. Μέσα στα ορθογώνια που έχουν βάση ίση με τη μονάδα δίνονται τα εμβαδά τριών από αυτά.



Αν $N_4 = 6v_2$ και το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι 50 , τότε:

A. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών.

Μονάδες 3

- B.** Να κατασκευάσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων, αθροιστικών συχνοτήτων και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

Μονάδες 10

- Γ.** Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή της Γ' Λυκείου του σχολείου να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων.

- α.** Ο βαθμός του γραπτού να είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 10 και μικρότερος του 17.

Μονάδες 6

- β.** Ο βαθμός του γραπτού να είναι κάτω από 10 ή τουλάχιστον 16.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω $\Omega = \{2, 3, 6, \kappa, \lambda, \mu\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και το ενδεχόμενο $A = \{\kappa, \lambda, \mu\}$, ώστε να ισχύουν: $P(A) = \frac{1}{2}$ και

$$2P(2) = \frac{P(3)}{3} = P(6) = P(\kappa) = \frac{P(\lambda)}{2}.$$

- A.** Να βρείτε τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω .

Μονάδες 5

- B.** Να βρείτε τα κ , λ , μ αν η συνάρτηση $f(x) = \frac{\lambda}{3}x^3 - 12x^2 + 20x + 2010$ έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(-1, f(-1))$ με συντελεστή 48 ενώ τα κ και μ είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της με κ μικρότερο του μ .

Μονάδες 4

- Γ.** Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{2x^2 - 32}{\sqrt{2x - 3} - \sqrt{5}}$.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού Δ της $g(x)$ και στη συνέχεια τα στοιχεία του ενδεχομένου B όταν: $B = \{x \in \Omega \text{ και } x \in \Delta\}$.

Μονάδες 4

- Δ.** Σε ένα δείγμα 160 παρατηρήσεων που ακολουθούν κανονική κατανομή οι 4 από αυτές είναι μεγαλύτερες από το 20 ενώ το εύρος R των παρατηρήσεων είναι ίσο με τα $\frac{3}{4}$ της μέσης τιμής \bar{x} .

Να βρείτε το ενδεχόμενο $\Gamma = \{c \in \Omega \text{ ώστε ο } c \text{ προστιθέμενος σε όλες τις παρατηρήσεις να γίνεται το δείγμα ομοιογενές}\}$.

Μονάδες 4

- E.** Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων $A \cap \Gamma$, $B - \Gamma$, $A \cup \Gamma$, $B \cup A'$.

Μονάδες 8



Γ' ΤΑΞΗ ΓΕΝ. ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδειχθεί ότι : $P(A') = 1 - P(A)$.

Μονάδες 8

A2. Αν x_1, x_2, \dots, x_k είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n , $k \leq n$ με αντίστοιχες συχνότητες v_1, v_2, \dots, v_k και α_i όπου $i=1,2,\dots,k$ το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων τότε :

- i. Να αναφέρετε για ποιά δεδομένα χρησιμοποιείται το κυκλικό διάγραμμα.
- ii. Με τι ισούται το τόξο α_i ;

Μονάδες 4

A3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x = x_0$ μέγιστο.

Μονάδες 2

β. Η παράγωγος της συνάρτησης f στο x_0 του πεδίου ορισμού της εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς το x , όταν $x = x_0$.

Μονάδες 2

γ. Στην κανονική κατανομή το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$, όπου \bar{x} είναι η μέση τιμή των παρατηρήσεων και s η τυπική τους απόκλιση.

Μονάδες 2

δ. Σε ένα δείγμα μεγέθους n ο λόγος $\frac{N_i}{F_i}$ είναι ίσος με v .

Μονάδες 2

ε. Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω , όταν $P(A) \leq P(B)$ τότε $A \subseteq B$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - \kappa x^2 + 4$, $x \in \mathbb{R}$ και $\kappa \in \mathbb{R}$. Αν $f'(-1) = -3f'(1)$, τότε :

B1. Να αποδείξετε ότι $\kappa=3$.

Μονάδες 6

B2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα της.

