ΘΕΩΡΙΑ

ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ C ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ

Γνωρίζουμε ότι η δευτεροβάθμια εξίσωση με αρνητική διακρίνουσα δεν έχει λύση στο σύνολο $\Re$ των πραγματικών αριθμών. Ειδικότερα η εξίσωση $x^2=-1$ δεν έχει λύση στο σύνολο $\Re$ των πραγματικών αριθμών, αφού το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού είναι μη αρνητικός αριθμός. Για να ξεπεράσουμε την “αδυναμία” αυτή, διευρύνουμε το σύνολο $\Re$ σε ένα σύνολο C**,** το οποίο να έχει τις ίδιες πράξεις με το $\Re$, τις ίδιες ιδιότητες των πράξεων αυτών και στο οποίο να υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $x^2=-1$, δηλαδή ένα στοιχείο i, τέτοιο, ώστε $\boldsymbol{i}^2=-1$. Σύμφωνα με τις παραδοχές αυτές το διευρυμένο σύνολο C θα έχει ως στοιχεία:

- Όλους τους πραγματικούς αριθμούς
- Όλα τα στοιχεία της μορφής βi, που είναι γινόμενα των στοιχείων του $\Re$ με το i, δηλαδή τους φανταστικούς αριθμούς , το σύνολο των οποίων θα συμβολίζουμε με Ι, δηλ. Ι={βi/β$\in\Re$}, και
- Όλα τα αθροίσματα της μορφής $\alpha+\beta i$, με α και β, πραγματικούς αριθμούς.

Τα στοιχεία του C λέγονται **μιγαδικοί αριθμοί** και το C **σύνολο των μιγαδικών αριθμών**. Επομένως:

> Το σύνολο C των μιγαδικών αριθμών είναι ένα υπερσύνολο του συνόλου $\Re$ των πραγματικών αριθμών, στο οποίο:
>
> - Επεκτείνονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού έτσι, ώστε να έχουν τις ίδιες ιδιότητες όπως και στο $\Re$, με το μηδέν (0) να είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης και το ένα (1) το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού,
> - Υπάρχει ένα στοιχείο $\boldsymbol{i}$ τέτοιο, ώστε $\boldsymbol{i}^2=-1$,
> - Κάθε στοιχείο z του C γράφεται κατά μοναδικό τρόπο με τη μορφή $z=\alpha+\beta i$, όπου $\alpha,\beta\in\Re$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- ❖ Κάθε αριθμός της μορφής $\alpha+\beta i,\alpha,\beta\in\Re$ λέγεται **μιγαδικός αριθμός**.
- ❖ Η μορφή α+βi ενός μιγαδικού αριθμού z λέγεται **κανονική μορφή** του z.

- Κάθε μιγαδικός αριθμός z=α+βi είναι άθροισμα δυο αριθμόν του πραγματικού α και του φανταστικού βi.
- Ο α λέγεται **πραγματικό μέρος** του z και σημειώνεται $\mathrm{Re}(z)$, ενώ ο β (*και όχι ο βi*) λέγεται **φανταστικό μέρος** του z και σημειώνεται $\mathrm{Im}(z)$.
- Κάθε πραγματικός αριθμός α γράφεται σε κανονική μορφή ως α+0i.
- Κάθε φανταστικός αριθμός βi γράφεται σε κανονική μορφή ως 0+βi.
- Ένας μιγαδικός αριθμός z=α+βi, με α,β≠0 λέγεται καθαρά μιγαδικός αριθμός.
- Ο αριθμός 0 είναι και φανταστικός αφού 0=0i αλλά και μιγαδικός με κανονική μορφή 0+0i.
- Στη συνέχεια, όταν λέμε ο μιγαδικός z=α+βi, εννοούμε ότι οι α και β είναι πραγματικοί αριθμοί και το γεγονός αυτό δε θα τονίζεται ιδιαίτερα.
- Ένας μιγαδικός αριθμός $z \in \Re \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z)=0$
- Ένας μιγαδικός αριθμός $z \in I \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=0$

Προσοχή!!!! Οι δύο παραπάνω ισοδυναμίες είναι πάρα πολύ χρήσιμες για τις ασκήσεις!!!!

ΙΣΟΤΗΤΑ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

- Επειδή κάθε μιγαδικός αριθμός z γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή α+βi, δύο μιγαδικοί αριθμοί $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι ίσοι, αν και μόνο αν $\alpha=\gamma$ και $\beta=\delta$. Δηλαδή ισχύει:

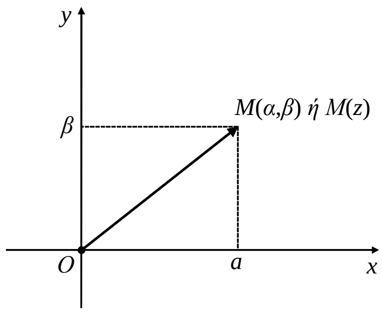
$$\boxed{\alpha+\beta i=\gamma+\delta i \Leftrightarrow \alpha=\gamma \text{ και } \beta=\delta.}$$

- Επομένως, επειδή $0=0+0i$, έχουμε

$$\boxed{\alpha+\beta i=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \text{ και } \beta=0.}$$

- Στην επέκταση, όμως, από το $\Re$ στο C ενώ οι πράξεις και οι ιδιότητες αυτών που ισχύουν στο $\Re$ εξακολουθούν να ισχύουν και στο C , εν τούτοις η ***διάταξη και οι ιδιότητές της δε μεταφέρονται.***

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ



- ❖ Κάθε μιγαδικό αριθμό z=$\alpha+\beta i$ μπορούμε να τον αντιστοιχίσουμε στο σημείο $M(\alpha,\beta)$ ενός καρτεσιανού επιπέδου.
- ❖ Αλλά και *αντιστρόφως*, κάθε σημείο $M(\alpha,\beta)$ του καρτεσιανού αυτού επιπέδου μπορούμε να το αντιστοιχίσουμε στο μιγαδικό $\alpha+\beta i$.
- ❖ Το σημείο $M(\alpha,\beta)$ λέγεται **εικόνα** του μιγαδικού z=$\alpha+\beta i$, και το συμβολίζουμε με $M(z)$.
- ❖ Ένα καρτεσιανό επίπεδο του οποίου τα σημεία είναι εικόνες μιγαδικών αριθμών θα αναφέρεται ως **μιγαδικό επίπεδο**.
- ❖ Ο άξονας $x'x$ λέγεται **πραγματικός άξονας**, αφού ανήκουν σε αυτόν τα σημεία $M(\alpha,0)$ που είναι εικόνες των πραγματικών αριθμών $\alpha=\alpha+0i$.
- ❖ Ο άξονας $y'y$ λέγεται **φανταστικός** άξονας, αφού ανήκουν σε αυτόν τα σημεία $M(0,\beta)$ που είναι εικόνες των φανταστικών $\beta i=0+\beta i$.
- ❖ Ένας μιγαδικός $z=\alpha+\beta i$ παριστάνεται επίσης και με τη διανυσματική ακτίνα, $\overrightarrow{OM}$, του σημείου $M(\alpha,\beta)$.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ(+,-,·,÷)

Σύμφωνα με τον ορισμό του C η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός δύο μιγαδικών αριθμών γίνονται όπως ακριβώς και οι αντίστοιχες πράξεις με διώνυμα $\alpha+\beta x$ στο $\Re$όπου βέβαια αντί για x έχουμε i. Έτσι:

- ❖ Για την **πρόσθεση** δύο μιγαδικών αριθμών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$έχουμε: $\boldsymbol{(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i}$.
- ❖ Για την **αφαίρεση** του μιγαδικού αριθμού $\gamma+\delta i$ από τον $\alpha+\beta i$, επειδή ο αντίθετος του μιγαδικού $\gamma+\delta i$ είναι ο μιγαδικός $-\gamma-\delta i$, έχουμε:
  $(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha+\beta i)+(-\gamma-\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i$.
  Δηλαδή: $\boldsymbol{(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i}$.

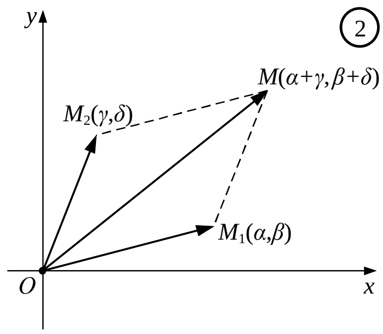
Δηλαδή: z+w=Re(z+w)+Im(z+w)i
με: Re(z+w)=Re(z)+Re(w) και : Im(z+w)=Im(z)+Im(w)
Και: z-w=Re(z-w)+Im(z-w)i
με: Re(z-w)=Re(z)-Re(w) και : Im(z-w)=Im(z)-Im(w)

Γραφική παράσταση πρόσθεσης:

Αν $M_1(\alpha,\beta)$ και $M_2(\gamma,\delta)$ είναι οι εικόνες των $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο, τότε το άθροισμα

$(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$

παριστάνεται με το σημείο $M(\alpha+\gamma,\beta+\delta)$.



Επομένως, $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$, δηλαδή:

"Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους".

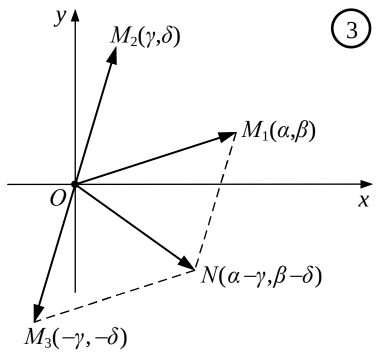
Γραφική παράσταση διαφοράς:

Επίσης, η διαφορά

$(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i$

παριστάνεται με το σημείο $N(\alpha-\gamma,\beta-\delta)$.

Επομένως, $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}$, δηλαδή:



"Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους".

- Για τον **πολλαπλασιασμό** δύο μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ έχουμε:

  $(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=\alpha(\gamma+\delta i)+\beta i(\gamma+\delta i)=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i+(\beta i)(\delta i)=$

  $=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i+\beta\delta i^2=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i-\beta\delta=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i$

  Δηλαδή: $\boldsymbol{(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i}$.

- Ειδικότερα, έχουμε: $(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)=\alpha^2+\beta^2$. Ο αριθμός $\alpha-\beta i$ λέγεται **συζυγής** του $\alpha+\beta i$ και συμβολίζεται με $\overline{\alpha+\beta i}$.

  Δηλαδή: $\overline{\alpha+\beta i}=\alpha-\beta i$.

  Επειδή είναι και $\overline{\alpha-\beta i}=\alpha+\beta i$, οι $\alpha+\beta i$, $\alpha-\beta i$ λέγονται **συζυγείς μιγαδικοί**.

- Τέλος, για να εκφράσουμε το **πηλίκο** $\dfrac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$, όπου $\gamma+\delta i\neq 0$, στη μορφή $\kappa+\lambda i$, πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με το συζυγή του παρονομαστή και έχουμε:

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)}=\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\beta\gamma-\alpha\delta)i}{\gamma^2+\delta^2}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i$$

Δηλαδή, $\dfrac{\alpha+\beta \boldsymbol{i}}{\gamma+\delta \boldsymbol{i}}=\dfrac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\dfrac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}\boldsymbol{i}$.

ΔΥΝΑΜΗ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Οι δυνάμεις ενός μιγαδικού z με εκθέτη ακέραιο ορίζονται όπως ακριβώς οι δυνάμεις των πραγματικών.
Δηλαδή:

- $z^0=1, \mu\varepsilon\ z\neq 0$
- $z^1=z$
- $z^2=z\cdot z$,
- $z^\nu=\underbrace{z\cdot z\ldots\ldots\cdot z}_{\nu-\varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}$
- $z^{-\nu}=\dfrac{1}{z^\nu}$, όπου ν ∈N* ,z≠0.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Παρότι οι δυνάμεις με ακέραιο εκθέτη στους μιγαδικούς αριθμούς ορίζονται όπως ακριβώς ορίζονται και στους πραγματικούς , η αλήθεια είναι ότι με την κανονική μορφή ενός μιγαδικού πολύ λίγες περιπτώσεις μιγαδικών υψωμένων σε δύναμη μπορούμε να υπολογίσουμε <u>(χρειάζεται να ξέρουμε την τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού που όμως είναι εκτός ύλης για τις εξετάσεις).</u>

Για τον λόγο που αναφέραμε παραπάνω θα δώσουμε θεωρητικά μερικές περιπτώσεις μιγαδικών που μπορούμε να βρούμε τη δύναμή τους.

- Για τις δυνάμεις του i έχουμε: $\boldsymbol{i^0=1}$, $\boldsymbol{i^1=i}$, $\boldsymbol{i^2=-1}$, $\boldsymbol{i^3=i^2 i=-i}$. Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι είναι:
  $i^4=i^2i^2=1,\ i^5=i^4i=1\cdot i=i,\ i^6=i^4i^2=1\cdot i^2=-1,\ i^7=i^4i^3=1\cdot i^3=-i$
  δηλαδή, μετά το i^4 οι τιμές του i^ν επαναλαμβάνονται.
  Άρα, για να υπολογίσουμε συγκεκριμένη δύναμη του i, γράφουμε τον εκθέτη ν στη μορφή $\nu=4\rho+\upsilon$, όπου ρ το πηλίκο και υ το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του ν με το 4, οπότε έχουμε:

$$i^{\nu}=i^{4\rho+\upsilon}=i^{4\rho}i^{\upsilon}=(i^4)^{\rho}i^{\upsilon}=1^{\rho}i^{\upsilon}=i^{\upsilon}=\begin{cases}1 & , \text{ αν } \upsilon=0\\ i & , \text{ αν } \upsilon=1\\ -1 & , \text{ αν } \upsilon=2\\ -i & , \text{ αν } \upsilon=3\end{cases}$$

- ❖ Για κάθε φανταστικό αριθμό z=βi μπορούμε να βρούμε οποιαδήποτε δύναμή του αφού $(\beta\cdot i)^{\kappa}=\beta^{\kappa}\cdot i^{\kappa}$.
- ❖ Για τις δυνάμεις z^2, z^3, z^4, z^6 ,μπορούμε να τις υπολογίσουμε (θεωρητικά εύκολα αλλά πρακτικά με πολλές πράξεις) για κάθε μιγαδικό αριθμό z=α+βi, χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες : $(x\pm y)^2=x^2\pm 2xy+y^2$, $(x\pm y)^3=x^3\pm 3x^2y+3xy^2-y^3$, και την παρατήρηση ότι : $x^4=(x^2)^2$ και $x^6=(x^2)^3$.
- ❖ Μπορούμε να υπολογίσουμε δυνάμεις μιγαδικών που είναι υψωμένοι σε άρτιο εκθέτη και ισχύει Re(z)=±Im(z).

  Για παράδειγμα : $(\alpha+\alpha i)^{2\nu}$ αφού $(\alpha+\alpha i)^{2\nu}=\left((\alpha+\alpha i)^2\right)^{\nu}=$

  $\left(\alpha^2+2\alpha\cdot\alpha i+(\alpha i)^2\right)^{\nu}=\left(\alpha^2+2\alpha^2 i-\alpha^2\right)^{\nu}=\left(2\alpha^2 i\right)^{\nu}=\left(2\alpha^2\right)^{\nu}\cdot i^{\nu}$.

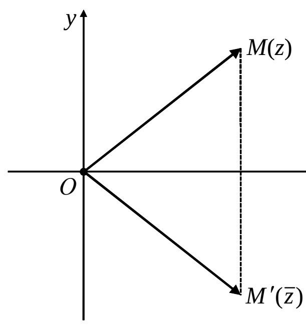
ΣΥΖΥΓΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ : ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Επειδή οι συζυγείς μιγαδικοί, όπως θα δούμε στις επόμενες παραγράφους, μας διευκολύνουν στη μελέτη των μιγαδικών αριθμών, θα αναφερθούμε ιδιαιτέρως σε αυτούς.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Για έναν μιγαδικό αριθμό z=α+βi ορίζουμε ως συζυγή του αριθμού z τον μιγαδικό $\overline{z}=\alpha-\beta i$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ



4

- ❖ Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες $M(\alpha,\beta)$ και $M'(\alpha,-\beta)$ δύο συζυγών μιγαδικών $z=\alpha+\beta i$ και $\overline{z}=\alpha-\beta i$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.
- ❖ Ισχύει: $\overline{(\overline{z})}=z$ (αφού $\overline{(\alpha-\beta i)}=\alpha+\beta i$ με εφαρμογή του ορισμού)
- ❖ Για δύο συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς $z=\alpha+\beta i$ και $\overline{z}=\alpha-\beta i$ ισχύει : $z+\overline{z}=\mathbf{2}\alpha$

$$z-\overline{z}=2\beta i.$$

Συνήθως στις ασκήσεις οι δυο πιο πάνω ιδιότητες θα χρησιμοποιούνται με τη μορφή:
$z+\overline{z}=2\operatorname{Re}(z)$, $z-\overline{z}=2\operatorname{Im}(z)\cdot i$,
και πιο σπάνια στη μορφή
$\operatorname{Re}(z)=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$, $\operatorname{Im}(z)=\dfrac{z-\overline{z}}{2\cdot i}$

❖ Αν $z_1=\alpha+\beta i$ και $z_2=\gamma+\delta i$ είναι δυο μιγαδικοί αριθμοί, τότε:

1. $\overline{z_1+z_2}=\overline{z}_1+\overline{z}_2$
2. $\overline{z_1-z_2}=\overline{z}_1-\overline{z}_2$
3. $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2$
4. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$.

Οι ιδιότητες αυτές μπορούν να αποδειχτούν με εκτέλεση των πράξεων. Για παράδειγμα έχουμε:
Απόδειξη της 1: $\overline{z_1+z_2}=\overline{(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)}=\overline{(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i}$
$=(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)i=(\alpha-\beta i)+(\gamma-\delta i)=\overline{z}_1+\overline{z}_2$.

5. $\overline{z_1+z_2+\cdots+z_\nu}=\overline{z}_1+\overline{z}_2+\cdots+\overline{z}_\nu$ (Γενίκευση της 1)

6. $\overline{z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_\nu}=\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2\cdot\ldots\cdot\overline{z}_\nu$. (Γενίκευση της 3)

7. $\overline{(z^\nu)}=(\overline{z})^\nu$ (αν είναι $z_1=z_2=\ldots=z_\nu=z$, και εφαρμόσουμε την ιδιότητα 6)

ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ: $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ με α,β,γ∈ℜ , α≠0.

