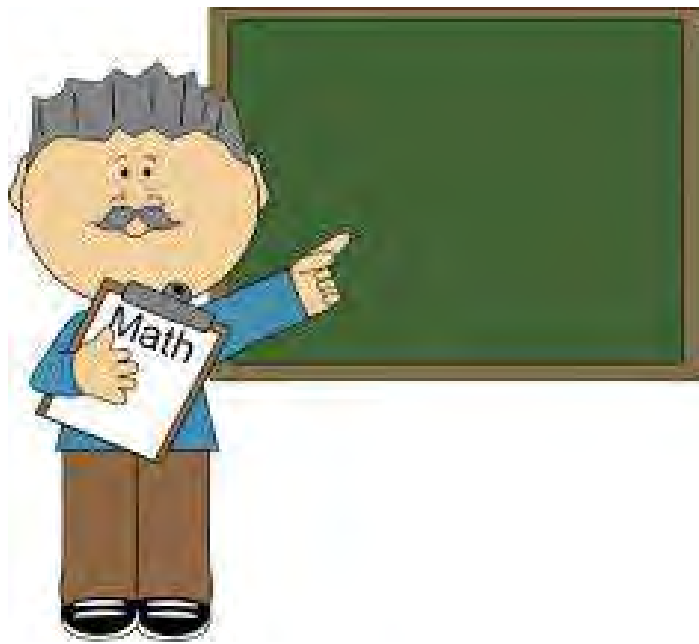


# Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου



Θέματα Εξετάσεων Ομογενών

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΚΑΡΑΦΕΡΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ  
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ  
ΤΡΙΤΗ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2013  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να αποδείξετε ότι για τους μιγαδικούς αριθμούς  $z_1, z_2$  ισχύει:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

**Μονάδες 10**

**A2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

**Μονάδες 5**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Αν  $z_1, z_2$  είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί με  $z_1 \neq z_2$ , τότε η εξίσωση

$$|z - z_1| = |z - z_2|$$

παριστάνει τη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία  $A(z_1)$  και  $B(z_2)$

**β.** Οι γραφικές παραστάσεις  $C$  και  $C'$  των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y = x$ .

**γ.** Αν  $0 < \alpha < 1$  τότε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty$

**δ.** Αν μια συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο  $x_0$ , τότε η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$

**ε.** Αν  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ , τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$$

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$  για τους οποίους ισχύει:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z-1}\right) = \frac{1}{2}$$

- B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$  είναι κύκλος με κέντρο  $K(2, 0)$  και ακτίνα  $\rho=1$ , εκτός από ένα σημείο του (μονάδες 7). Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου αυτού (μονάδες 2).

**Μονάδες 9**

- B2.** Αν  $z_1, z_2$  είναι δύο από τους μιγαδικούς αριθμούς του ερωτήματος B1, να αποδείξετε ότι:

$$|z_1 + z_2 - 4| \leq 2$$

**Μονάδες 8**

- B3.** Από τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$  του ερωτήματος B1, να βρεθούν εκείνοι για τους οποίους ισχύει:

$$|z| = \sqrt{5}$$

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x}{2} \ln^2 x + x$ ,  $x > 0$

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(0, +\infty)$ , και να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα.

**Μονάδες 8**

- Γ2.** Να βρείτε έναν θετικό ακέραιο αριθμό  $\alpha$  τέτοιο, ώστε στο διάστημα  $(\alpha, \alpha+1)$  η εξίσωση

$$f(x^4 + 2x) = f(4)$$

να έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

**Μονάδες 9**

- Γ3.** Να λύσετε στο διάστημα  $(0, +\infty)$  την ανίσωση

$$x \ln^2 x < 2 - 2x$$

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω η συνεχής συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$3 \int_1^x 2t f(t) dt + x^3 = 3x^2 f(x) + 3x - 8, \quad x > 0$$

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

**Μονάδες 6**

- Δ2.** Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}, \quad x > 0$$

(μονάδες 3) καθώς επίσης ότι η ευθεία με εξίσωση  $y = x$  είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$  (μονάδες 3).

**Μονάδες 6**

- Δ3.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , την ασύμπτωτη ( $y = x$ ) της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$  και τις ευθείες  $x = 1$  και  $x = e^2$

**Μονάδες 8**

- Δ4.** Να αποδείξετε ότι

$$f'(x) > \frac{f(x) - 2}{x - 1} \quad \text{για κάθε } x > 1$$

**Μονάδες 5**

**ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.

## ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.
5. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων και όχι πριν τις 17:00.

**ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ  
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ  
ΤΡΙΤΗ 4 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2012  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x)=\sqrt{x}$ ,  $x \geq 0$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

**Μονάδες 10**

**Α2.** Πότε μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται συνάρτηση 1-1;

**Μονάδες 5**

**Α3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Αν  $z \in \mathbb{C}$ , τότε  $z - \bar{z} = 2 \operatorname{Im}(z)$

**β.** Αν είναι  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$

**γ.** Ισχύει  $(\epsilon\phi x)' = -\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ ,  $x \in \mathbb{R} - \{x / \sigma\upsilon\nu x = 0\}$

**δ.** Αν οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$  και  $g(x_0) \neq 0$ , τότε και η συνάρτηση  $\frac{f}{g}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

- ε. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[α, β]$  και  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [α, β]$ , τότε  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$

**Μονάδες 10**

### ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$  για τους οποίους ισχύει

$$|iz - 1| = 1$$

- B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$  είναι ο κύκλος που έχει κέντρο το σημείο  $K(0, -1)$  και ακτίνα  $\rho=1$

**Μονάδες 9**

- B2.** Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς  $z$  να αποδείξετε ότι  $|z| \leq 2$

**Μονάδες 8**

- B3.** Αν  $z_1, z_2$  είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς  $z$  με  $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$  και  $A, B$  οι εικόνες των  $z_1, z_2$  αντίστοιχα, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $KAB$ , όπου  $K(0, -1)$ , είναι ορθογώνιο.

**Μονάδες 8**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^{2x} - 2x$ ,  $x \in \mathbb{R}$

- Γ1.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**Μονάδες 8**

- Γ2.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι κυρτή.

**Μονάδες 5**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x)=1$ ,  $x \in \mathbb{R}$  έχει ακριβώς μια ρίζα, το 0

**Μονάδες 5**

**Γ4.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$  και τις ευθείες  $y=1$  και  $x=1$

**Μονάδες 7**

### **ΘΕΜΑ Δ**

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-2}{x-2} = 2$
- $f(0)=2$  και
- η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(2)=f'(2)=2$

**Μονάδες 8**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $\xi \in (0, 2)$  τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $(\xi, f(\xi))$  να είναι παράλληλη προς τον άξονα  $x'x$

**Μονάδες 5**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) \geq f(\xi)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

**Μονάδες 4**

**Δ4.** Αν επιπλέον δίνεται ότι  $f(\xi) > 0$ , τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\int_1^x f(t) dt = x^2 - 2x, \quad x \in \mathbb{R}$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(0, 1)$

**Μονάδες 8**



**ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.
5. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων και όχι πριν τις 17:00.

**ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ  
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ  
ΤΡΙΤΗ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2011  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$ , τότε να αποδείξετε ότι είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

**Μονάδες 10**

**A2.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή στο  $\Delta$ ;

**Μονάδες 5**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Αν  $z \in \mathbb{C}$ , τότε  $\overline{(z^v)} = (\bar{z})^v$ ,  $v \in \mathbb{N}^*$

**β.** Αν  $f, g, h$  είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η  $ho(gof)$ , τότε ορίζεται και η  $(hog)of$  και ισχύει  $ho(gof) = (hog)of$

**γ.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

δ. Αν η  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ ,

$$\text{τότε ισχύει } \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$

ε. Αν  $0 < \alpha < 1$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Έστω  $w = z + \frac{4}{z}$ , όπου  $z$  μιγαδικός αριθμός με  $z \neq 0$

**B1.** Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z_1$  και  $z_2$  για τους οποίους ισχύει  $w=2$

**Μονάδες 6**

**B2.** Αν  $z_1 = 1+i\sqrt{3}$  και  $z_2 = 1-i\sqrt{3}$  είναι οι μιγαδικοί αριθμοί που βρήκατε στο ερώτημα B1, τότε να αποδείξετε ότι  $z_1^3 = z_2^3 = -8$

**Μονάδες 6**

**B3.** Αν  $z_1$  και  $z_2$  είναι οι μιγαδικοί αριθμοί του προηγούμενου ερωτήματος, τότε να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών  $z_1$ ,  $z_2$  και  $z_3 = \frac{z_1^3}{4}$  στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

**Μονάδες 8**

**B4.** Αν  $|z|=2$ , τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $w$  είναι πραγματικός.

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

**Μονάδες 7**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι κοίλη.

**Μονάδες 8**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι:

$$xf'(x) < f(x) + \ln 2, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω η συνεχής συνάρτηση  $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$2 \int_0^x f(t) dt = (\ln(x+1))^2, \quad x > -1$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+1}$ ,  $x > -1$

**Μονάδες 6**

**Δ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι:

$$(x+1)^e \leq e^{x+1}, \text{ για κάθε } x > -1$$

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και την ευθεία  $x = e - 1$

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι:

$$(x+1)^2 = 2^{x+1} \Leftrightarrow f(x) = f(1), \quad x > -1$$

και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$(x+1)^2 = 2^{x+1}, \quad x > -1$$