Μονάδες 7

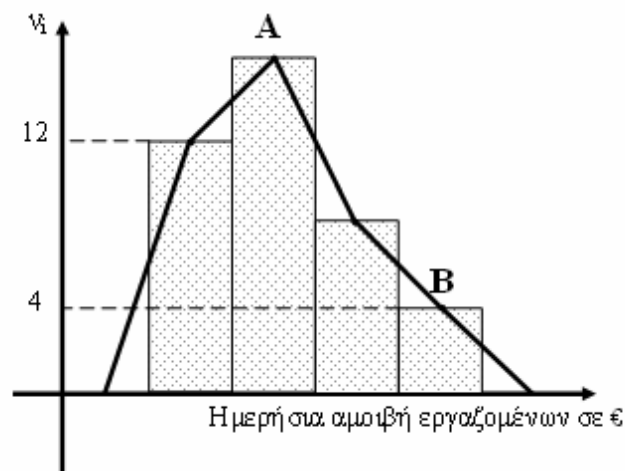
B3. Να βρείτε το όριο $L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - 4}{h}$ και την εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης f στο σημείο $(3, f(3))$.

Μονάδες 7

B4. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f , στην τετμημένη του οποίου ο ρυθμός μεταβολής του $y=f(x)$ ως προς x , έχει την ελάχιστη τιμή.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ



Στο παραπάνω σχήμα δίνεται το ιστόγραμμα συχνοτήτων σε ευρώ (€) και το πολύγωνο συχνοτήτων της ημερήσιας αμοιβής 40 εργαζομένων μιας επιχείρησης. Τα δεδομένα έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους. Η τετμημένη του σημείου A είναι 35, του σημείου B είναι 55 και η μέση ημερήσια αμοιβή των εργαζομένων είναι $\bar{x} = 36$ €.

Γ1. Να δείξετε ότι το πλάτος των κλάσεων είναι $c = 10$ και να γράψετε τις κλάσεις.

Μονάδες 5

Γ2. Να δείξετε ότι οι συχνότητες v_2, v_3 της δεύτερης και της τρίτης κλάσης αντίστοιχα είναι $v_2 = 16, v_3 = 8$.

Μονάδες 6

Γ3. Να κάνετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων, σχετικών συχνοτήτων, σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων της ημερήσιας αμοιβής των εργαζομένων της επιχείρησης, το πολύγωνο σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων και να εκτιμήσετε τη διάμεσο.

Μονάδες 9

Γ4. Έστω Ω ο δειγματικός χώρος των εργαζομένων της επιχείρησης και A, B δύο ενδεχόμενα του Ω τέτοια ώστε $P(A') \leq 0,25$ και $P(B') \leq 0,65$.

Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{P(A - B) + P(B - A)}{2} \geq 0,55 - P(A \cap B)$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω X μια ποσοτική μεταβλητή ως προς την οποία εξετάζουμε ένα δείγμα μεγέθους n και x_1, x_2, \dots, x_n οι παρατηρήσεις που έχουν μέση τιμή \bar{x} , τυπική απόκλιση s , συντελεστή μεταβλητότητας $CV = 25\%$ και διάμεσο δ .

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 4x^3 - (\bar{x} + 2s)x^2 + \left(\frac{503}{CV} + s\right)$, $x \in \mathbb{R}$. Αν η f στο

σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$ έχει εφαπτόμενη παράλληλη στον άξονα $x'x$ τότε :

Δ1. Να δείξετε ότι $\bar{x} = 4, s = 1$ και να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα.

Μονάδες 7

Δ2. Να βρείτε τον μικρότερο θετικό αριθμό c κατά τον οποίο πρέπει να αυξηθούν οι τιμές των παρατηρήσεων ώστε το δείγμα να είναι ομοιογενές.

Μονάδες 5

Δ3. Υποθέτουμε ότι η παραπάνω κατανομή είναι κανονική ή περίπου κανονική. Θεωρούμε δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω με πιθανότητες

$$P(A) = \frac{2s}{\bar{x}} \text{ και } P(B) = \frac{1}{2\delta - 5s}.$$

i. Αν $P(A \cap B) \cdot P(A \cup B) = \frac{1}{9}$ να βρείτε τις πιθανότητες:

$$P(A \cap B), P(A \cup B) \text{ και } P(A \cup B').$$

Μονάδες 9

ii. Αν το πλήθος των παρατηρήσεων x_i , με $x_i \leq 2$ είναι 5 τότε να βρείτε το μέγεθος του δείγματος.