Επειδή $i^2=-1$ και $(-i)^2=i^2=-1$,εύκολα, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι και κάθε εξίσωση δεύτερου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει πάντα λύση στο σύνολο **C**.
Πράγματι, έστω η εξίσωση $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$, με $\alpha,\beta,\gamma\in\Re$ και $\alpha\neq0$.
Εργαζόμαστε όπως στην αντίστοιχη περίπτωση στο $\Re$ και τη μετασχηματίζουμε, με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων, στη

μορφή: $\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\Delta}{4\alpha^2}$, όπου $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ η διακρίνουσα της εξίσωσης. Έτσι, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $\Delta>0$. Τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές λύσεις: $z_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- $\Delta=0$. Τότε έχει μια διπλή πραγματική λύση: $z=\frac{-\beta}{2\alpha}$
- $\Delta<0$. Τότε, επειδή $\frac{\Delta}{4\alpha^2}=\frac{(-1)(-\Delta)}{4\alpha^2}=\frac{i^2(\sqrt{-\Delta})^2}{(2\alpha)^2}=\left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2$,

  η εξίσωση γράφεται: $\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2$.

  Άρα οι λύσεις της είναι: $z_{1,2}=\frac{-\beta\pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$, <u>οι οποίες είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί.</u>

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ</u>

❖ Παρατηρούμε ότι και εδώ ισχύουν οι σχέσεις:

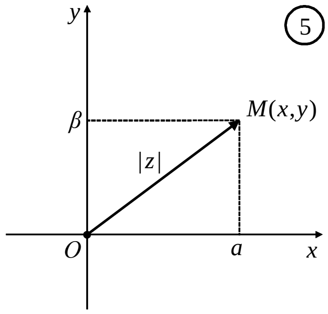
$z_1+z_2=\frac{-\beta}{\alpha}$ και $z_1\cdot z_2=\frac{\gamma}{\alpha}$ Τύποι του Vieta.

Χρησιμοποιούνται συνήθως όταν σε μια 2ου βαθμού εξίσωση με πραγματικούς συντελεστές ξέρουμε μια μιγαδική λύση και έχουμε άγνωστο συντελεστή στην εξίσωση!

❖ Προσοχή!!!! Αν σε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού έχουμε μιγαδικούς συντελεστές (έστω κι έναν) ή το συζυγή του άγνωστου μιγαδικού δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ούτε τη διακρίνουσα ούτε τους τύπους του Vieta. Τότε καταφεύγουμε στην παλιά καλή συνταγή της αντικατάστασης του άγνωστου μιγαδικού με x+yi.

ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

5



Έστω $M(x,y)$ η εικόνα του μιγαδικού $z=x+yi$ στο μιγαδικό επίπεδο. Ορίζουμε ως **μέτρο** του z την απόσταση του M από την αρχή O, δηλαδή

$$\boxed{|z|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2}}$$

Όταν ο μιγαδικός z είναι της πραγματικός, δηλαδή της μορφής $z=x+0i=x\in\Re$, τότε $|z|=\sqrt{x^2+0^2}=|x|$, που είναι η γνωστή μας απόλυτη τιμή του πραγματικού αριθμού x.

Αν $z=x+yi$, τότε $\overline{z}=x-yi$, $-z=-x-yi$ και $-\overline{z}=-x+yi$, και άρα $|z|=|-z|=|\overline{z}|=|-\overline{z}|$, και $|z|^2=x^2+y^2$ επίσης $z\cdot\overline{z}=x^2+y^2$ άρα $|z|^2=z\overline{z}$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

❖ Δύο προφανείς ιδιότητες από τα παραπάνω είναι:

- $|z|=|\overline{z}|=|-z|=|-\overline{z}|$
- $|z|^2=z\cdot\overline{z}$

Δύο πολύ σημαντικές ιδιότητες για τις ασκήσεις παρακάτω, ειδικά για δύσκολα θέματα!!!!!

❖ Οι επόμενες ιδιότητες αναφέρονται στις σχέσεις που συνδέουν το γινόμενο και το πηλίκο μιγαδικών με τα μέτρα τους και είναι ίδιες με τις αντίστοιχες ιδιότητες των απόλυτων τιμών πραγματικών αριθμών.
Αν z_1,z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε

- $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$
- $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

Απόδειξη:

Πράγματι, έχουμε: $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|\Leftrightarrow|z_1\cdot z_2|^2=|z_1|^2\cdot|z_2|^2$

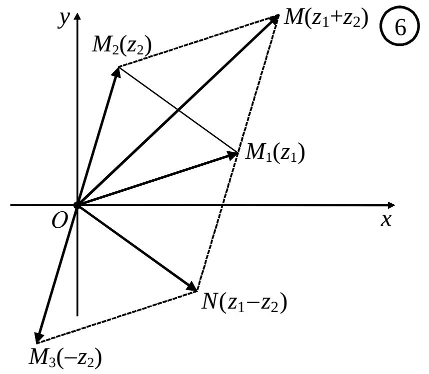
$$\Leftrightarrow (z_1\cdot z_2)(\overline{z_1\cdot z_2})=z_1\cdot\overline{z}_1\cdot z_2\cdot\overline{z}_2 \Leftrightarrow z_1\cdot z_2\cdot\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2=z_1\cdot\overline{z}_1\cdot z_2\cdot\overline{z}_2$$

και, επειδή η τελευταία ισότητα ισχύει, θα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική.

Ανάλογα αποδεικνύεται και η δεύτερη ιδιότητα.
Γενικά, αποδεικνύεται ότι :

- $|z_1 z_2 ... z_\nu| = |z_1||z_2|...|z_\nu|$ και
- $|z^\nu| = |z|^\nu$

❖ Από τη γνωστή μας τριγωνική ανισότητα και από τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος $z_1 + z_2$ και της διαφοράς $z_1 - z_2$ δύο μιγαδικών προκύπτει ότι:

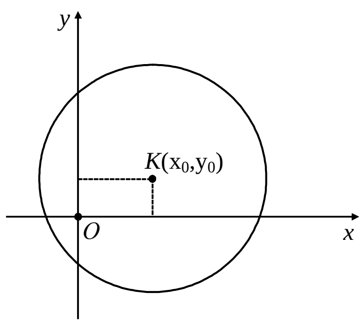


$$\boxed{||z_1| - |z_2|| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|}$$

αλλά και ότι

$$\boxed{||z_1| - |z_2|| \le |z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|}$$

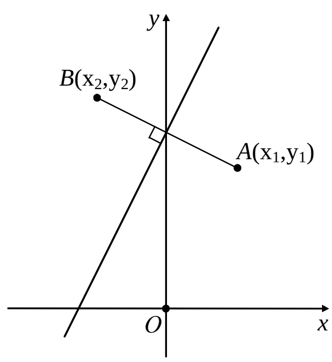
❖ Επίσης, είναι φανερό ότι το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{ON}$ είναι ίσο με το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{M_2M_1}$. Επομένως:
“Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους”. Δηλαδή: $\boxed{(M_1M_2) = |z_1 - z_2|}$



❖ Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, με ρ>0 και $z_0 = x_0 + y_0 i$ παριστάνει τον **κύκλο** με κέντρο το σημείο $\mathrm{K}(z_0)$ και ακτίνα ρ.

❖ Ειδικά η εξίσωση $|z| = \rho$, με ρ>0 παριστάνει **κύκλο** με κέντρο την αρχή των αξόνων O(0,0) και ακτίνα ρ.

❖ Η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$, όπου $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$, παριστάνει τη **μεσοκάθετο** του τμήματος με άκρα τα σημεία $\mathrm{A}(z_1)$ και $\mathrm{B}(z_2)$.



ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- $z \in \Re \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0$, $z \in I \Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0$

  Απόδειξη: $z = \overline{z} \Leftrightarrow \alpha + \beta i = \alpha - \beta i \Leftrightarrow 2\beta i = 0 \Leftrightarrow \beta = 0 \Leftrightarrow z \in \Re$
- $z \in \Re \Leftrightarrow \overline{z} = z$, $z \in I \Leftrightarrow \overline{z} = -z$

  Απόδειξη:

  $z = -\overline{z} \Leftrightarrow \alpha + \beta i = -\alpha + \beta i \Leftrightarrow 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow z \in \mathrm{I}$

  (τις δυο παραπάνω σχέσεις όταν τις χρησιμοποιούμε πρέπει να αποδεικνύονται)
- $|z| = \rho > 0 \Leftrightarrow z\overline{z} = \rho^2 \Leftrightarrow \overline{z} = \dfrac{\rho^2}{z}$
- Αν $z_1, z_2 \in C$ και ισχύει $f(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow f(\overline{z}_1, \overline{z}_2) = 0$,
- Αν $z_1, z_2 \in C$ και ισχύει $|f(z_1, z_2)| = |f(\overline{z}_1, \overline{z}_2)|$
- $|f(z)| = |g(z)| \Leftrightarrow |f(z)|^2 = |g(z)|^2 \Leftrightarrow f(z) f(\overline{z}) = g(z) g(\overline{z})$
- $z^v = z_0 \Leftrightarrow |z^v| = |z_0| \Leftrightarrow |z| = \sqrt[v]{|z_0|}$

ΒΑΣΙΚΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

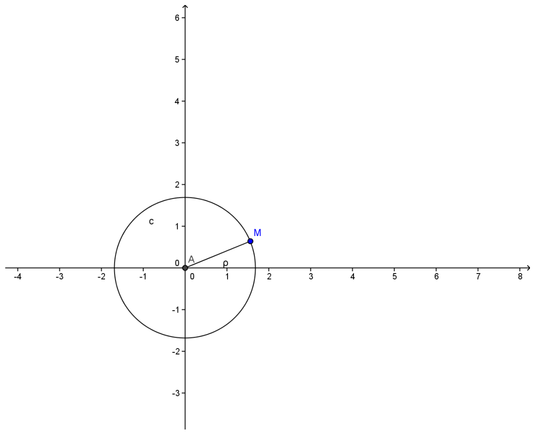
Γενικά όταν θέλουμε να βρούμε έναν γεωμετρικό τόπο ενός μιγαδικού z, τότε θέτουμε z=x+yi και προσπαθούμε μέσα από την σχέση που μας δίνουν να βρούμε την σχέση που συνδέει τα x,y.

Όμως υπάρχουν και μερικές σχέσεις οι όποιες μας φανερώνουν αμέσως τον γεωμετρικό τόπο.

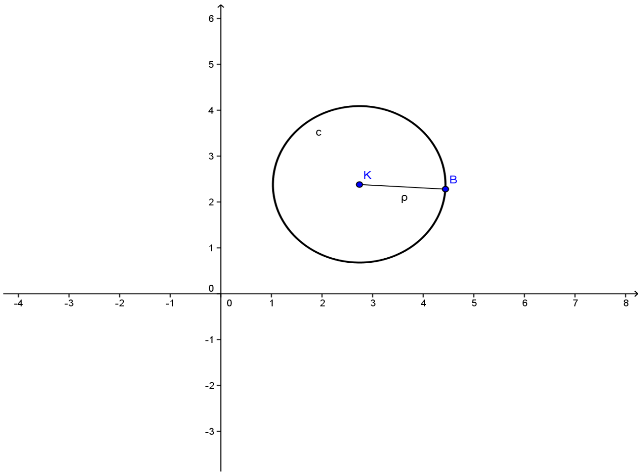
Αυτές οι σχέσεις είναι:

- **|z|=ρ , ρ>0**

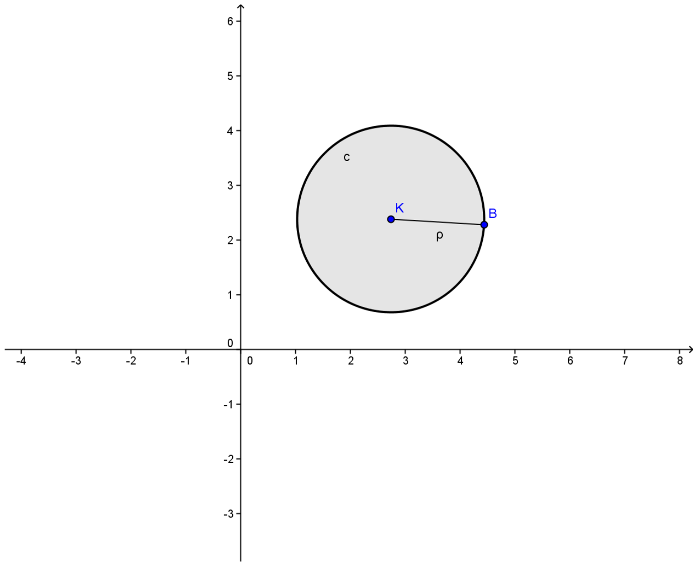
  Ο γεωμετρικός τόπος είναι **κύκλος** **K(0,0)** και ακτίνα ρ.



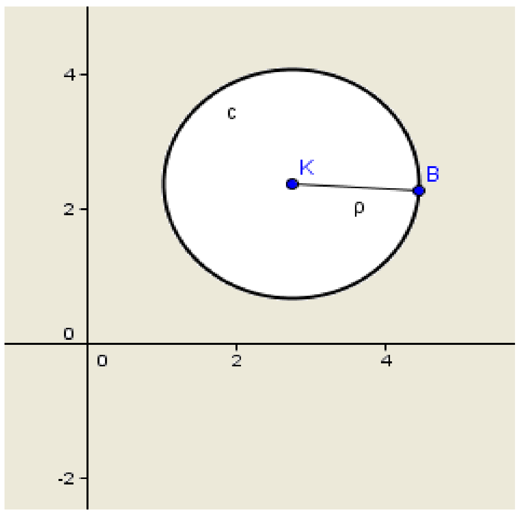
❖ **$|z-z_0|=\rho$, $\rho>0$**
Ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος κέντρου **$K(z_0)$** και ακτίνας ρ.



❖ **$|z-z_0|\leq\rho$**
Ο γεωμετρικός τόπος είναι ο **κυκλικός δίσκος $K(z_0)$** και ακτίνας ρ.

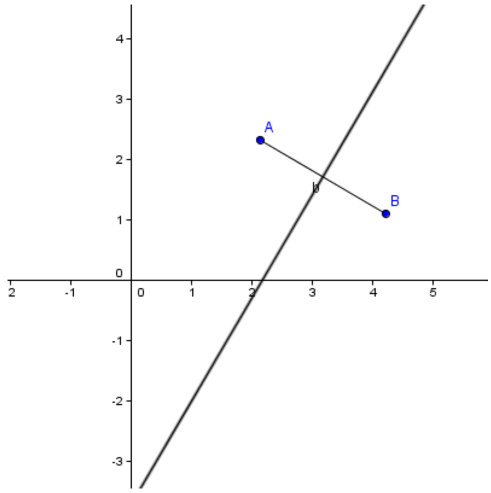


❖ **$|z-z_0|>\rho$**
Ο γεωμετρικός τόπος είναι όλα τα εξωτερικά σημεία του **κύκλου $K(z_0)$** και ακτίνας ρ.



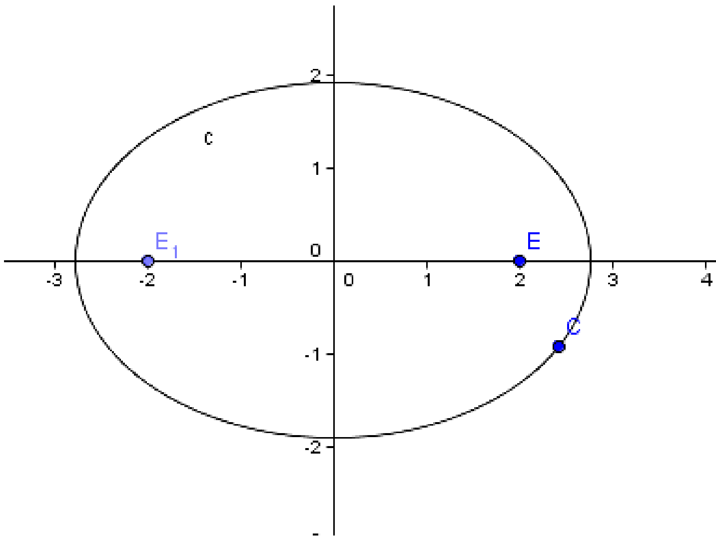
❖ **$|z-z_1|=|z-z_2|$**

Ο γεωμετρικός τόπος είναι η **μεσοκάθετος** του τμήματος ΑΒ με Α(z_1) και Β(z_2).



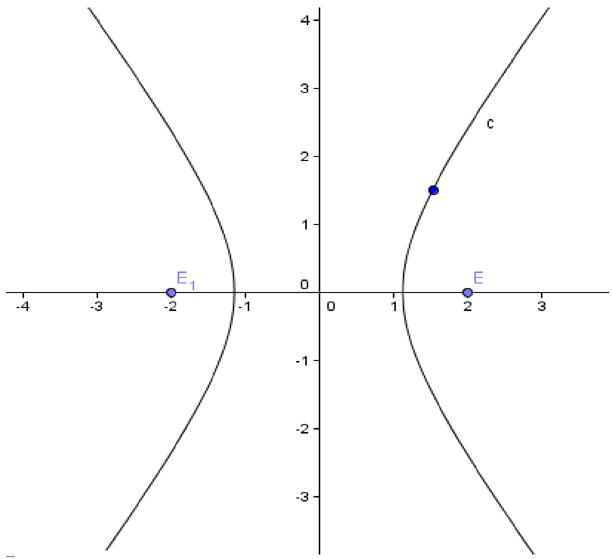
❖ **$|z-z_1|+|z-z_2|=2\alpha$, με $\alpha>0$**

Ο γεωμετρικός τόπος είναι **έλλειψη** με εστίες $E_1(z_1)$,$E(z_2)$ και σταθερό άθροισμα 2α.



❖ **$||z-z_1|-|z-z_2||=2\alpha$,$\alpha>0$**

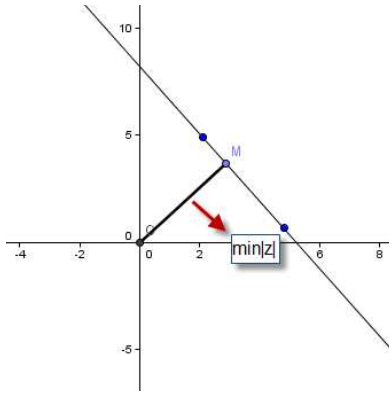
Ο γεωμετρικός τόπος είναι **υπερβολή** με εστίες $E_1(z_1)$, $E(z_2)$ και σταθερή διαφορά 2α.