έχει δύο ακριβώς λύσεις, τις  $x=1$  και  $x=3$

**Μονάδες 7**

### **ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων και όχι πριν τις 17:00.

**ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ  
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ  
ΤΡΙΤΗ 14 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2010  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \varepsilon\varphi x$ ,  $x \in A$ ,  
όπου  $A = \mathbb{R} - \{x / \sigma\upsilon\nu x = 0\}$

Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}, \quad x \in A$$

**Μονάδες 10**

**A2.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 5**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.

**β)** Αν  $\alpha > 1$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty$

**γ)** Αν η συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι 1-1, τότε ισχύει

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in A$$

δ)  $\int \eta \mu x dx = \sigma \upsilon \nu x + c, c \in \mathbb{R}$

ε) Αν οι συναρτήσεις  $f', g'$  είναι συνεχείς σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε ισχύει

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) + \int f'(x)g(x)dx, x \in \Delta$$

**Μονάδες 10**

### **ΘΕΜΑ Β**

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί  $z$  για τους οποίους ισχύει

$$|z| = |z - 2i|$$

**B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$  στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ευθεία με εξίσωση  $\psi = 1$

**Μονάδες 7**

**B2.** Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς  $z$ , να βρείτε εκείνους που έχουν μέτρο ίσο με  $\sqrt{2}$

**Μονάδες 10**

**B3.** Έστω  $z_1 = 1 + i$  και  $z_2 = -1 + i$  οι μιγαδικοί αριθμοί που βρήκατε στο ερώτημα B2.

Να αποδείξετε ότι  $z_1^4 + z_2^4 = -8$

**Μονάδες 8**

### **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 3 \ln x, x > 0$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι κυρτή.

**Μονάδες 8**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι ο άξονας  $\psi'\psi$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$

**Μονάδες 7**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 2$  έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα  $(1, e)$

**Μονάδες 10**

### **ΘΕΜΑ Δ**

Έστω η παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$f'(x) = -f(x) + x, x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 0$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = e^x(f(x) - x + 1), x \in \mathbb{R}, \text{ είναι σταθερή.}$$

**Μονάδες 5**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = e^{-x} + x - 1, x \in \mathbb{R}$

**Μονάδες 7**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) \geq 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και την ευθεία  $x = 1$

**Μονάδες 7**



**ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.
5. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων και όχι πριν τις 17:00.

**ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ  
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ  
ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2009  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.**

- α.** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$ , να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση  $f+g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

**Μονάδες 10**

- β.** Πότε η ευθεία  $x=x_0$  λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$ ;

**Μονάδες 5**

- B.** Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς **1, 2, 3, 4** και **5** των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- 1.** Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών  $a+bi$  και  $c+di$  είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

**Μονάδες 2**

- 2.** Κάθε συνάρτηση που είναι 1-1 είναι γνησίως μονότονη.

**Μονάδες 2**

- 3.** Ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 0.$

**Μονάδες 2**

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

4. Η συνάρτηση  $f(x) = \ln|x|$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$ , είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}^*$  και ισχύει  $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ .

**Μονάδες 2**

5. Ισχύει:  $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ , όπου  $\alpha, c$  είναι πραγματικοί αριθμοί και  $\alpha \neq -1$ .

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός

$$z = \frac{1}{1+i} - \frac{i(i-3)}{2}.$$

- α. Να αποδείξετε ότι:

$$-\bar{z} = -1+i, \quad z^2 = 2i, \quad z^3 = -2+2i.$$

**Μονάδες 9**

- β. Αν  $A, B, \Gamma$  είναι οι εικόνες των μιγαδικών  $-\bar{z}, z^2, z^3$ , αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές.

**Μονάδες 9**

- γ. Να αποδείξετε ότι:

$$|z^3 - z^2|^2 = |z^2 + \bar{z}|^2 + |z^3 + \bar{z}|^2.$$

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = xe^{x-\alpha}$ , όπου  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- α. Να βρεθεί η τιμή του  $\alpha$ , ώστε η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $A(0, f(0))$  να είναι παράλληλη στην ευθεία  $y = ex$ .

**Μονάδες 10**

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

- β.** Για  $\alpha = -1$ ,
- i.** να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα,

**Μονάδες 10**

- ii.** να αποδείξετε ότι ο άξονας  $x'x$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $-\infty$ .

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x - 1 \text{ και } g(x) = \ln x, \quad x > 0.$$

- α.** Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) \geq g(x), \text{ για κάθε } x > 0.$$

**Μονάδες 8**

- β.** Αν  $h(x) = f(x) - g(x)$ , τότε:

- i.** Να αποδείξετε ότι:

$$0 \leq h(x) \leq e - 2, \text{ για κάθε } x \in [1, e].$$

**Μονάδες 7**

- ii.** Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $h$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = 1$  και  $x = e$ .