Μονάδες 4

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
/ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 1 Απριλίου 2012

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(9 μονάδες)

A2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 \in A$;

(3 μονάδες)

A3. Τι μας δίνουν τα μέτρα θέσης και τί τα μέτρα διασποράς ή μεταβλητότητας μιας κατανομής ενός συνόλου δεδομένων;

(3 μονάδες)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η αθροιστική συχνότητα N_i μιας τιμής x_i εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες της τιμής x_i .

β) Αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η συνάρτηση $f(x)$ δεν παρουσιάζει ακρότατα.

γ) Σε μια κανονική κατανομή το 0,3% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται εκτός του διαστήματος $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$.

δ) Αν η διάμεσος v παρατηρήσεων είναι ίση με μία από αυτές τότε είναι βέβαιο ότι το πλήθος v των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός.

ε) Αν A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τότε οι εκφράσεις «Δεν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα ενδεχόμενα A και B » και «Πραγματοποιείται μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A και B » είναι ισοδύναμες.

(2X5 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Εξετάζουμε ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα συνταξιούχων ως προς το ποσό της μηνιαίας συνολικής σύνταξης που λαμβάνουν σε εκατοντάδες ευρώ. Για την κατανομή τους έχουν δημιουργηθεί 5 ισοπλατείς κλάσεις και γνωρίζουμε ότι:

- το εμβαδόν του πολυγώνου συχνοτήτων v_i είναι 250.
- το μέσο της άνω βάσης του ορθογωνίου του ιστογράμματος σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$, που αντιστοιχεί στη 2^η κλάση είναι το σημείο $A(10, \alpha)$.
- Το εύρος των παρατηρήσεων είναι 20.
- Η συχνότητα $f_1\%$ είναι τριπλάσια της $f_2\%$ και δεκαπλάσια της $f_4\%$, ενώ η $f_2\%$ είναι διπλάσια της $f_3\%$ και πενταπλάσια της $f_5\%$.

B1. Να δείξετε ότι $\alpha=20$ και να συμπληρωθεί ο πίνακας κατανομής όλων των συχνοτήτων.

(8 μονάδες)

B2. Να υπολογιστεί η μέση τιμή, καθώς και η διάμεσος των συντάξεων. Τί είδους ασυμμετρία έχει η κατανομή;

(6 μονάδες)

B3. Αν η κυβέρνηση αποφασίσει μείωση των συντάξεων που υπερβαίνουν τα 1300 ευρώ, βρείτε το ποσοστό των θιγόμενων συνταξιούχων καθώς και να εκτιμήσετε το πλήθος τους αν γνωρίζουμε ότι ο συνολικός αριθμός συνταξιούχων της χώρας είναι 2.850.000.

(5 μονάδες)

B4. Αν δοθεί επίδομα στους έχοντες συνολικό ετήσιο εισόδημα (από συντάξεις 12 μηνών) μικρότερο ή ίσο των 8.640 ευρώ τότε:

i. Επιλέγοντας τυχαία από το δείγμα έναν συνταξιούχο, να βρεθεί η πιθανότητα να λάβει το επίδομα.

(3 μονάδες)

ii. Αν το επίδομα δοθεί από τα χρήματα, που θα εξοικονομήσουν τα ταμεία αφαιρώντας 100 ευρώ από κάθε συνταξιούχο της 3^{ης} κλάσης, 200 ευρώ από κάθε συνταξιούχο της 4^{ης} και 400 ευρώ από καθέναν της 5^{ης} κλάσης και τα οποία μοιραστούν εξίσου στους δικαιούχους, τότε να βρεθεί το ποσό που αναμένεται να λάβει ανά μήνα ο κάθε δικαιούχος.

(3 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{3\sqrt{x}-6}{x-4}$ και $g(x) = 2P(B) \cdot \ln x + \sqrt{x} + \frac{1}{16}x^2$ και τα A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω .

Γ1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$. (4 μονάδες)

Γ2. Αν η πιθανότητα $P(A)$ του ενδεχομένου A του δειγματικού χώρου Ω είναι ίση με το $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $g(x)$ στο $x_0=4$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{4}$, τότε να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$. (8 μονάδες)

Γ3. Αν $P(A) = \frac{3}{4}$ και $P(B) = \frac{1}{2}$ και $P(A \cap B) \in \left\{ \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6} \right\}$ τότε:

α) Να δείξετε ότι $P(A \cap B) = \frac{2}{5}$. (5 μονάδες)

β) Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το A ή να μην πραγματοποιηθεί το B. (4 μονάδες)

γ) Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A και B. (4 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (6 μονάδες)

Δ2. Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης, που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και A, B δύο ενδεχόμενα για τα οποία ισχύει:

$$f(P(B)) = P(A), \text{ όπου } f(x) \text{ η προηγούμενη συνάρτηση.}$$

i. Να αποδείξετε ότι το A είναι βέβαιο ενδεχόμενο και το B είναι αδύνατο ενδεχόμενο. (7 μονάδες)

- ii. Δίνεται ο παρακάτω πίνακας απόλυτων συχνοτήτων v_i και τα ενδεχόμενα Γ, Δ του ίδιου δειγματικού χώρου Ω , διαφορετικά των A και B με $\Gamma \subseteq \Delta$ και $\Gamma \neq \Delta$.

x_i	v_i
1	$2P(\Gamma)$
2	$4P(\Delta)$
3	$4P(\Gamma)+4P(\Delta)$
4	$P(A)$
Σύνολα	

- α) Να αποδείξετε ότι $v_1=1$ και $v_2=3$ και να συμπληρωθεί ο πίνακας.
(6 μονάδες)
- β) Να υπολογιστεί η διάμεσος των παρατηρήσεων.
(3 μονάδες)
- γ) Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:
 $P(\Gamma \cap \Delta), P(\Gamma \cup \Delta)$.
(3 μονάδες)

ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
/ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 7 Απριλίου 2013

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A.1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^2$ είναι $f'(x) = (x^2)' = 2x$, για κάθε $x \in \mathcal{R}$.

(7 μονάδες)

A.2. Να ορίσετε το **σταθμισμένο αριθμητικό μέσο** ή **σταθμικό μέσο** για τις τιμές x_1, x_2, \dots, x_n ενός συνόλου δεδομένων που έχουν διαφορετική βαρύτητα και η οποία εκφράζεται με τους λεγόμενους συντελεστές βαρύτητας w_1, w_2, \dots, w_n .

(4 μονάδες)

A.3. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής;

(4 μονάδες)

A.4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο A και $g(x) \neq 0$ για

κάθε $x \in A$ τότε ισχύει ότι: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$, για κάθε $x \in A$

β) Ο συντελεστής μεταβλητότητας CV παριστάνει ένα μέτρο απόλυτης διασποράς και όχι ένα μέτρο σχετικής διασποράς.

γ) Η διάμεσος δ ενός δείγματος n παρατηρήσεων είναι πάντα μία από τις παρατηρήσεις.

δ) Το ενδεχόμενο «**Διαφορά του B από το A**» πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το **A** αλλά όχι το **B**.

ε) Δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα.

(2X5 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Ο χρόνος αναμονής σε min των μαθητών ενός σχολείου στη στάση του λεωφορείου έχει ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους. Το εύρος είναι $R = 20$ min, η κεντρική τιμή της τρίτης κλάσης είναι 10min, 3 μαθητές περιμένουν λιγότερο από 4min, 20 μαθητές λιγότερο από 12min, το 84% περιμένουν χρόνο λιγότερο από 16min, $N_5 = 50$ και $F_2 = 0,2$.

B.1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος c της κάθε κλάσης είναι 4 και να μεταφέρετε στο τετράδιο σας σωστά συμπληρωμένο τον παρακάτω πίνακα

χρόνος σε min	x_i	v_i	N_i	f_i	F_i	$F_i \%$
[...,...)						
[...,...)						
[...,...)						
[...,...)						
[...,...)						
Σύνολο						

(8 μονάδες)

B.2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διασπορά και τη διάμεσο του χρόνου αναμονής των μαθητών του δείγματος

(7 μονάδες)

B.3. Θεωρούμε ότι όλοι οι χρόνοι των μαθητών είναι ομοιόμορφα κατανομημένοι σε κάθε μία από τις παραπάνω κλάσεις. Επιλέγουμε έναν μαθητή στην τύχη και θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A: ο χρόνος αναμονής του μαθητή είναι μικρότερος από 10 min

B: ο χρόνος αναμονής του μαθητή είναι τουλάχιστον 8 min και λιγότερος από 17 min

α) Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$

(5 μονάδες)

β) Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A \cup B)$, $P(A - B)$, $P((A \cup B) - A)$.