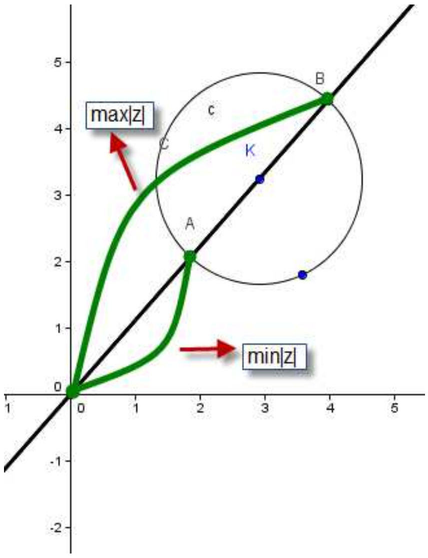
ΜΕΓΙΣΤΟ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΤΟΥ |z| ΚΑΙ ΤΟΥ $|z_1 - z_2|$

Έστω Μ , M_1 , M_2 οι εικόνες των μιγαδικών z_1 , z_2 , z_3 στο μιγαδικό επίπεδο. Για να βρούμε το μέγιστο και το ελάχιστο του μέτρου του z και της διαφοράς του μέτρου z_1- z_2 πρέπει να γνωρίζουμε τους γεωμετρικούς τόπους πάνω στους οποίους βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών. Συγκεκριμένα :

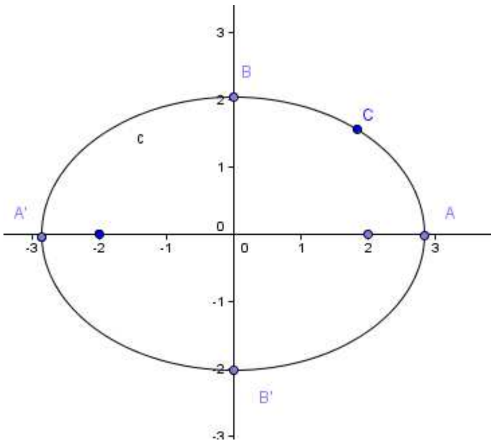
- Αν το Μ βρίσκεται σε ευθεία ε τότε:
  min|z| =d(O,ε)



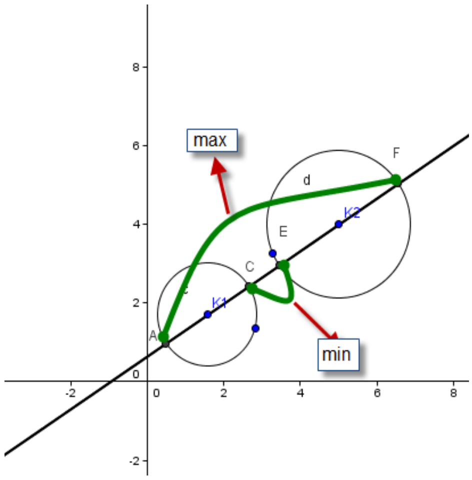
- Αν το Μ βρίσκεται σε κύκλο (Κ ,ρ) τότε:
  min|z|=(OA)=|(OK)-ρ|
  max|z|=(OB)=(OK)+ρ



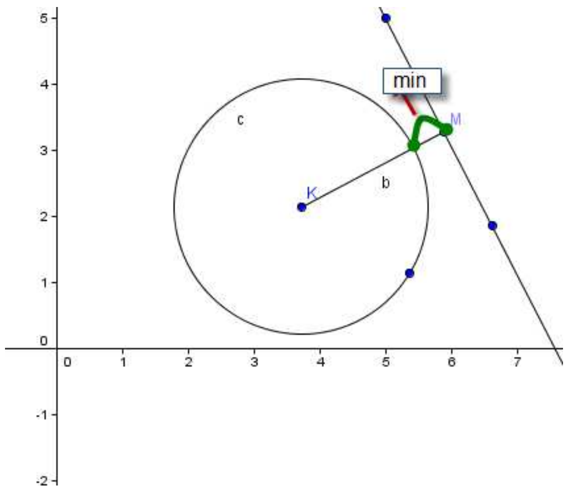
- Αν το Μ βρίσκεται στην έλλειψη C:
  $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1, \beta^2=\alpha^2-\gamma^2$ τότε:
  min|z|=(OB)=(OB΄)=β
  max|z|=(OA)=(OA΄)=α



❖ Αν οι εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2 βρίσκονται αντίστοιχα στους κύκλους (K_1,ρ_1) και (K_2, ρ_2) με $K_1K_2 > \rho_1 + \rho_2$ τότε :
$\min|z_1-z_2| = (K_1K_2)-\rho_1-\rho_2$
$\max|z_1-z_2| = (K_1K_2)+\rho_1+\rho_2$



❖ Αν οι εικόνες των μιγαδικών z_1 και z_2 βρίσκονται αντίστοιχα στον κύκλο (K, ρ) και στην ευθεία ε τότε:
$\min|z_1-z_2| = |d(K,\varepsilon)-\rho|$



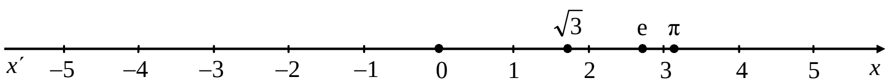
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (ΕΙΣΑΓΩΓΗ)-ΘΕΩΡΕΙΑ

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών

Υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών

αποτελείται από τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς και παριστάνεται με τα σημεία ενός άξονα, *του άξονα των πραγματικών αριθμών*.

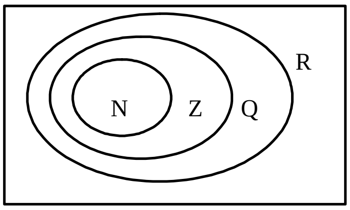


Ρητοί αριθμοί λέγονται οι αριθμοί που έχουν ή μπορούν να πάρουν τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι με $\beta \neq 0$. Το σύνολο των ρητών αριθμών συμβολίζεται με Q . Είναι, δηλαδή,

$$Q = \left\{ \frac{\alpha}{\beta} | \alpha, \beta \text{ ακέραιοι με } \beta \neq 0 \right\}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο των ακέραιων αριθμών είναι το $Z=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$, ενώ το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι το $N=\{0,1,2,3,\ldots\}$.

Για τα σύνολα N,Z,Q και R ισχύει: $N\subseteq Z\subseteq Q\subseteq R$.



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Τα σύνολα $N-\{0\}$, $Z-\{0\}$,$Q-\{0\}$ και $\Re-\{0\}$ τα συμβολίζουμε συντομότερα με N^*, Z^*, Q^* και $\Re^*$ αντιστοίχως.

Πράξεις και διάταξη στο R

1) Αν $\alpha\geq\beta$ και $\beta\geq\gamma$, τότε $\alpha\geq\gamma$

2) $\alpha\geq\beta\Leftrightarrow\alpha+\gamma\geq\beta+\gamma$

3) $\begin{cases}\alpha\geq\beta \;\Leftrightarrow\; \alpha\gamma\geq\beta\gamma \;, \text{όταν } \gamma>0\\ \text{ενώ}\\ \alpha\geq\beta \;\Leftrightarrow\; \alpha\gamma\leq\beta\gamma \;, \text{όταν } \gamma<0\end{cases}$.

4) $\begin{cases}\text{Αν } \alpha\geq\beta \text{ και } \gamma\geq\delta \text{, τότε } \alpha+\gamma\geq\beta+\delta\\ \text{Αν}\begin{pmatrix}\alpha\geq\beta \text{ και } \gamma\geq\delta\\ \text{και}\\ \alpha,\beta,\gamma,\delta>0\end{pmatrix}\text{, τότε } \alpha\gamma\geq\beta\delta.\end{cases}$

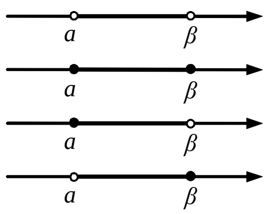
5) Αν $\alpha,\beta\geq 0$ και $\nu\in N^*$, τότε ισχύει η ισοδυναμία $\alpha\geq\beta\Leftrightarrow\alpha^\nu\geq\beta^\nu$

6) $\dfrac{\alpha}{\beta}\geq 0\Leftrightarrow(\alpha\beta\geq 0 \text{ και } \beta\neq 0)$

7) Αν $\alpha\beta>0$, τότε ισχύει η ισοδυναμία : $\alpha\geq\beta\Leftrightarrow\dfrac{1}{\alpha}\leq\dfrac{1}{\beta}$.

Διαστήματα πραγματικών αριθμών

• Αν $\alpha,\beta\in\Re$ με $\alpha<\beta$, τότε ονομάζουμε **διαστήματα με άκρα τα *α,β*** καθένα από τα παρακάτω σύνολα:



$(\alpha,\beta)=\{x\in\Re\,|\,\alpha<x<\beta\}$: **ανοικτό διάστημα**

$[\alpha,\beta]=\{x\in\Re\,|\,\alpha\leq x\leq\beta\}$: **κλειστό διάστημα**

$[\alpha,\beta)=\{x\in\Re\,|\,\alpha\leq x<\beta\}$:**κλειστό-ανοικτό διάστημα**

$(\alpha,\beta]=\{x\in\Re\,|\,\alpha<x\leq\beta\}$:**ανοικτό-κλειστό διάστημα**.

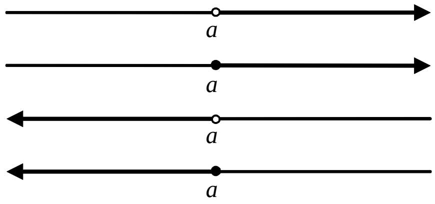
• Αν $\alpha \in \Re$, τότε ονομάζουμε **μη φραγμένα διαστήματα με άκρο το *α*** καθένα από τα παρακάτω σύνολα:

$(\alpha,+\infty)=\{x\in\Re \mid x>\alpha\}$

$[\alpha,+\infty)=\{x\in\Re \mid x\geq\alpha\}$

$(-\infty,\alpha)=\{x\in\Re \mid x<\alpha\}$

$(-\infty,\alpha]=\{x\in\Re \mid x\leq\alpha\}$



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

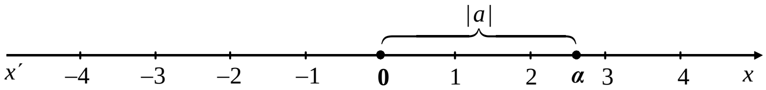
- Υπό μορφή διαστήματος το σύνολο $\Re$ το συμβολίζουμε με $(-\infty,+\infty)$.
- Τα σημεία ενός διαστήματος *Δ*, που είναι διαφορετικά από τα άκρα του, λέγονται **εσωτερικά σημεία** του *Δ*.

Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

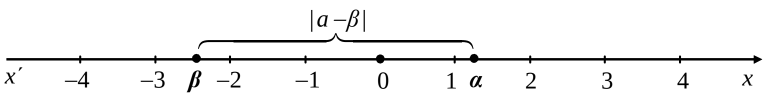
Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού *α*, που συμβολίζεται με $|\alpha|$, ορίζεται ως εξής:

$$\boxed{|\alpha|=\begin{cases}\alpha, & \alpha\nu \quad \alpha\geq 0\\ -\alpha, & \alpha\nu \quad \alpha<0\end{cases}}$$

Γεωμετρικά, η απόλυτη τιμή του *α* παριστάνει την απόσταση του αριθμού *α* από το μηδέν,



ενώ η απόλυτη τιμή του $\alpha-\beta$ παριστάνει την **απόσταση των αριθμών *α* και *β*.**



Ιδιότητες της απόλυτης τιμής :

1) $|\alpha|^2=\alpha^2$

2) $\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|$

3) $|\alpha\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$

4) $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$

5) $||\alpha|-|\beta|| \le |\alpha+\beta| \le |\alpha|+|\beta|$

6) $|x-x_0|<\delta \Leftrightarrow x_0-\delta<x<x_0+\delta, \quad \delta>0$

Η έννοια της πραγματικής συνάρτησης

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω A ένα υποσύνολο του $\Re$. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το** A μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται με $f(x)$.

Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή, γράφουμε:

$f: A \to \Re$
$x \to f(x)$

— Το γράμμα x, που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του A λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το γράμμα y, που παριστάνει την τιμή της f στο x, λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

— Το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f συνήθως συμβολίζεται με D_f.

— Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Είναι δηλαδή:

$f(A)=\{y \mid y=f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}$.

ΠΡΟΣΟΧΗ

Στα επόμενα και σε όλη την έκταση του βιβλίου :

— Θα ασχοληθούμε μόνο με συναρτήσεις που έχουν πεδίο ορισμού **διάστημα** ή **ένωση διαστημάτων**.

— Όταν θα λέμε ότι **"Η συνάρτηση f είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο Β",** θα εννοούμε ότι το B είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της. Στην περίπτωση αυτή με $f(B)$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των τιμών της f σε κάθε $x \in B$. Είναι δηλαδή:

$f(B)=\{y \mid y=f(x) \text{ για κάποιο } x \in B\}$.

Συντομογραφία συνάρτησης

Για να οριστεί μια συνάρτηση f αρκεί να δοθούν δύο στοιχεία:

- το πεδίο ορισμού της και

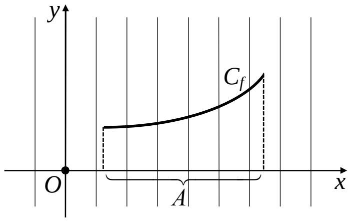
- η τιμή της, $f(x)$, για κάθε x του πεδίου ορισμού της (τύπος).

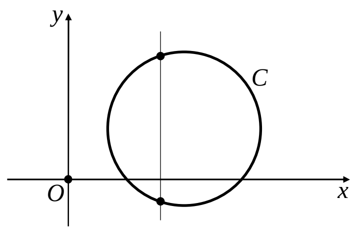
Συνήθως, όμως, αναφερόμαστε σε μια συνάρτηση f δίνοντας μόνο τον τύπο με τον οποίο εκφράζεται το $f(x)$. Σε μια τέτοια περίπτωση θα *θεωρούμε συμβατικά* ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών x, για τους οποίους το $f(x)$ έχει νόημα.

Γραφική παράσταση συνάρτησης

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει $y=f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x,f(x))$, $x\in A$, λέγεται γραφική παράσταση της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f. Η εξίσωση, λοιπόν, $y=f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα σημεία της C_f. Επομένως, η $y=f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f. Επειδή κάθε $x\in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y\in\Re$, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της f το πολύ ένα κοινό σημείο .

Έτσι, ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης .



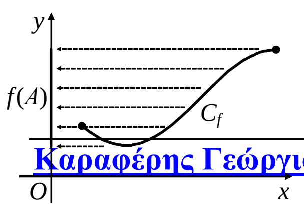


Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f, τότε:

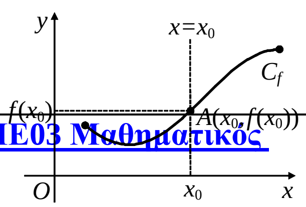
α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της C_f.

β) Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της C_f.

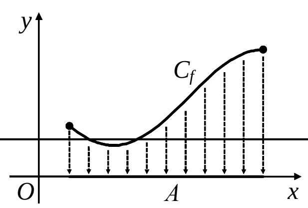
γ) Η τιμή της f στο $x_0\in A$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x=x_0$ και της C_f .



(β)

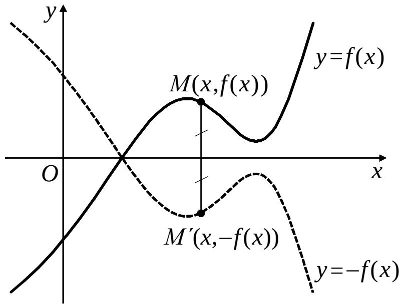


(γ)

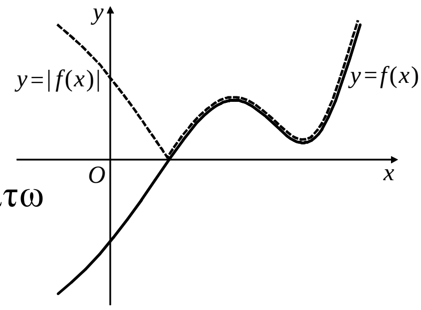


(α)

Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f, μιας συνάρτησης f μπορούμε, επίσης, να σχεδιάσουμε και τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $-f$ και $|f|$.



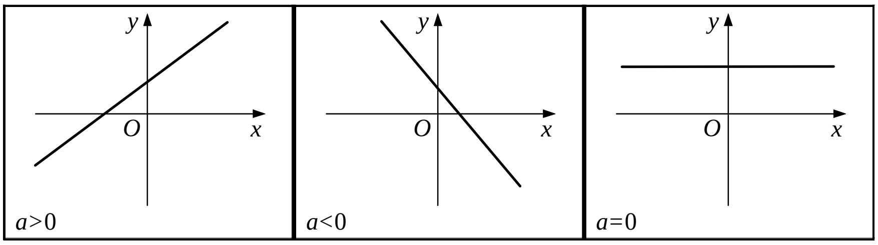
α) Η γραφική παράστασης της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f, γιατί αποτελείται από τα σημεία $M'(x,-f(x))$ που είναι συμμετρικά των $M(x,f(x))$, ως προς τον άξονα $x'x$.



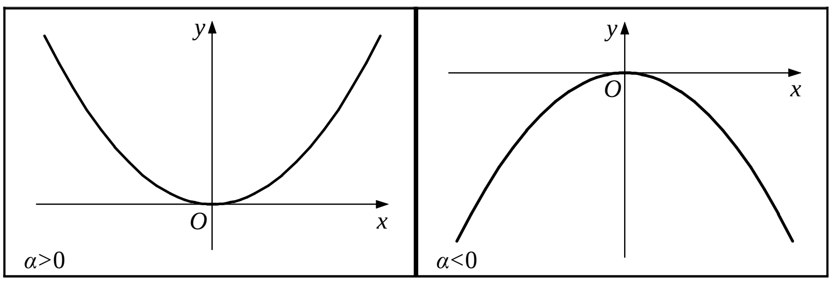
β) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν.

Μερικές βασικές συναρτήσεις

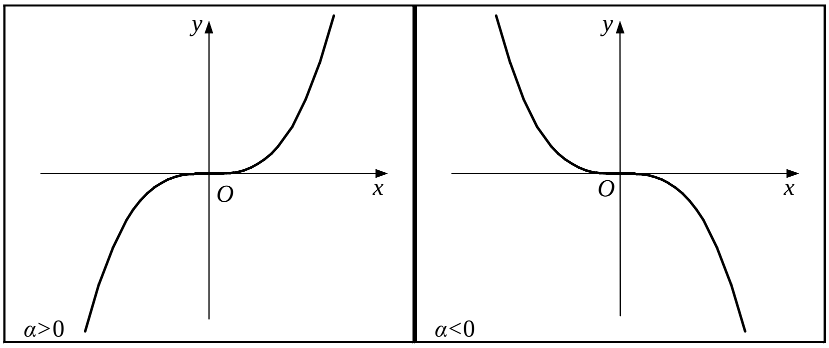
- **Η πολυωνυμική συνάρτηση** $f(x)=\alpha x+\beta$



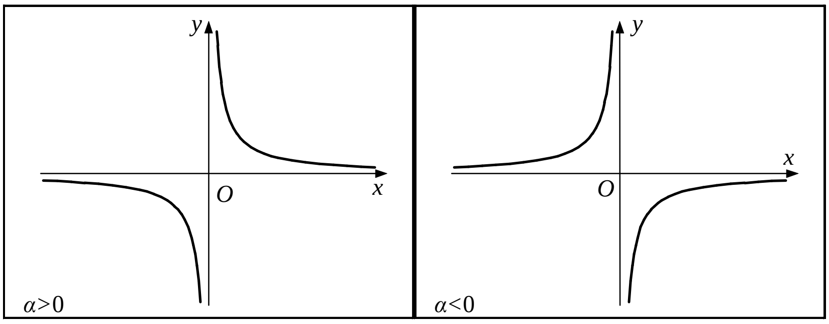
- **Η πολυωνυμική συνάρτηση** $f(x)=\alpha x^2,\ \alpha\neq 0$.



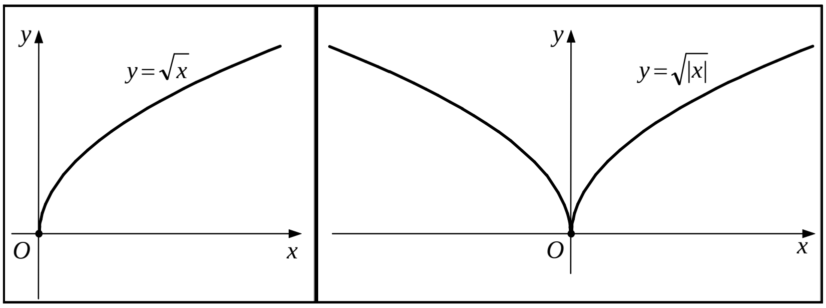
- **Η πολυωνυμική συνάρτηση** $f(x)=\alpha x^3,\ \alpha\neq 0$.



- **Η ρητή συνάρτηση** $f(x)=\dfrac{\alpha}{x}$**,** $\alpha \neq \mathbf{0}$**.**

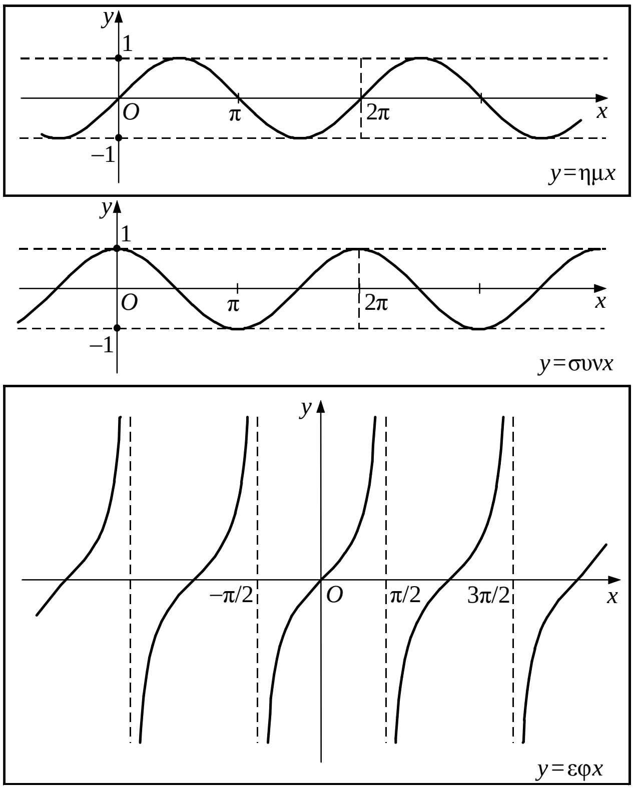


- **Οι συναρτήσεις** $f(x)=\sqrt{x}$**,** $g(x)=\sqrt{|x|}$**.**



Επειδή $g(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}, x<0\\ \sqrt{x} \;\;, x\geq 0\end{cases}$, η γραφική παράσταση της $y=\sqrt{|x|}$ αποτελείται από δύο κλάδους. Ο ένας είναι η γραφική παράσταση της $y=\sqrt{x}$ και ο άλλος η συμμετρική της ως προς τον άξονα $y'y$.

- **Οι τριγωνικές συναρτήσεις :** $f(x)=\eta\mu x$**,** $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$**,** $f(x)=\varepsilon\phi x$



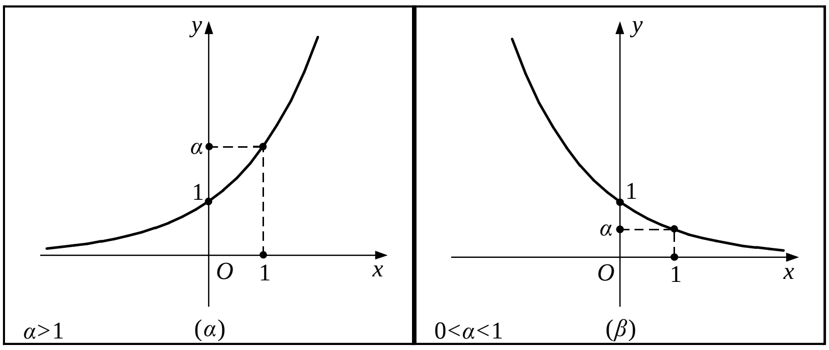
(α)

(β)

(γ)

Υπενθυμίζουμε ότι, οι συναρτήσεις $f(x)=\eta\mu x$ και $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι περιοδικές με περίοδο $T=2\pi$, ενώ η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\phi x$ είναι περιοδική με περίοδο $T=\pi$.

- **Η εκθετική συνάρτηση** $f(x)=\alpha^x$, $0<\alpha\neq 1$.



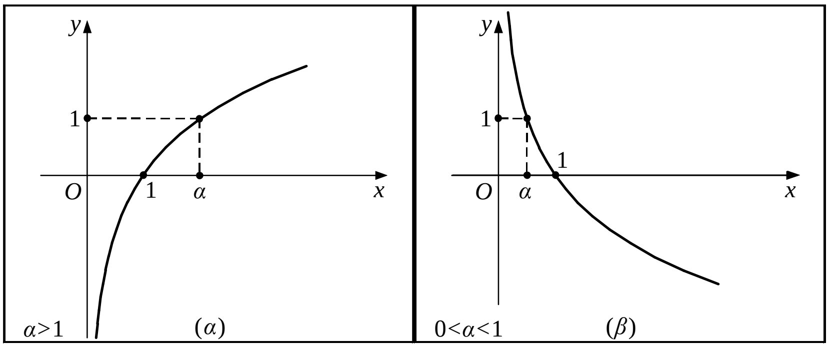
Υπενθυμίζουμε ότι:

αν $\alpha>1$, **τότε:** $\alpha^{x_1}<\alpha^{x_2}\Leftrightarrow x_1<x_2$

ενώ

αν $0<\alpha<1$, **τότε:** $\alpha^{x_1}<\alpha^{x_2}\Leftrightarrow x_1>x_2$.

- **Η λογαριθμική συνάρτηση** $f(x)=\log_\alpha x$, $0<\alpha\neq 1$



Υπενθυμίζουμε ότι:

1) $\log_\alpha x = y \Leftrightarrow \alpha^y = x$

2) $\log_\alpha \alpha^x = x$ **και** $\alpha^{\log_\alpha x} = x$

3) $\log_\alpha \alpha = 1$ **και** $\log_\alpha 1 = 0$

4) $\log_\alpha (x_1 x_2) = \log_\alpha x_1 + \log_\alpha x_2$

5) $\log_\alpha \left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) = \log_\alpha x_1 - \log_\alpha x_2$

6) $\log_\alpha x_1^k = \kappa \log_\alpha x_1$

7) **αν** $\alpha > 1$**, τότε:** $\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$**, ενώ**
αν $0 < \alpha < 1$**, τότε :** $\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$**.**

8) $\alpha^x = e^{x\ln\alpha}$**, αφού** $\alpha = e^{\ln\alpha}$**.**

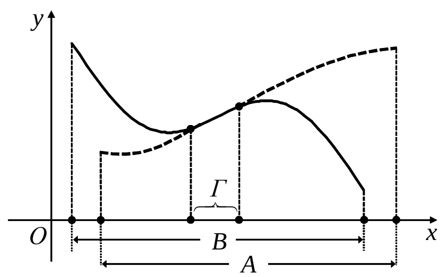
Ισότητα συναρτήσεων

ΟΡΙΣΜΟΣ

> Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:
> - έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και
> - για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$. (Δηλαδή τον ίδιο τύπο)

- Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f = g$. *(Προσοχή : η ισότητα $f(x) = g(x)$ σημαίνει ότι οι συναρτήσεις έχουν τον ίδιο τύπο και όχι ότι είναι ίσες!!!!!!!!!!!!)*

- Έστω τώρα f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντιστοίχως και Γ ένα υποσύνολο των A και B. Αν για κάθε $x \in \Gamma$ ισχύει $f(x) = g(x)$, τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις ***f* και *g* είναι ίσες στο σύνολο *Γ***.



Πράξεις με συναρτήσεις

Ορίζουμε ως **άθροισμα** $f+g$**, διαφορά** $f-g$**, γινόμενο** $f \cdot g$ και **πηλίκο** $\frac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων *f*, *g* τις συναρτήσεις με τύπους

- $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
- $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
- $(f \cdot g)(x)=f(x) \cdot g(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$.

Το πεδίο ορισμού των $f+g$, $f-g$ και $f \cdot g$ είναι η τομή $D_f \cap D_g$ των πεδίων ορισμού D_f και D_g των συναρτήσεων *f* και *g* αντιστοίχως, ενώ το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $D_f \cap D_g$, εξαιρουμένων των τιμών του *x* που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$, δηλαδή το σύνολο

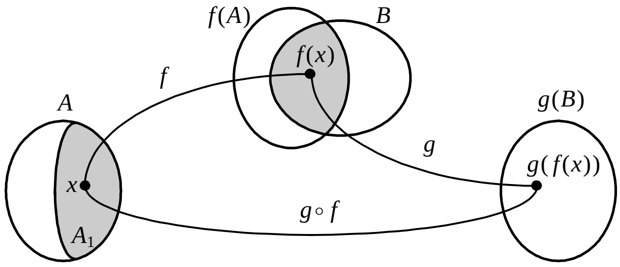
$\{x \mid x \in A$ και $x \in B$, με $g(x) \neq 0\}$ δηλαδή $D_f \cap D_g - \{g(x)=0\}$.

Σύνθεση συναρτήσεων

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού *A*, *B* αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της *f* με την *g***, και τη συμβολίζουμε με gof, τη συνάρτηση με τύπο

$(gof)(x)=g(f(x))$.



Το πεδίο ορισμού της gof αποτελείται από όλα τα στοιχεία *x* του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της *g*.
Δηλαδή είναι το σύνολο
$A_{gof}=\{x \in A_f \mid f(x) \in A_g\}$.

Είναι φανερό ότι η gof ορίζεται αν $A_{gof} \neq \varnothing$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

ΠΡΟΣΟΧΗ

Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε μόνο με συναρτήσεις που οι συνθέσεις τους έχουν πεδίο ορισμού **διάστημα** ή **ένωση διαστημάτων**.

ΣΧΟΛΙΑ

- Στην παραπάνω εφαρμογή παρατηρούμε ότι $gof \neq fog$. Γενικά, αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι gof και fog, τότε αυτές *δ ε ν ε ί ν α ι υ π ο χ ρ ε ω τ ι κ ά* ίσες.
- Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(gof)$, τότε ορίζεται και η $(hog)of$ και ισχύει **:** $ho(gof) = (hog)of$.

Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε σύνθεση των *f*, *g* και *h* και τη συμβολίζουμε με $hogof$. Η σύνθεση συναρτήσεων γενικεύεται και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.

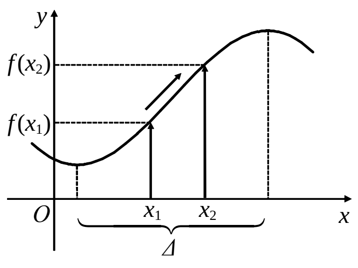
ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

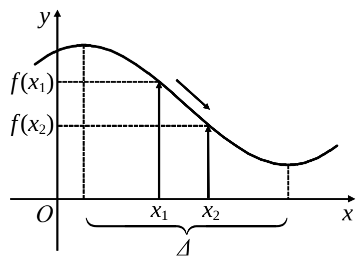
Μονοτονία συνάρτησης

- Οι έννοιες "γνησίως αύξουσα συνάρτηση", "γνησίως φθίνουσα συνάρτηση" είναι γνωστές από προηγούμενη τάξη. Συγκεκριμένα, μάθαμε ότι:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f λέγεται[1] :
- **γνησίως αύξουσα** σ' ένα *δ ι ά σ τ η μ α Δ* του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$
- **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα *δ ι ά σ τ η μ α Δ* του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$





[1] Μια συνάρτηση *f* λέγεται, απλώς,:
- **αύξουσα** σ' ένα διάστημα *Δ*, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- **φθίνουσα** σ' ένα διάστημα *Δ*, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \geq f(x_2)$.

- Για να δηλώσουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) σε ένα διάστημα *Δ*, γράφουμε $f\uparrow\Delta$ (αντιστοίχως $f\downarrow\Delta$).
- Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα *Δ* του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η f είναι **γνησίως μονότονη στο *Δ*.**
- Στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού της f είναι ένα διάστημα *Δ* και η f είναι γνησίως μονότονη σ' αυτό, τότε θα λέμε, απλώς, ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

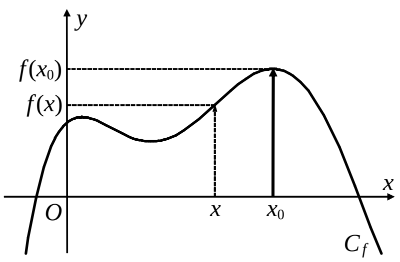
Ακρότατα συνάρτησης

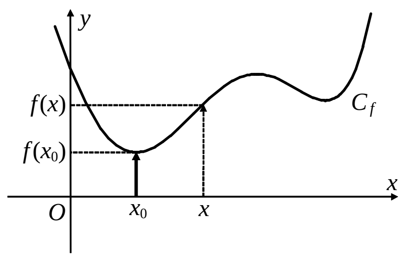
ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

• Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

• Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.





- ***ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ***
  Άλλες συναρτήσεις παρουσιάζουν μόνο μέγιστο, άλλες μόνο ελάχιστο, άλλες και μέγιστο και ελάχιστο και άλλες ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο.
- Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης f λέγονται (ολικά) **ακρότατα** της f.

***Συνάρτηση* 1−1**

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση $f : A \to \Re$ λέγεται **συνάρτηση 1−1**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

αν $x_1 \neq x_2$, τότε ($\Rightarrow$) $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Με απαγωγή σε άτοπο αποδεικνύεται ότι:

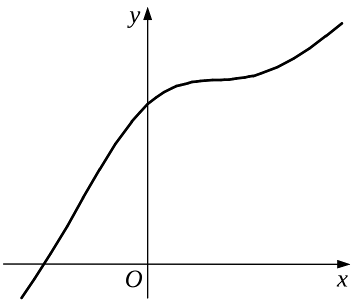
> Μια συνάρτηση $f: A \to \Re$ είναι **συνάρτηση 1–1**, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:
>
> αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $x_1 = x_2$.

ΣΧΟΛΙΑ

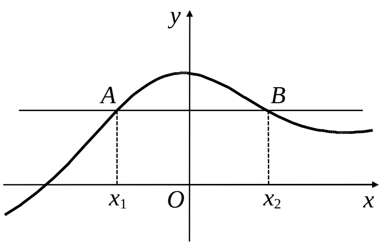
- Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι μια συνάρτηση f είναι $1-1$, αν και μόνο αν:

— Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.

— Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.



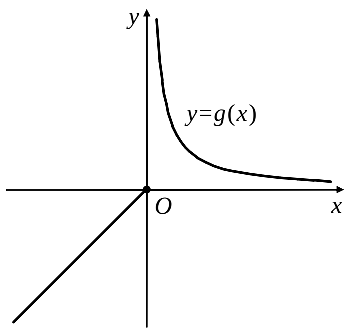
συνάρτηση 1-1



συνάρτηση όχι 1-1

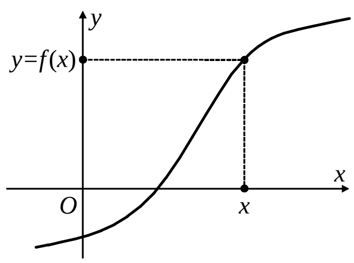
- Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε προφανώς, είναι συνάρτηση "$1-1$". Έτσι, οι συναρτήσεις $f_1(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha \neq 0$, $f_2(x) = \alpha x^3$, $\alpha \neq 0$, $f_3(x) = \alpha^x$, $0 < \alpha \neq 1$ και $f_4(x) = \log_\alpha x$, $0 < \alpha \neq 1$, είναι συναρτήσεις $1-1$.