(5 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε μια μεταβλητή X η οποία μετράει σε $mmHg$ τη συστολική πίεση ενός δείγματος A n ατόμων μιας πόλης και η οποία ακολουθεί περίπου την κανονική κατανομή. Δίνεται ότι η διάμεσος δ της κατανομής είναι $\delta = 13 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5x - 5}{2\sqrt{x + 3} - 4} \right)$ σε $mmHg$ και ότι το 84% του δείγματος έχει συστολική πίεση μεγαλύτερη από 125 $mmHg$.

Γ.1. Να βρείτε τη μέση τιμή \bar{x}_A , την τυπική απόκλιση s_A του δείγματος A και να εξετάσετε αν το δείγμα A είναι ομοιογενές.

(8 μονάδες)

Γ.2. Έστω ότι για το δείγμα A ισχύει ότι $\bar{x}_A = 130 mmHg$ και $s_A = 5 mmHg$. Ένα δεύτερο δείγμα B , επίσης n ατόμων, παρουσιάζει συστολική πίεση $y_i = x_i + 10 mmHg$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, όπου x_i η συστολική πίεση των ατόμων του δείγματος A .

α) Να βρείτε τη μέση τιμή \bar{y}_B , την τυπική απόκλιση s_B και να συγκρίνετε ως προς την ομοιογένεια τα δύο δείγματα.

(7 μονάδες)

β) Αν επιπλέον το πλήθος των ατόμων του δείγματος A , των οποίων η συστολική πίεση παίρνει τιμές στο διάστημα $(\bar{x}_A + s_A, \bar{x}_A + 2s_A)$, είναι 540,

i. να βρείτε το μέγεθος n του δείγματος A .

(5 μονάδες)

ii. Να βρείτε πόσα συνολικά άτομα και από τα δύο δείγματα έχουν συστολική πίεση κάτω από 135 $mmHg$.

(5 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{ax^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$, με $a > 0$, και η εφαπτομένη

(ε): $y = -\frac{1}{2}x + \beta$ στο σημείο $A(1, f(1))$ της γραφικής της παράστασης.

Δ.1. α) Να δείξετε ότι $\alpha = \beta = 1$.

(5 μονάδες)

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(5 μονάδες)

Δ.2. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A, B, Γ , ενός δειγματικού χώρου Ω , που οι πιθανότητες των ενδεχομένων του δίνονται από τις τεταγμένες y , σημείων (x, y) της εφαπτομένης (ε) .

α) Για τις τετμημένες x των παραπάνω σημείων (x, y) , να αποδείξετε ότι $0 \leq x \leq 2$.

(2 μονάδες)

β) Έστω τα σημεία $K\left(\frac{2}{5}, y_1\right), M\left(\frac{4}{5}, y_2\right), N\left(\frac{7}{5}, y_3\right)$ της εφαπτομένης (ε) . Αν οι πιθανότητες των ενδεχομένων $(A \cap B)'$, $A \cup B$ και A είναι διαφορετικές ανά δύο και στοιχεία του συνόλου $\{y_1, y_2, y_3\}$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $P(A) = \frac{3}{10}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$

(5 μονάδες)

ii. Να αποδείξετε ότι $f(P(A \cap B')) > f(P(A - B'))$

(4 μονάδες)

iii. Αν $P(\Gamma) = \frac{3}{10}$ να αποδείξετε ότι $\frac{1}{5} \leq P(B - \Gamma) \leq \frac{1}{2}$

(4 μονάδες)

Σας ευχόμαστε Επιτυχία.

Σήμερα και στις Πανελλήνιες Εξετάσεις



Γενικό Λύκειο Νεστορίου
Σχολικό έτος 2013-2014
Βοηθητικό Υλικό της Γ' Λυκείου