- Υπάρχουν, όμως, συναρτήσεις που είναι $1-1$ αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες, όπως για παράδειγμα η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} x & , \quad x \le 0 \\ \dfrac{1}{x} & , \quad x > 0 \end{cases}$



Αντίστροφη συνάρτηση

- Έστω μια συνάρτηση $f: A \to \Re$. Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι $1-1$, τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, $f(A)$, της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση $g: f(A) \to \Re$



με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.

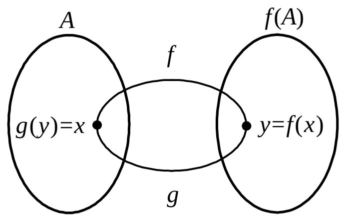
Από τον τρόπο που ορίστηκε η g προκύπτει ότι:

— έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f,

— έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f και

— ισχύει η ισοδυναμία: $f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$.

Αυτό σημαίνει ότι, αν η f αντιστοιχίζει το x στο y, τότε η g αντιστοιχίζει το y στο x και αντιστρόφως. Δηλαδή η g είναι η αντίστροφη διαδικασία της f. Για το λόγο αυτό η g λέγεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f και συμβολίζεται με f^{-1}.



Επομένως έχουμε

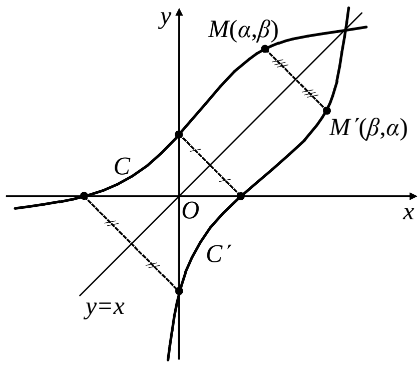
$$\boxed{f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x}$$

οπότε

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in A \qquad \text{και} \qquad f(f^{-1}(y)) = y, \quad y \in f(A).$$

• Ας πάρουμε τώρα μια 1–1 συνάρτηση f και ας θεωρήσουμε τις γραφικές παραστάσεις C και C' των f και της f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων . Επειδή $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$,

αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C της f, τότε το σημείο $M'(\beta, \alpha)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1} και αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$. Επομένως:



> Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ $x_0 \in \Re$

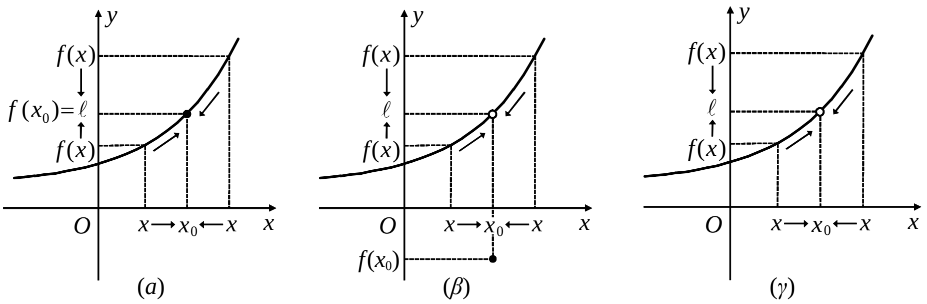
Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0, τότε γράφουμε

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

και διαβάζουμε

"το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0, είναι ℓ" ή

"το όριο της $f(x)$ στο x_0 είναι ℓ".



ΣΧΟΛΙΑ

Από τα παραπάνω σχήματα παρατηρούμε ότι:

— Για να αναζητήσουμε το όριο της f στο x_0, πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε "κοντά στο x_0", δηλαδή η f να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής

$(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ή (α, x_0) ή (x_0, β).

— Το x_0 μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (Σχ. α, β) ή να μην ανήκει σ' αυτό (Σχ. γ).

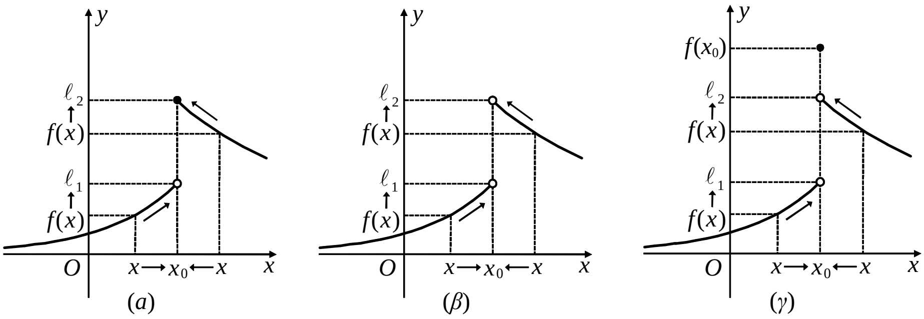
— Η τιμή της f στο x_0, όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριό της στο x_0 (Σχ. 39α) ή διαφορετική από αυτό. (Σχ.β).

ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΟΡΙΑ ΣΤΟ $x_0 \in \Re$

- Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ_1, καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από μικρότερες τιμές $(x < x_0)$, τότε γράφουμε: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_1$

  και διαβάζουμε: "το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 από τα αριστερά, είναι ℓ_1".
- Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ_2, καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από μεγαλύτερες τιμές $(x > x_0)$, τότε γράφουμε: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_2$

  και διαβάζουμε: "το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 από τα δεξιά, είναι ℓ_2".



- Τους αριθμούς $\ell_1 = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ και $\ell_2 = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ τους λέμε **πλευρικά όρια** της f στο x_0 και συγκεκριμένα το ℓ_1 **αριστερό όριο** της f στο x_0, ενώ το ℓ_2 **δεξιό όριο** της f στο x_0.
- Από τα παραπάνω σχήματα φαίνεται ότι:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell}$$

ΣΧΟΛΙΑ

- Αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση f έχει όριο στο x_0, τότε αυτό είναι μοναδικό και συμβολίζεται, όπως είδαμε, με $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.
- Στη συνέχεια, όταν γράφουμε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, θα εννοούμε ότι υπάρχει το όριο της f στο x_0 και είναι ίσο με ℓ.
- Συνέπεια του ορισμού είναι οι ακόλουθες ισοδυναμίες:

(α)	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$	$\Leftrightarrow$	$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - \ell) = 0$
(β)	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$	$\Leftrightarrow$	$\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = \ell$

- **ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΑΠΟ ΔΕΞΙΑ ΚΑΙ ΑΠΟ ΑΡΙΣΤΕΡΑ ΣΤΟ $x_0 \in \Re$**

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$$

- **ΟΡΙΟ ΜΟΝΟ ΑΠΟ ΔΕΞΙΑ ΣΤΟ $x_0 \in \Re$**

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (x_0,β), αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (α,x_0), τότε ορίζουμε: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

• ΟΡΙΟ ΜΟΝΟ ΑΠΟ ΑΡΙΣΤΕΡΑ ΣΤΟ $x_0\in\Re$

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (α,x_0), αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (x_0,β), τότε ορίζουμε: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.

ΣΧΟΛΙΟ

Αποδεικνύεται ότι το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ είναι ανεξάρτητο των άκρων α,β των διαστημάτων (α,x_0) και (x_0,β) στα οποία θεωρούμε ότι είναι ορισμένη η f.

ΣΥΜΒΑΣΗ

Στη συνέχεια, όταν λέμε ότι μια συνάρτηση f έχει **κοντά στο** x_0 μια ιδιότητα P θα εννοούμε ότι ισχύει μια από τις παρακάτω τρεις συνθήκες:

α) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ και στο σύνολο αυτό έχει την ιδιότητα P.

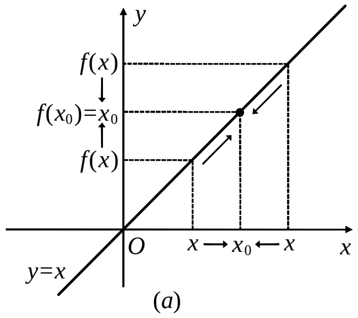
β) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (α,x_0), έχει σ' αυτό την ιδιότητα P, αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (x_0,β).

γ) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (x_0,β), έχει σ' αυτό την ιδιότητα P, αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (α,x_0).

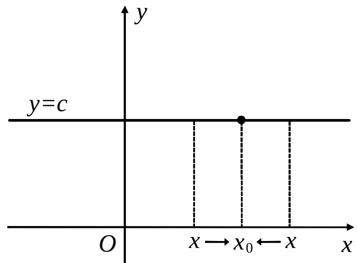
Όριο ταυτοτικής - σταθερής συνάρτησης

Με τη βοήθεια του ορισμού του ορίου αποδεικνύεται ότι:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} x=x_0} \qquad \boxed{\lim_{x\to x_0} c=c}$$



(α)



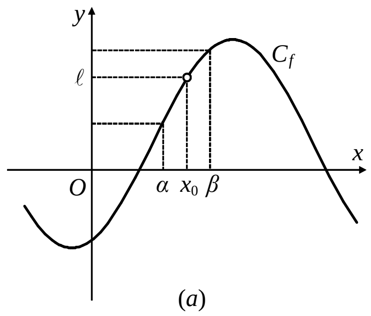
(β)

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

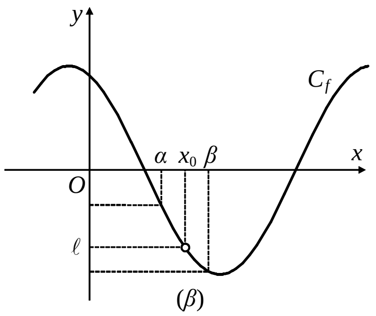
Όριο και διάταξη

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 (Σχ. α)
- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 (Σχ. β)



(α)

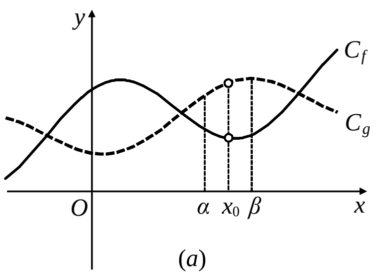


(β)

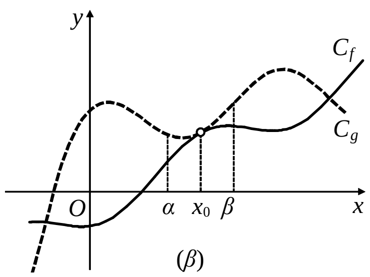
ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε

$\lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x)$



(α)



(β)

Όρια και πράξεις

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0, τότε:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
2. $\lim\limits_{x\to x_0}(\kappa f(x))=\kappa\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, για κάθε σταθερά $\kappa\in\Re$
3. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
4. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, εφόσον $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$
5. $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=\left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|$
6. $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)}=\sqrt[k]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x)\geq 0$ κοντά στο x_0.

Οι ιδιότητες 1 και 3 του θεωρήματος ισχύουν και για περισσότερες από δυο συναρτήσεις. Άμεση συνέπεια αυτού είναι:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{\nu}=\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]^{\nu},\quad \nu\in\mathbb{N}^*}$$

Για παράδειγμα,

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} x^{\nu}=x_0^{\nu}.}$$

- Έστω τώρα το πολυώνυμο

$P(x)=\alpha_{\nu}x^{\nu}+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0$ και $x_0\in\Re$.

Σύμφωνα με τις παραπάνω ιδιότητες έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0} P(x)=\lim_{x\to x_0}(\alpha_{\nu}x^{\nu}+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0)$$

$$=\lim_{x\to x_0}(\alpha_{\nu}x^{\nu})+\lim_{x\to x_0}(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1})+\cdots+\lim_{x\to x_0}\alpha_0$$

$$=\alpha_{\nu}\lim_{x\to x_0} x^{\nu}+\alpha_{\nu-1}\lim_{x\to x_0} x^{\nu-1}+\cdots+\lim_{x\to x_0}\alpha_0$$

$$=\alpha_{\nu}x_0^{\nu}+\alpha_{\nu-1}x_0^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0=P(x_0).$$

Επομένως,

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)\,.}$$

- Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \Re$ με $Q(x_0)\neq 0$. Τότε,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}\,.$$

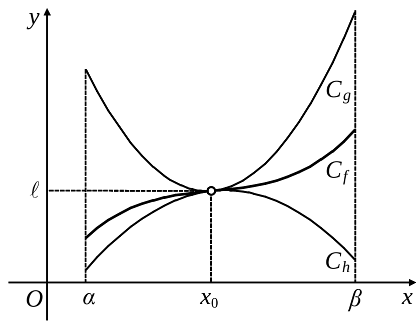
Επομένως,

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, \quad \text{εφόσον} \quad Q(x_0)\neq 0}$$

ΣΧΟΛΙΟ

Όταν $Q(x_0)=0$, τότε δεν εφαρμόζεται η ιδιότητα 4 του παραπάνω θεωρήματος.

Κριτήριο παρεμβολής



Υποθέτουμε ότι “κοντά στο x_0” μια συνάρτηση f “εγκλωβίζεται” ανάμεσα σε δύο συναρτήσεις h και g. Αν, καθώς το x τείνει στο x_0, οι g και h έχουν κοινό όριο ℓ, τότε, όπως φαίνεται και στο σχήμα, η f θα έχει το ίδιο όριο ℓ. Αυτό δίνει την ιδέα του παρακάτω θεωρήματος που είναι γνωστό ως **κριτήριο παρεμβολής**

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν

- $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell$, τότε

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

Τριγωνομετρικά όρια

$|\eta\mu x| \le |x|$, για κάθε $x\in\Re$

(η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x=0$)

- $\lim\limits_{x \to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$

- α) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$
- β) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$

Όριο σύνθετης συνάρτησης

Με τις ιδιότητες που αναφέρουμε μέχρι τώρα μπορούμε να προσδιορίσουμε τα όρια απλών συναρτήσεων. Αν, όμως, θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x))$, της σύνθετης συνάρτησης $f \circ g$ στο σημείο x_0, τότε εργαζόμαστε ως εξής:

1. Θέτουμε $u = g(x)$.
2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $u_0 = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ και
3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $\ell = \lim\limits_{u \to u_0} f(u)$.

Αποδεικνύεται ότι, αν $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0, τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με ℓ, δηλαδή ισχύει:

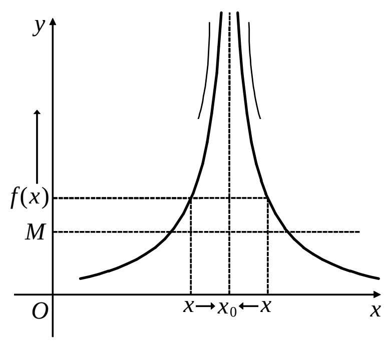
$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{u \to u_0} f(u)}.$$

ΠΡΟΣΟΧΗ

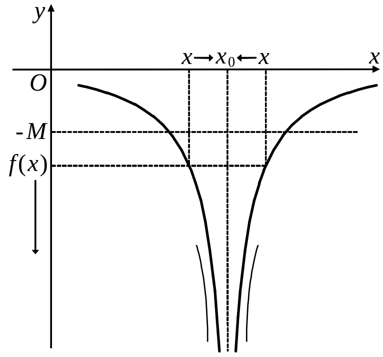
Στη συνέχεια και σε όλη την έκταση του βιβλίου τα όρια της μορφής $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x))$ με τα οποία θα ασχοληθούμε θα είναι τέτοια, ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη: “$g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0” και γι’ αυτό δεν θα ελέγχεται.

2.ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ (ΑΠΕΙΡΟ) ΟΡΙΟ ΣΤΟ $x_0 \in \Re$

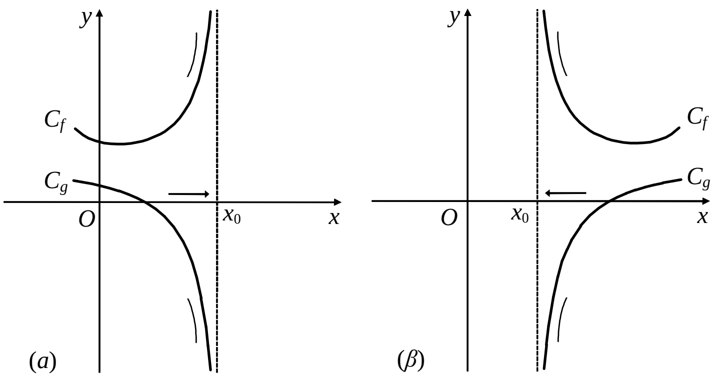
- Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f κοντά στο x_0. Παρατηρούμε ότι, καθώς το x κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα $x'x$ πλησιάζει τον πραγματικό αριθμό x_0, οι τιμές



$f(x)$ αυξάνονται απεριόριστα . Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο $+\infty$ και γράφουμε $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$.



- Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f κοντά στο x_0. Παρατηρούμε ότι, καθώς το x κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα $x'x$ πλησιάζει τον πραγματικό αριθμό x_0, οι τιμές $f(x)$ ελαττώνονται απεριόριστα . Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο $-\infty$ και γράφουμε $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$.
- Ανάλογοι ορισμοί μπορούν να διατυπωθούν όταν $x\to x_0^-$ και $x\to x_0^+$.



Όπως στην περίπτωση των πεπερασμένων ορίων έτσι και για τα άπειρα όρια συναρτήσεων, που ορίζονται σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0, ενώ

  αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0.

- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0}(-f(x))=-\infty$, ενώ

  αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0}(-f(x))=+\infty$.

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$,

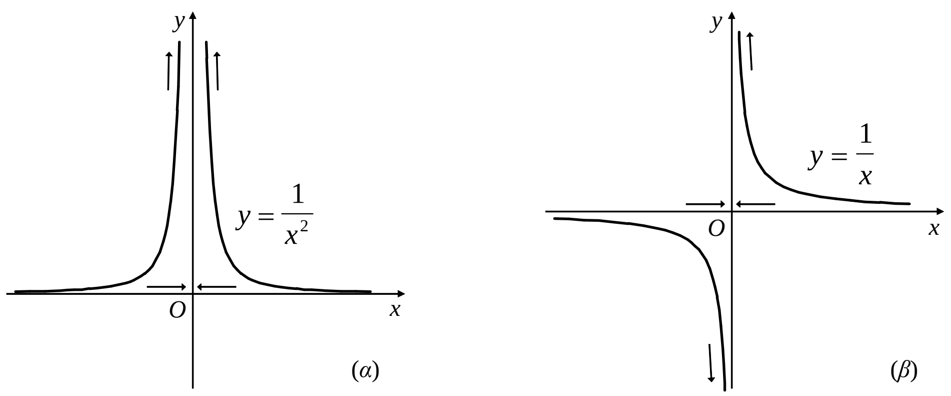
  ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$.

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty$.

Σύμφωνα με τις ιδιότητες αυτές έχουμε:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ και γενικά $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^{2\nu}} = +\infty$, $\nu \in N^*$ (Σχ.α)



$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ και γενικά $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty$, $\nu \in N^*$, ενώ

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ και γενικά $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = -\infty$, $\nu \in N^*$ (Σχ.β).

Επομένως, δεν υπάρχει στο μηδέν το όριο της $f(x) = \frac{1}{x^{2\nu+1}}$, $\nu \in N^*$.

Για τα όρια αθροίσματος και γινομένου δύο συναρτήσεων αποδεικνύονται τα παρακάτω θεωρήματα

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (όριο αθροίσματος)

Αν στο $x_0 \in \Re$						
το όριο της f είναι:	$\alpha \in \Re$	$\alpha \in \Re$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
τότε το όριο της $f+g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	;	;

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (όριο γινομένου)

Αν στο $x_0 \in \Re$,										
το όριο της f είναι:	α>0	α<0	α>0	α<0	0	0	+∞	+∞	-∞	-∞
και το όριο της g είναι:	+∞	+∞	-∞	-∞	+∞	-∞	+∞	-∞	+∞	-∞
τότε το όριο της $f{\cdot}g$ είναι:	+∞	-∞	-∞	+∞	;	;	+∞	-∞	-∞	+∞

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1

Στους πίνακες των παραπάνω θεωρημάτων, όπου υπάρχει ερωτηματικό, σημαίνει ότι το όριο (αν υπάρχει) εξαρτάται κάθε φορά από τις συναρτήσεις που παίρνουμε. Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι έχουμε **απροσδιόριστη μορφή**.
Δηλαδή, **απροσδιόριστες μορφές** για τα όρια αθροίσματος και γινομένου συναρτήσεων είναι οι:

- $(+\infty)+(-\infty)$
- $0\cdot(\pm\infty)$.

  Επειδή $f-g=f+(-g)$ και $\frac{f}{g}=f\cdot\frac{1}{g}$, **απροσδιόριστες μορφές** για τα όρια της διαφοράς και του πηλίκου συναρτήσεων είναι οι:
- $(+\infty)-(+\infty)$,
- $(-\infty)-(-\infty)$
- $\frac{0}{0}$,
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2

Για τα όρια πηλίκου που οδηγούν σε απροσδιόριστες μορφές $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, ισχύουν τα επόμενα θεωρήματα, που είναι γνωστά ως **κανόνες de l' Hospital.**

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (μορφή $\frac{0}{0}$)

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, $x_0\in\Re\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

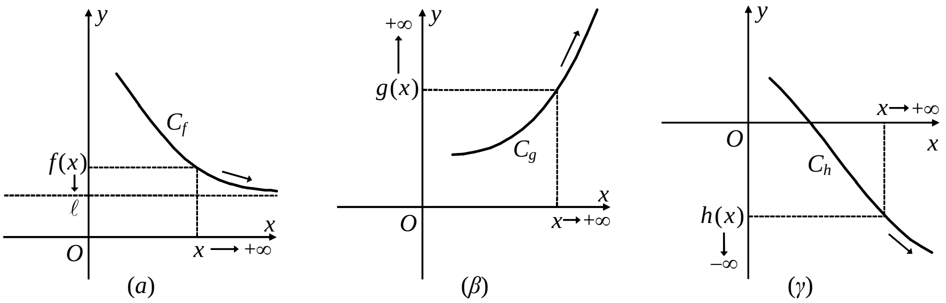
ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (μορφή $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$)

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$, $x_0\in\Re\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

(ΤΑ ΔΥΟ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΣΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΣΤΙΣ ΣΕΛΙΔΕΣ 282-283)

3. ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Στα παρακάτω σχήματα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις τριών συναρτήσεων f,g,h σε ένα διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$.



Παρατηρούμε ότι καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα με οποιονδήποτε τρόπο,

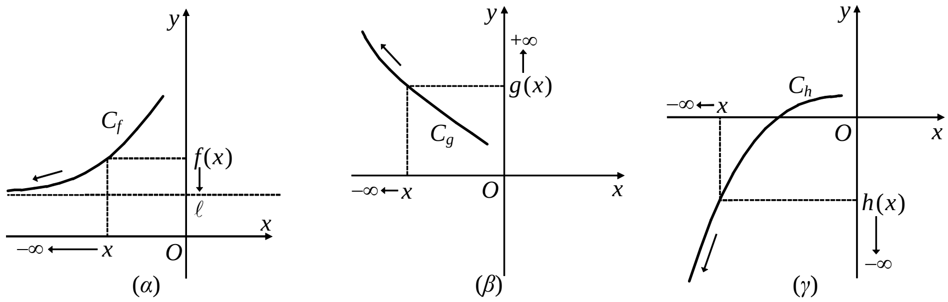
- το $f(x)$ προσεγγίζει όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f έχει στο $+\infty$ όριο το ℓ και γράφουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$
- το $g(x)$ αυξάνεται απεριόριστα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η g έχει στο $+\infty$ όριο το $+\infty$ και γράφουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$
- το $h(x)$ μειώνεται απεριόριστα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η h έχει στο $+\infty$ όριο το $-\infty$ και γράφουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=-\infty$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $+\infty$, πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$.

Ανάλογοι ορισμοί μπορούν να διατυπωθούν, όταν $x \to -\infty$ για μια συνάρτηση που είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(-\infty, \beta)$.

΄Ετσι, για τις συναρτήσεις f, g, h των παρακάτω σχημάτων έχουμε:



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ $\quad$ $\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ και $\lim_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$.

- Για τον υπολογισμό του ορίου στο $+\infty$ ή $-\infty$ ενός μεγάλου αριθμού συναρτήσεων χρειαζόμαστε τα παρακάτω βασικά όρια: $\lim_{x \to +\infty} x^\nu = +\infty$ και

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^\nu} = \mathbf{0}, \quad \nu \in N^* \quad \lim_{x \to -\infty} x^\nu = \begin{cases} +\infty, & \alpha\nu \quad \nu \quad \textbf{ά}\rho\tau\iota o\varsigma \\ -\infty, & \alpha\nu \quad \nu \quad \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\textbf{ό}\varsigma \end{cases} \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0, \quad \nu \in N^*.$$

- Για τα όρια στο $+\infty$, $-\infty$ ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των ορίων στο x_0 με την προϋπόθεση ότι:
  - οι συναρτήσεις είναι ορισμένες σε κατάλληλα σύνολα και
  - δεν καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή.

♦ **<u>Όριο πολυωνυμικής και ρητής συνάρτησης</u>**

Για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0$, με $\alpha_\nu \neq 0$ ισχύει: $\lim_{x \to +\infty} P(x) = \lim_{x \to +\infty} (\alpha_\nu x^\nu)$ και $\lim_{x \to -\infty} P(x) = \lim_{x \to -\infty} (\alpha_\nu x^\nu)$

♦ **<u>Όριο ρητής συνάρτησης:</u>**

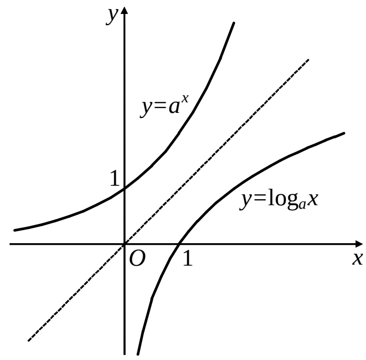
Για τη ρητή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\kappa x^\kappa + \beta_{\kappa-1} x^{\kappa-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0}$,

$\alpha_\nu \neq 0$, $\beta_\kappa \neq 0$ ισχύει:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa} \right) \text{ και } \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa} \right)$$

♦Όρια εκθετικής - λογαριθμικής συνάρτησης

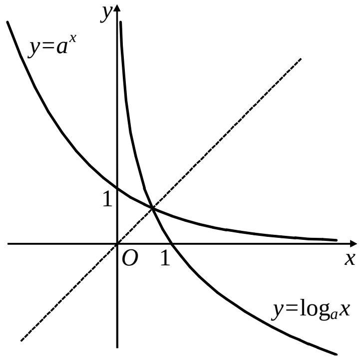
Αποδεικνύεται ότι:



• Αν $\alpha > 1$ (Σχ. 60), τότε

$$\lim_{x\to-\infty}\alpha^x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\alpha^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\log_\alpha x = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\log_\alpha x = +\infty$$



• Αν $0 < \alpha < 1$ (Σχ. 61), τότε

$$\lim_{x\to-\infty}\alpha^x = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\alpha^x = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\log_\alpha x = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\log_\alpha x = -\infty$$

Πεπερασμένο όριο ακολουθίας

Η έννοια της ακολουθίας είναι γνωστή από προηγούμενες τάξεις. Συγκεκριμένα:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha : N^* \to \Re$.

Η εικόνα $\alpha(\nu)$ της ακολουθίας α συμβολίζεται συνήθως με α_ν, ενώ η ακολουθία α συμβολίζεται με (α_ν). Για παράδειγμα, η συνάρτηση $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$, $\nu \in N^*$ είναι μια ακολουθία.

Επειδή το πεδίο ορισμού κάθε ακολουθίας, είναι το $N^* = \{1,2,3,4,\ldots\}$, έχει νόημα να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της για πολύ μεγάλες τιμές του ν, δηλαδή όταν $\nu \to +\infty$.

Ο ορισμός του ορίου ακολουθίας είναι ανάλογος του ορισμού του ορίου συνάρτησης στο $+\infty$ και διατυπώνεται ως εξής:

ΟΡΙΣΜΟΣ

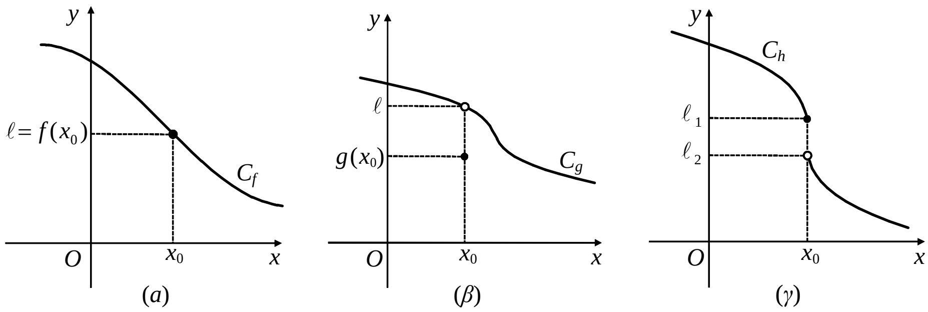
Θα λέμε ότι η ακολουθία (α_ν) έχει όριο το $\ell \in \Re$ και θα γράφουμε $\lim\limits_{\nu\to\infty}\alpha_\nu = \ell$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\nu_0 \in N^*$ τέτοιο, ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ να ισχύει $|\alpha_\nu - \ell| < \varepsilon$

Οι γνωστές ιδιότητες των ορίων συναρτήσεων όταν $x \to +\infty$, που μελετήσαμε στα προηγούμενα, ισχύουν και για τις ακολουθίες. Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων αυτών μπορούμε να υπολογίζουμε όρια ακολουθιών.

3. ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός της συνέχειας

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στα παρακάτω σχήματα.



Παρατηρούμε ότι:

- Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο x_0 και ισχύει: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- Η συνάρτηση g είναι ορισμένη στο x_0 αλλά $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq g(x_0)$.
- Η συνάρτηση h είναι ορισμένη στο x_0 αλλά δεν υπάρχει το όριό της.

Από τις τρεις γραφικές παραστάσεις του σχήματος μόνο η γραφική παράσταση της f δε διακόπτεται στο x_0. Είναι, επομένως, φυσικό να ονομάσουμε **συνεχή στο** x_0 μόνο τη συνάρτηση f. Γενικά, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο** x_0, όταν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Μία συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέγεται, απλά, **συνεχής συνάρτηση**.

Για παράδειγμα:

- **Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση *P* είναι συνεχής**, αφού για κάθε $x_0 \in \Re$ ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$.

- **Κάθε ρητή συνάρτηση** $\frac{P}{Q}$ **είναι συνεχής**, αφού για κάθε x_0 του πεδίου ορισμού της ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.
- **Οι συναρτήσεις** $f(x)=\eta\mu x$ **και** $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$ **είναι συνεχείς**, αφού για κάθε $x_0\in\Re$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}\eta\mu x=\eta\mu x_0$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu x_0$.
- **Οι συναρτήσεις** $f(x)=\alpha^x$ **και** $g(x)=\log_\alpha x$**,** $0<\alpha\neq 1$**είναι συνεχείς.**

<u>Πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις</u>

Από τον ορισμό της συνέχειας στο x_0 και τις ιδιότητες των ορίων προκύπτει το παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0, τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις:

$f+g$, $c\cdot f$, όπου $c\in\Re$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$, $|f|$ και $\sqrt[\nu]{f}$

με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0.

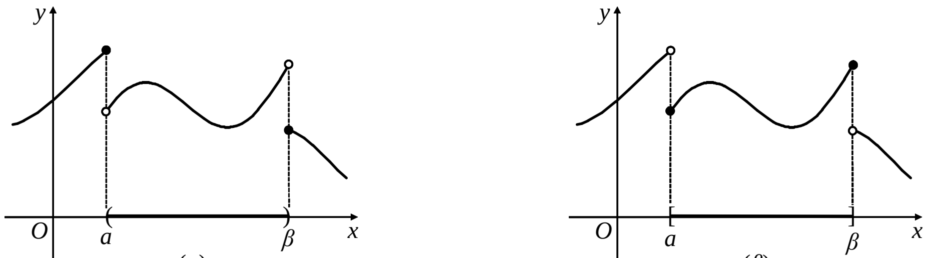
ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0

<u>Συνέχεια συνάρτησης σε διάστημα και βασικά θεωρήματα</u>

ΟΡΙΣΜΟΣ

- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα** (α,β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β). (Σχ.α)
- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα** $[\alpha,\beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον $\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)=f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x)=f(\beta)$ (Σχ.β)

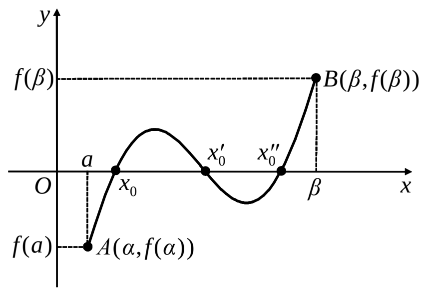


(α) (β)

Ανάλογοι ορισμοί διατυπώνονται για διαστήματα της μορφής $(\alpha,\beta]$, $[\alpha,\beta)$.

Θεώρημα του Bolzano

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή τα σημεία Α(α,f(α)) και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.



ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$
Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$,

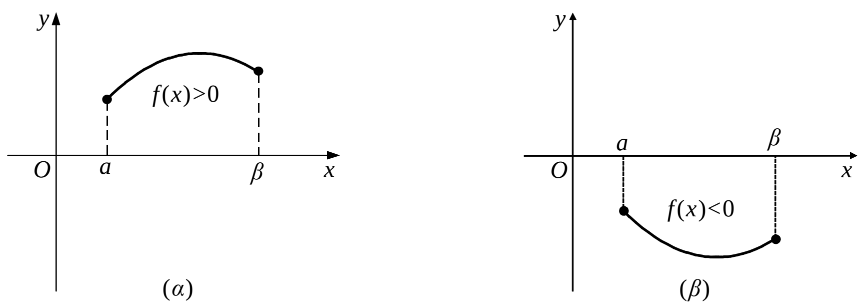
τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα (α,β).

ΣΧΟΛΙΟ

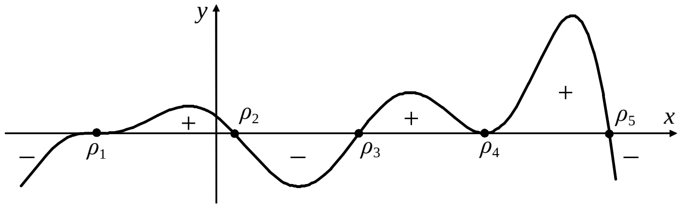
Από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι:

- Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα *Δ* και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x\in\Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x\in\Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα *Δ*.



(α) (β)

- Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από το διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.



Αυτό μας διευκολύνει στον προσδιορισμό του προσήμου της f για τις διάφορες τιμές του x. Συγκεκριμένα, ο προσδιορισμός αυτός γίνεται ως εξής:

α) Βρίσκουμε τις ρίζες της f.

β) Σε καθένα από τα υποδιαστήματα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες, επιλέγουμε έναν αριθμό και βρίσκουμε το πρόσημο της f στον αριθμό αυτό. Το πρόσημο αυτό είναι και το πρόσημο της f στο αντίστοιχο διάστημα.

<u>Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών</u>

ΘΕΩΡΗΜΑ

> Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:
>
> - η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
> - $f(\alpha)\neq f(\beta)$
>
> τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\eta$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

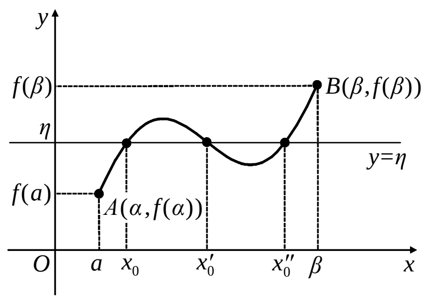
Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta$, $x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta)<0$,

αφού

$g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και

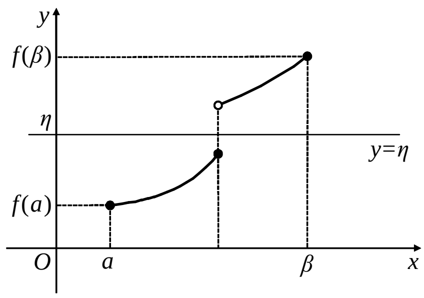
$g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$.



Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$.

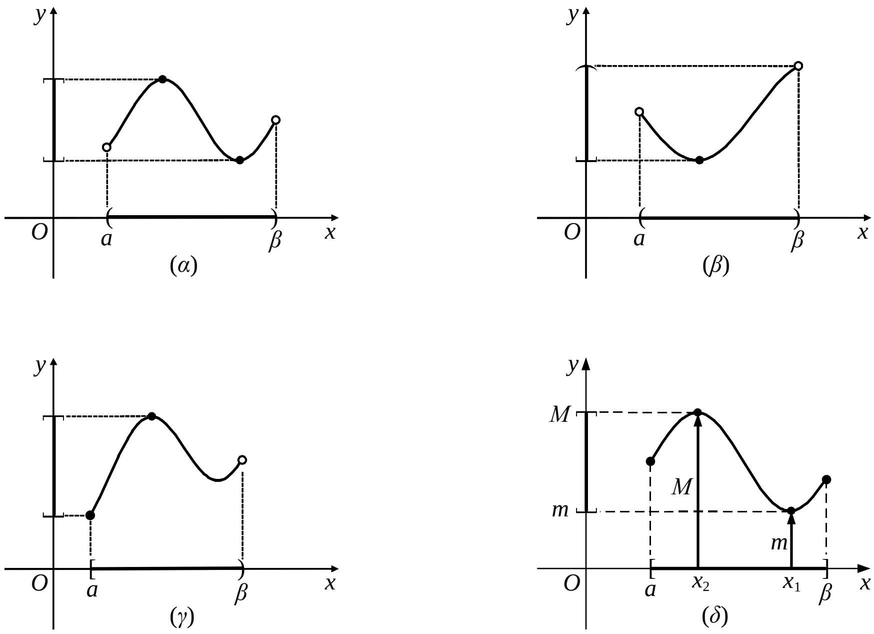
ΣΧΟΛΙΟ

Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.



• Με τη βοήθεια του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών αποδεικνύεται ότι:

Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.



Στην ειδική περίπτωση που το Δ είναι ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Μέγιστης και ελάχιστης τιμής)

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m. (Σχ.δ)

Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει : $m \le f(x) \le M$, **για κάθε** $x \in [\alpha,\beta]$.

ΣΧΟΛΙΟ

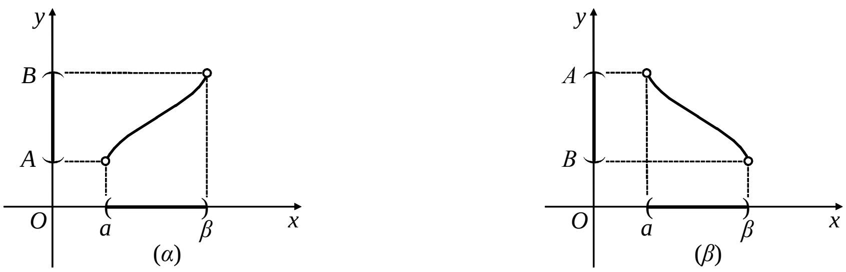
Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το **σύνολο τιμών** μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha,\beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $[m,M]$, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.

- Τέλος, αποδεικνύεται ότι:

Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** και **συνεχής** σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α,Β) (Σχ.α), όπου

$\mathrm{A}=\lim_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B=\lim_{x\to\beta^-} f(x)$.

Αν, όμως, η f είναι **γνησίως φθίνουσα** και **συνεχής** στο (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B,A) (Σχ.β).



Ανάλογα συμπεράσματα έχουμε και όταν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη σε διαστήματα της μορφής $[\alpha,\beta]$, $[\alpha,\beta)$ και $(\alpha,\beta]$.

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο** x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο** x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή: $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Αν στην ισότητα $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ θέσουμε $x=x_0+h$, τότε έχουμε τον ισοδύναμο ορισμό $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.
- Πολλές φορές το $h=x-x_0$ συμβολίζεται με Δx, ενώ το $f(x_0+h)-f(x_0)=\ f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ συμβολίζεται με $\Delta f(x_0)$, οπότε ο παραπάνω τύπος γράφεται: $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$.
- Η τελευταία ισότητα οδήγησε το Leibniz να συμβολίσει την παράγωγο στο x_0 με $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ ή $\dfrac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}$. Ο συμβολισμός $f'(x_0)$ είναι μεταγενέστερος και οφείλεται στον Lagrange.
- Είναι φανερό ότι, αν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της *f*, τότε:

> Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αν και μόνο αν υπάρχουν στο $\Re$ τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $\quad\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ίσα.

- Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t_0, είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x=S(t)$ τη χρονική στιγμή t_0. Δηλαδή, είναι: $\upsilon(t_0)=S'(t_0)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

> Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός *λ*, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της *A*, την ευθεία *ε* που διέρχεται από το *A* και έχει συντελεστή διεύθυνσης *λ*. Δηλαδή την ευθεία με εξίσωση : $y-f(x_0)=f'\left(x_0\right)(x-x_0)$

ΣΧΟΛΙΑ

- Την κλίση $f'(x_0)$ της εφαπτομένης *ε* στο $A(x_0, f(x_0))$ θα τη λέμε και **κλίση της C_f στο *A*** ή **κλίση της f στο** x_0.
- Αν μια συνάρτηση f **δεν** είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε **δεν ορίζουμε** εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

Κατακόρυφη εφαπτομένη (Είναι εκτός ύλης)

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x) - f(x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$, οπότε

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right]$$

$= \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim\limits_{x \to x_0} (x - x_0) \ = f'(x_0) \cdot 0 = 0$,(αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.)

Επομένως, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

ΣΧΟΛΙΑ

- Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει δηλαδή μια συνάρτηση μπορεί να είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 και να μην είναι παραγωγίσιμη x_0.
- Ισχύει όμως η αντιθετοαντιστροφή του παραπάνω θεωρήματος δηλαδή : αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0, τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ –ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

• Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A. Θα λέμε ότι:

— Η f είναι παραγωγίσιμη στο A ή, απλά, **παραγωγίσιμη**, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

— Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα** (α, β) του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

— Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα** $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x \to \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \Re \quad \text{και} \quad \lim_{x \to \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \Re .$$

• Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\begin{aligned} f' &: A_1 \to R \\ x &\to f'(x), \end{aligned}$$

η οποία ονομάζεται **πρώτη παράγωγος της f** ή απλά **παράγωγος της f**. Η πρώτη παράγωγος της f συμβολίζεται και με $\frac{df}{dx}$ που διαβάζεται “ντε εφ προς ντε χι”. Για πρακτικούς λόγους την παράγωγο συνάρτηση $y = f'(x)$ θα τη συμβολίζουμε και με $y = (f(x))'$. Αν υποθέσουμε ότι το A_1 είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων, τότε η παράγωγος της f', αν υπάρχει, λέγεται **δεύτερη παράγωγος της f** και συμβολίζεται με f''.

Επαγωγικά ορίζεται η **νιοστή παράγωγος της f**, με $\nu \geq 3$, και συμβολίζεται με $f^{(\nu)}$. Δηλαδή $f^{(\nu)} = [f^{(\nu-1)}]'$, $\nu \geq 3$.

Παράγωγος μερικών βασικών συναρτήσεων

• Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$, $c \in \Re$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ και ισχύει $f'(x) = 0$, δηλαδή $\boxed{(c)' = 0}$

Απόδειξη: Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\Re$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{c-c}{x-x_0} = 0$. Επομένως $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$, δηλαδή $(c)' = 0$.

• Έστω η συνάρτηση $f(x) = x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ και ισχύει $f'(x) = 1$, δηλαδή $\boxed{(x)' = 1}$

Απόδειξη: Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\Re$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1$. Επομένως $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} 1 = 1$, δηλαδή $(x)' = 1$.

• Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N} - \{0,1\}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ και ισχύει $f'(x) = \nu x^{\nu-1}$, δηλαδή $\boxed{(x^{\nu})' = \nu x^{\nu-1}}$

Απόδειξη: Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\Re$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^\nu - x_0^\nu}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1}$$

, οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})=x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\cdots+x_0^{\nu-1}=\nu x_0^{\nu-1}$$

, δηλαδή $(x^\nu)'=\nu x^{\nu-1}$.

• Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή $\boxed{\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$

Απόδειξη: Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}},$$ οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}},\ \text{δηλαδή}\ \left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: η $f(x)=\sqrt{x}$ **δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.**

• Έστω συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ και ισχύει $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$, δηλαδή $\boxed{(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x}$ (Χωρίς απόδειξη)

• Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ και ισχύει $f'(x)=-\eta\mu x$, δηλαδή $\boxed{(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x}$ (Χωρίς απόδειξη)

ΣΧΟΛΙΟ

Τα όρια $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$, $\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$,

τα οποία χρησιμοποιήσαμε για να υπολογίσουμε την παράγωγο των συναρτήσεων $f(x)=\eta\mu x$, $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι η παράγωγος στο $x_0=0$ των συναρτήσεων f,g αντιστοίχως, αφού

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x-\eta\mu 0}{x-0}=f'(0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu 0}{x-0}=g'(0).$$

• Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^x$. Αποδεικνύεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ και ισχύει $f'(x)=e^x$, δηλαδή $\boxed{(e^x)'=e^x}$ (Χωρίς απόδειξη)

• Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln x$. Αποδεικνύεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, δηλαδή $\boxed{(\ln x)'=\dfrac{1}{x}}$

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1

Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$

Απόδειξη: Για $x\neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

$=f'(x_0)+g'(x_0)$, δηλαδή $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα *Δ*, τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύει: $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$.
- Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Δηλαδή, αν $f_1, f_2,\dots, f_k$, είναι παραγωγίσιμες στο *Δ*, τότε $(f_1+f_2+\cdots+f_k)'(x)=f_1'(x)+f_2'(x)+\cdots+f_k'(x)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2

Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε και η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$

Απόδειξη: (Εκτός ύλης)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ’ ένα διάστημα *Δ*, τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει: $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
- Το παραπάνω θεώρημα επεκτείνεται και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Έτσι, για τρεις παραγωγίσιμες συναρτήσεις ισχύει:
  $(f(x)g(x)h(x))' = [(f(x)g(x)) \cdot h(x)]' = (f(x)g(x))' \cdot h(x) + (f(x)g(x)) \cdot h'(x)$
  $= [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]h(x) + f(x)g(x)h'(x)$
  $= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$.
- Αν f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση σ’ ένα διάστημα *Δ* και $c \in \Re$, επειδή $(c)' = 0$, σύμφωνα με το θεώρημα (2) έχουμε:
  $\boxed{(cf(x))' = cf'(x)}$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\dfrac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Η απόδειξη παραλείπεται. (Εκτός ύλης)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ’ ένα διάστημα *Δ* και για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $g(x) \neq 0$, τότε για κάθε $x \in \Delta$

έχουμε: $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$.

Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες προτάσεις μπορούμε τώρα να βρούμε τις παραγώγους μερικών ακόμη βασικών συναρτήσεων.

• Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re^*$ και ισχύει $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή

$\boxed{(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}}$

Απόδειξη: Πράγματι, για κάθε $x \in \Re^*$

έχουμε: $(x^{-\nu})' = \left(\dfrac{1}{x^{\nu}}\right)' = \dfrac{(1)'x^{\nu} - 1(x^{\nu})'}{(x^{\nu})^2} = \dfrac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Είδαμε, όμως, πιο πριν ότι $(x^{\nu})' = \nu x^{\nu-1}$, για κάθε φυσικό $\nu > 1$.

Επομένως, αν $\kappa \in \mathbb{Z} - \{0,1\}$, τότε $\boxed{(x^{\kappa})' = \kappa x^{\kappa-1}}$.

• Έστω η συνάρτήση $f(x) = \varepsilon\phi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re_1 = \Re - \{x | \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή

$$\boxed{(\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}$$

Απόδειξη: Πράγματι, για κάθε $x \in \Re_1$ έχουμε:

$$(\varepsilon\phi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

• Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re_2 = \Re - \{x | \eta\mu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = -\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$, δηλαδή

$$\boxed{(\sigma\phi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Γενικά, αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Δηλαδή, αν $u = g(x)$, τότε $(f(u))' = f'(u) \cdot u'$.
- Με το συμβολισμό του Leibniz, αν $y = f(u)$ και $u = g(x)$, έχουμε τον τύπο $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ που είναι γνωστός ως κανόνας της αλυσίδας.
  ΠΡΟΣΟΧΗ!!!!

Το σύμβολο $\frac{dy}{dx}$ δεν είναι πηλίκο. Στον κανόνα της αλυσίδας απλά συμπεριφέρεται ως πηλίκο, πράγμα που ευκολύνει την απομνημόνευση του κανόνα.

Άμεση συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος είναι τα εξής:

• Η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha \in \Re - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή $\boxed{(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}}$

Απόδειξη: Πράγματι, αν $y=x^{\alpha}=e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u=\alpha \ln x$, τότε έχουμε $y=e^{u}$. Επομένως, $y'=(e^{u})'=e^{u}\cdot u'=e^{\alpha \ln x}\cdot \alpha \cdot \frac{1}{x}=x^{\alpha}\cdot \frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$.

• Η συνάρτηση $f(x)=\alpha^{x}$, $\alpha>0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ και ισχύει $f'(x)=\alpha^{x}\ln \alpha$, δηλαδή $\boxed{(\alpha^{x})'=\alpha^{x}\ln \alpha}$

Απόδειξη: Πράγματι, αν $y=\alpha^{x}=e^{x\ln \alpha}$ και θέσουμε $u=x\ln \alpha$, τότε έχουμε $y=e^{u}$. Επομένως, $y'=(e^{u})'=e^{u}\cdot u'=e^{x\ln \alpha}\cdot \ln \alpha=\alpha^{x}\ln \alpha$.

• Η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in \Re^{*}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\Re^{*}$ και ισχύει $\boxed{(\ln|x|)'=\frac{1}{x}}$

Απόδειξη: Πράγματι·

— αν $x>0$, τότε $(\ln|x|)'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$, ενώ

— αν $x<0$, τότε $\ln|x|=\ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y=\ln(-x)$ και $u=-x$, έχουμε $y=\ln u$. Επομένως, $y'=(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x}$

και άρα $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$.

Ανακεφαλαιώνοντας, αν η συνάρτηση $u=f(x)$ είναι παραγωγίσιμη, τότε έχουμε:

$(u^{\alpha})'=\alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$	$(\varepsilon\varphi u)'=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^{2}u}\cdot u'$
$(\sqrt{u})'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$	$(\sigma\varphi u)'=-\frac{1}{\eta\mu^{2}u}\cdot u'$
$(\eta\mu u)'=\sigma\upsilon\nu u\cdot u'$	$(e^{u})'=e^{u}\cdot u'$
$(\sigma\upsilon\nu u)'=-\eta\mu u\cdot u'$	$(\alpha^{u})'=\alpha^{u}\ln \alpha\cdot u'$

$(\ln\|u\|)' = \frac{1}{u}\cdot u'$

ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής του *y* ως προς το *x* στο σημείο** x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t_0, είναι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης θέσης $x = S(t)$ τη χρονική στιγμή t_0. Δηλαδή, είναι: $\upsilon(t_0) = S'(t_0)$.
- Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας υ ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 είναι η παράγωγος $\upsilon'(t_0)$, της ταχύτητας υ ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0. Η παράγωγος $\upsilon'(t_0)$ λέγεται **επιτάχυνση** του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και συμβολίζεται με $\alpha(t_0)$. Είναι δηλαδή $\alpha(t_0) = \upsilon'(t_0) = S''(t_0)$.
- Στην οικονομία, το κόστος παραγωγής K, η είσπραξη E και το κέρδος P εκφράζονται συναρτήσει της ποσότητας x του παραγόμενου προϊόντος. Έτσι, η παράγωγος $K'(x_0)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κόστους K ως προς την ποσότητα x, όταν $x = x_0$ και λέγεται **οριακό κόστος στο** x_0**.** Ανάλογα, ορίζονται και οι έννοιες **οριακή είσπραξη στο** x_0 και **οριακό κέρδος στο** x_0**.**

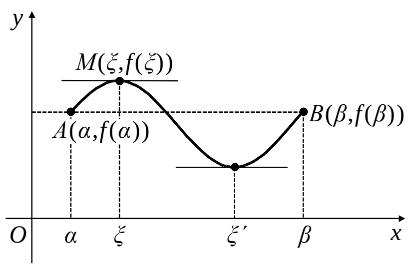
ΘΕΩΡΗΜΑ (Rolle)

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) και
- $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = 0$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.



ΘΕΩΡΗΜΑ (Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού Θ.Μ.Τ.)

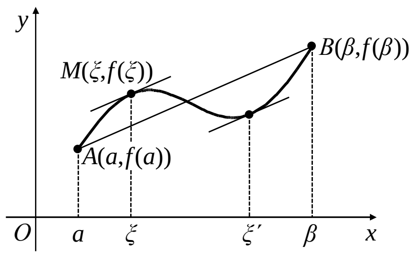
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB.



<u>Συνέπειες του Θεωρήματος της Μέσης τιμής</u>

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ (Σταθερής Συνάρτησης)</u>

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο x του Δ,

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \quad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$,οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

ΠΟΡΙΣΜΑ

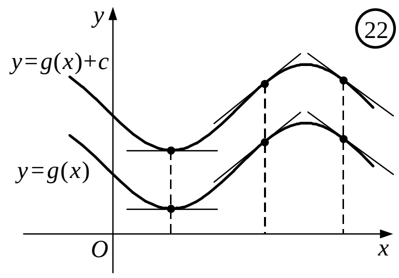
Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα *Δ*. Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο *Δ* και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε *εσωτερικό* σημείο *x* του *Δ*,

τότε υπάρχει σταθερά *c* τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$f(x) = g(x) + c$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο *Δ* και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο *Δ*. Άρα, υπάρχει σταθερά *C* τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$, οπότε $f(x) = g(x) + c$.

ΣΧΟΛΙΟ

Το παραπάνω θεώρημα καθώς και το πόρισμά του ισχύουν σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.

Μονοτονία συνάρτησης

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση *f*, η οποία είναι *συνεχής* σε ένα διάστημα *Δ*.

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο *x* του *Δ*, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το *Δ*.
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο *x* του *Δ*, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το *Δ*.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$,

οπότε έχουμε: $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

• Στην περίπτωση που είναι $f'(x)<0$ εργαζόμαστε αναλόγως.

ΣΧΟΛΙΟ

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος **δεν ισχύει**. Δηλαδή, αν η *f* είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο *Δ*, η παράγωγός της **δεν είναι υποχρεωτικά** θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του *Δ*.

Ολοκληρωτικός Λογισμός

Αρχική συνάρτηση

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω *f* μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα *Δ*. **Αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα της *f* στο *Δ***[(1)] ονομάζεται κάθε συνάρτηση *F* που είναι παραγωγίσιμη στο *Δ* και ισχύει $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα *Δ*. Αν *F* είναι μια παράγουσα της f στο *Δ*, τότε

• όλες οι συναρτήσεις της μορφής : $G(x)=F(x)+c$, $c\in\Re$, είναι παράγουσες της *f* στο *Δ* και

• κάθε άλλη παράγουσα G της f στο *Δ* παίρνει τη μορφή

$G(x)=F(x)+c,\quad c\in\Re$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

• Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x)=F(x)+c$, όπου $c\in\Re$, είναι μια παράγουσα της *f* στο *Δ*, αφού $G'(x)=(F(x)+c)'=F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

• Έστω *G* είναι μια άλλη παράγουσα της f στο *Δ*. Τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύουν $F'(x)=f(x)$ και $G'(x)=f(x)$, οπότε

$G'(x)=F'(x)$, για κάθε $x\in\Delta$. Άρα, σύμφωνα με το πόρισμα του Θεωρήματος Σταθερής Συνάρτησης, υπάρχει σταθερά *c* τέτοια, ώστε $G(x)=F(x)+c$, για κάθε $x\in\Delta$.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΑΡΑΓΟΥΣΩΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Α/Α	**Συνάρτηση**	**Παράγουσες**
1	$f(x)=0$	$G(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$,

[(1)]Αποδεικνύεται ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα *Δ* έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.

2	$f(x)=1$	$G(x)=x+c,\ c\in\mathbb{R}$
3	$f(x)=\frac{1}{x}$	$G(x)=\ln\lvert x\rvert+c,\ c\in\mathbb{R}$
4	$f(x)=x^{\alpha}$	$G(x)=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c, c\in\Re$
5	$f(x)=\sigma\upsilon\nu x$	$G(x)=\eta\mu x+c, c\in\Re$
6	$f(x)=\eta\mu x$	$G(x)=-\sigma\upsilon\nu x+c, c\in\Re$
7	$f(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$G(x)=\varepsilon\varphi x+c,\ c\in\mathbb{R}$
8	$f(x)=\frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$G(x)=-\sigma\varphi x+c,\ c\in\mathbb{R}$
9	$f(x)=e^{x}$	$G(x)=e^{x}+c,\ c\in\mathbb{R}$
10	$f(x)=\alpha^{x}$	$G(x)=\frac{\alpha^{x}}{\ln\alpha}+c, c\in\Re$

Σημείωση:
*Οι τύποι του πίνακα αυτού ισχύουν σε κάθε **διάστημα** στο οποίο οι παραστάσεις του x που εμφανίζονται έχουν νόημα.*

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑΣ ΠΑΡΑΓΟΥΣΩΝ

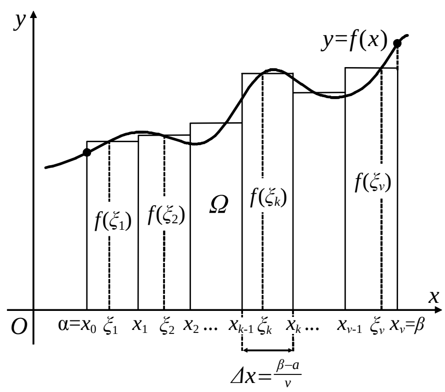
Αν οι συναρτήσεις F και G είναι παράγουσες των f και g αντιστοίχως και ο λ είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε:

i) Η συνάρτηση $F+G$ είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $f+g$ και

ii) Η συνάρτηση λF είναι μια παράγουσα της συνάρτησης λf .

Εμβαδόν παραβολικού χώρου

Ορισμός εμβαδού



Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$, με $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της *f*, τον άξονα των *x* και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$. Για να ορίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω (Διπλανό σχήμα)

- Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x=\frac{\beta-\alpha}{\nu}$, με τα σημεία $\alpha=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_\nu=\beta$.

• Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{\kappa-1}, x_\kappa]$ επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο ξ_κ και σχηματίζουμε τα ορθογώνια που έχουν βάση Δx και ύψη τα $f(\xi_\kappa)$. Το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι

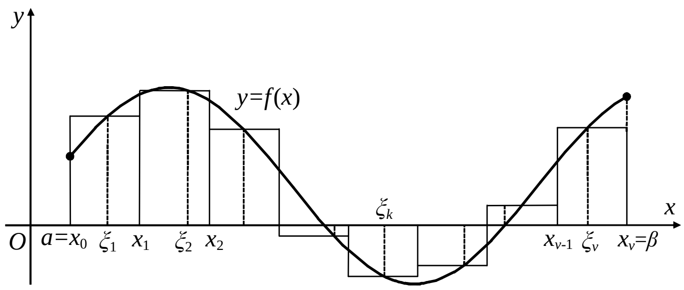
$S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_\nu)\Delta x = [f(\xi_1) + \cdots + f(\xi_\nu)]\Delta x$.

• Υπολογίζουμε το $\lim_{\nu\to+\infty} S_\nu$.

Αποδεικνύεται ότι το $\lim_{\nu\to\infty} S_\nu$ υπάρχει στο $\Re$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων ξ_κ. Το όριο αυτό ονομάζεται εμβαδόν του επιπέδου χωρίου Ω και συμβολίζεται με $\mathrm{E}(\Omega)$. Είναι φανερό ότι $\mathrm{E}(\Omega) \geq 0$.

Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος

Έστω μια συνάρτηση f σ υ ν ε χ ή ς στο $[\alpha, \beta]$. Με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta$ χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \dfrac{\beta - \alpha}{\nu}$.



Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_\kappa \in [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, για κάθε $\kappa \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα $S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_\kappa)\Delta x + \cdots + f(\xi_\nu)\Delta x$

το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής: $S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x$ [1].

Αποδεικνύεται ότι, “Το όριο του αθροίσματος S_ν, δηλαδή το $\lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$ (1) υπάρχει στο $\Re$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_κ”.

Το παραπάνω όριο (1) ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β, συμβολίζεται με $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ και διαβάζεται “ολοκλήρωμα της f από το α στο β”. Δηλαδή,

$$\boxed{\int_\beta^\alpha f(x)dx = \lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)}$$

[1] Το άθροισμα αυτό ονομάζεται ένα άθροισμα RIEMANN.

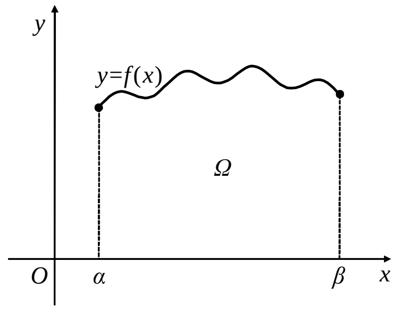
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Το σύμβολο $\int$ οφείλεται στον Leibniz και ονομάζεται σύμβολο ολοκλήρωσης. Αυτό είναι επιμήκυνση του αρχικού γράμματος S της λέξης Summa (άθροισμα).
- Οι αριθμοί α και β ονομάζονται όρια της ολοκλήρωσης. Η έννοια "όρια" εδώ δεν έχει την ίδια έννοια του ορίου του 2ου κεφαλαίου.
- Στην έκφραση $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ το γράμμα x είναι μια μεταβλητή και μπορεί να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε άλλο γράμμα. Έτσι, για παράδειγμα, οι εκφράσεις $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, $\int_\alpha^\beta f(t)dt$ συμβολίζουν το ίδιο ορισμένο ολοκλήρωμα και είναι πραγματικός αριθμός.

Είναι, όμως, χρήσιμο να επεκτείνουμε τον παραπάνω ορισμό και για τις περιπτώσεις που είναι $\alpha > \beta$ ή $\alpha = \beta$, ως εξής:

- $\int_\alpha^\beta f(x)dx = -\int_\beta^\alpha f(x)dx$
- $\int_\alpha^\alpha f(x)dx = 0$

Από τους ορισμούς του εμβαδού και του ορισμένου ολοκληρώματος προκύπτει ότι:



Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ δίνει το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ (διπλανό σχήμα). Δηλαδή, $\int_\alpha^\beta f(x)dx = E(\Omega)$. Επομένως: $\boxed{\text{Αν } f(x) \geq 0,}$ $\boxed{\text{τότε } \int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0.}$

<u>Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος</u>

ΘΕΩΡΗΜΑ 1^o (γραμμικότητα)

Έστω f, g σ υ ν ε χ ε ί ς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ και $\lambda, \mu \in \Re$. Τότε ισχύουν :

- $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx = \lambda \int_\alpha^\beta f(x)dx$
- $\int_\alpha^\beta [f(x)+g(x)]dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx$

και γενικά

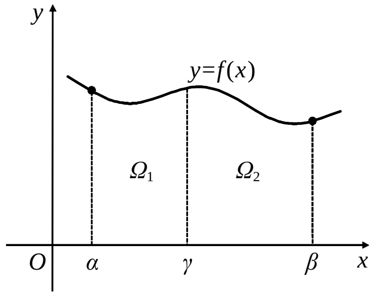
- $\int_\alpha^\beta [\lambda f(x)+\mu g(x)]dx = \lambda \int_\alpha^\beta f(x)dx + \mu \int_\alpha^\beta g(x)dx$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

Αν η f είναι σ υ ν ε χ ή ς σε διάστημα *Δ* και $\alpha,\beta,\gamma \in \Delta$, τότε ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Αν $f(x) \geq 0$ και $\alpha < \gamma < \beta$ (διπλανό σχήμα)), η παραπάνω ιδιότητα δηλώνει ότι: $\text{E}(\Omega) = \text{E}(\Omega_1) + \text{E}(\Omega_2)$



Αφού $\text{E}(\Omega_1) = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx, \text{E}(\Omega_2) = \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$ και

$\text{E}(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3ο

Έστω f μια σ υ ν ε χ ή ς συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$.

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$

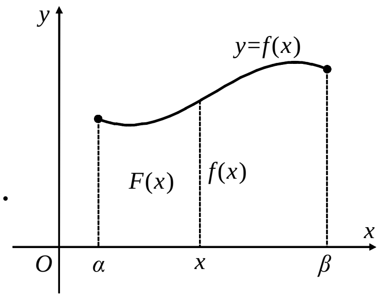
ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα *Δ* και *α* είναι ένα σημείο του *Δ*, τότε η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt,\ x \in \Delta$, είναι μια παράγουσα της f στο *Δ*. Δηλαδή ισχύει:

$$\left(\int_{a}^{x} f(t)dt\right)' = f(x), \quad \text{για κάθε} \quad x \in \Delta.$$

ΣΧΟΛΙΑ

- Εποπτικά το συμπέρασμα του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει (διπλανό σχήμα) ως εξής:



$F(x+h) - F(x) = \int_{x}^{x+h} f(t)dt$ = Εμβαδόν του χωρίου *Ω*.

$\approx f(x) \cdot h$, για μικρά $h > 0$. Άρα, για μικρά $h > 0$

είναι $\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} \approx f(x)$, οπότε

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

• Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης προκύπτει ότι: $\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt\right)' = f(g(x))\cdot g'(x)$, με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ (*<u>Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού</u>*)

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta)-G(\alpha)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει $c\in\Re$ τέτοιο, ώστε $G(x)=F(x)+c$.(1)

Από την (1), για $x=\alpha$, έχουμε $G(\alpha)=F(\alpha)+c=\int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt+c=c$, οπότε $c=G(\alpha)$.

Επομένως, $G(x)=F(x)+G(\alpha)$, οπότε, για $x=\beta$, έχουμε $G(\beta)=F(\beta)+G(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt+G(\alpha)$ και άρα

$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta)-G(\alpha)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Πολλές φορές, για να απλοποιήσουμε τις εκφράσεις μας, συμβολίζουμε τη διαφορά $G(\beta)-G(\alpha)$ με $[G(x)]_{\alpha}^{\beta}$, οπότε η ισότητα του παραπάνω θεωρήματος γράφεται $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=[G(x)]_{\alpha}^{\beta}$.

<u>Μέθοδοι ολοκλήρωσης</u>

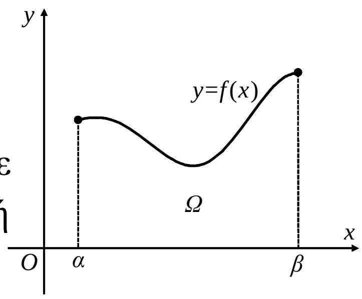
- *Κατά παράγοντες*

$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx=[f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$, όπου f',g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$.

- Αλλαγή μεταβλητής (ή Αντικατάσταση)

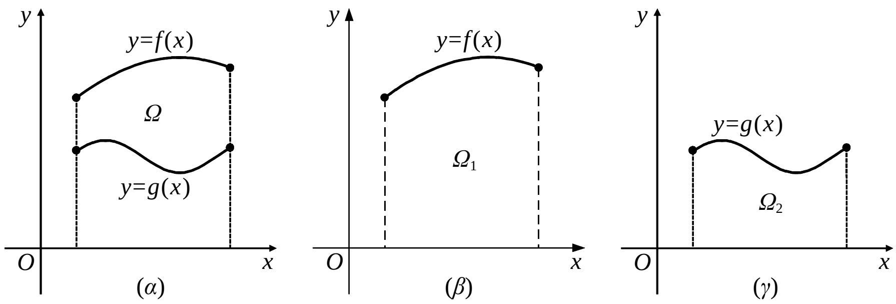
$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du}$$, όπου f, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ και $u_1 = g(\alpha)$, $u_2 = g(\beta)$.

ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΧΩΡΙΟΥ



• Στον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος είδαμε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα $x'x$ είναι: $\boxed{E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx}$

• Έστω, τώρα, δυο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\ge g(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$



Παρατηρούμε ότι

$$\mathrm{E}(\Omega)=\mathrm{E}(\Omega_1)-\mathrm{E}(\Omega_2)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx-\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx.$$

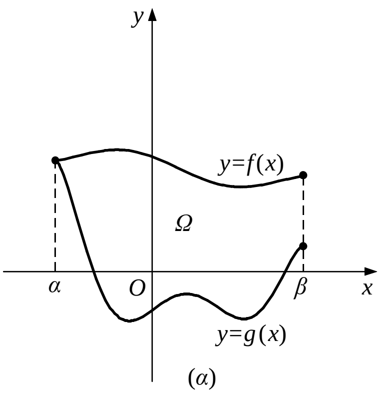
Επομένως, $\boxed{E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx}$ (1)

• Ο τύπος (1) βρέθηκε με την προϋπόθεση ότι:

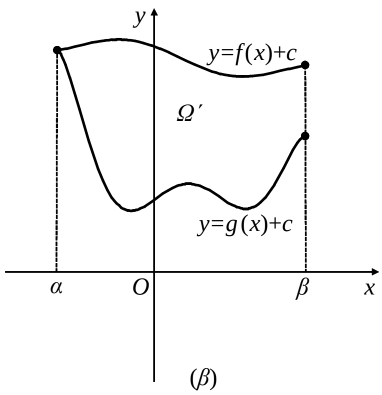
(i) $f(x)\ge g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και

(ii) οι f, g είναι μη αρνητικές στο $[\alpha,\beta]$.

Θα αποδείξουμε, τώρα, ότι ο τύπος (1) ισχύει και χωρίς την υπόθεση (ii). Πράγματι, επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει αριθμός $c\in\Re$ τέτοιος ώστε $f(x)+c\ge g(x)+c\ge 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Είναι φανερό ότι το χωρίο Ω (Σχ. α) έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο Ω' (Σχ. β).



(α)



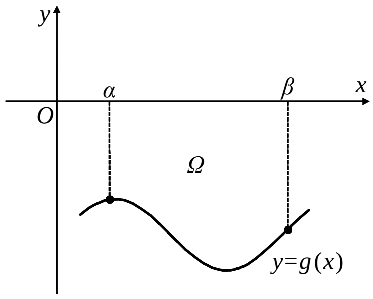
(β)

Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο (1), έχουμε:

$$\mathrm{E}(\Omega)=\mathrm{E}(\Omega')=\int_{\alpha}^{\beta}[(f(x)+c)-(g(x)+c)]dx=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx.$$

Άρα, $\boxed{E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx}$

• Με τη βοήθεια του προηγούμενου τύπου μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του χωρίου *Ω* που περικλείεται από τον άξονα $x'x$, τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης *g*, με $g(x)\leq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$. Πράγματι, επειδή ο άξονας $x'x$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=0$, έχουμε

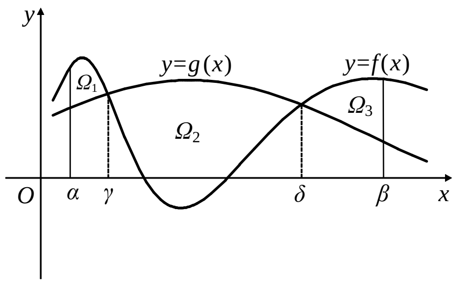


$$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx=\int_{\alpha}^{\beta}[-g(x)]dx=-\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx.$$

Επομένως, αν για μια συνάρτηση *g* ισχύει $g(x)\leq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$,

τότε $\boxed{E(\Omega)=-\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx}$

• Όταν η διαφορά $f(x)-g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου *Ω* που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων Ω_1,Ω_2 και Ω_3. Δηλαδή,



$$\mathrm{E}(\Omega)=\mathrm{E}(\Omega_1)+\mathrm{E}(\Omega_2)+\mathrm{E}(\Omega_3)$$

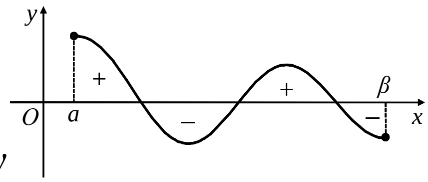
$$=\int_{\alpha}^{\gamma}(f(x)-g(x))dx+\int_{\gamma}^{\delta}(g(x)-f(x))dx+\int_{\delta}^{\beta}(f(x)-g(x))dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\gamma}|f(x)-g(x)|dx+\int_{\gamma}^{\delta}|f(x)-g(x)|dx+\int_{\delta}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx$$

Επομένως, $\boxed{E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|\,dx}$

ΣΧΟΛΙΟ



Σύμφωνα με τα παραπάνω το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$