**Μονάδες 5**

- iii.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_1^e e^{h(x)} [h(x) + 1] h'(x) dx.$$

**Μονάδες 5**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.  
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνον με μπλε ή μαύρο στυλό διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης μελάνης**. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ  
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ  
ΤΡΙΤΗ 9 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2008  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.**

**α.** Αν  $z_1, z_2$  είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε να αποδείξετε ότι:  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ .

**Μονάδες 10**

**β.** Πότε δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  λέγονται ίσες;

**Μονάδες 5**

**B.** Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς **1, 2, 3, 4** και **5** των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη (**Σ**), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή ή (**Λ**), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.

**1.** Για τον μιγαδικό αριθμό  $z = a + \beta i$  με  $a, \beta \in \mathbb{R}$  ισχύει  $z = 0$  τότε και μόνον τότε, αν  $a = 0$  και  $\beta = 0$ .

**Μονάδες 2**

**2.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g$  με κοινό πεδίο ορισμού το σύνολο  $A$ . Τότε πάντα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

**Μονάδες 2**

**3.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  που είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ .

Αν  $f'(x) < 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ .

**Μονάδες 2**

4. Αν είναι  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$ , τότε  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ .

**Μονάδες 2**

5. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή σ' ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$ , σε κάθε σημείο του  $\Delta$  βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της  $f$  με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

**Μονάδες 2**

### ΘΕΜΑ 2ο

**A.** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z = k + (k + 1)i$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

**α.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του  $z$  είναι η ευθεία  $y = x + 1$ .

**Μονάδες 6**

**β.** Ποιοι από αυτούς τους μιγαδικούς αριθμούς έχουν  $|z|=1$ ;

**Μονάδες 9**

**B.** Αν για τους πραγματικούς αριθμούς  $\alpha, \beta$  ισχύει  $\alpha^2 + \beta^2 + 8 = (1 - i)^4\beta - (1 + i)^4\alpha$ , να δείξετε ότι  $\alpha = 2$  και  $\beta = -2$ .

**Μονάδες 10**

### ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \frac{x + \ln x}{x}$ ,  $x > 0$ .

**α.** Να μελετηθεί η συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**Μονάδες 10**

**β.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

**Μονάδες 8**

**γ.** Να υπολογίσετε το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$I = \int_1^{e^2} f(x)dx.$$

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \eta\mu x$ , όπου  $x \in \mathbb{R}$ .

α. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στο σημείο  $(0, f(0))$  της γραφικής παράστασης της  $f$ .

**Μονάδες 10**

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$  και τις ευθείες  $y = x$  και  $y = 1$ .

**Μονάδες 10**

γ. Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x > 0$  ισχύει η ανισότητα  $\eta\mu x > x - \frac{3}{2}x^2$ .

**Μονάδες 5**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοτυπιών αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.  
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τις φωτοτυπίες.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοτυπιών.
6. Για την κατασκευή των σχημάτων σε θέματα που απαιτείται, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοτυπιών και όχι πριν την 17.00.

**ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ



ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ  
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ  
ΤΡΙΤΗ 11 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2007  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.**

1. Έστω η συνάρτηση  $f(x)=\eta\mu x$ . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει:  $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$ .

**Μονάδες 10**

2. Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 5**

**B.** Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς 1, 2, 3, 4 και 5 των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη ( $\Sigma$ ), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή, ή ( $\Lambda$ ), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Για κάθε μιγαδικό αριθμό  $z$  και κάθε θετικό ακέραιο  $n$ , ισχύει:  $|z|^n = |z^n|$ .

**Μονάδες 2**

2. Ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$ .

**Μονάδες 2**

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

3. Αν μια συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής σ' ένα εσωτερικό σημείο  $x_0$  ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της, τότε η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .

**Μονάδες 2**

4. Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$  και  $g(x_0) \neq 0$ , τότε και η συνάρτηση  $\frac{f}{g}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

**Μονάδες 2**

5. Για κάθε συνάρτηση  $f$ , παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $\Delta$ , ισχύει:

$$\int f'(x)dx = -f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1=i$ ,  $z_2=1$  και  $z_3=1+i$ .

- α. Να αποδείξετε ότι:  $|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_3|^2$ .

**Μονάδες 5**

- β. Αν για το μιγαδικό  $z$  ισχύει  $|z - z_1| = |z - z_2|$ , τότε να αποδείξετε ότι:

i.  $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$ .

**Μονάδες 10**

- ii. για  $z \neq 0$ , να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}.$$

**Μονάδες 10**

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln x + \frac{1}{4x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

**α.** Να αποδείξετε ότι:

$$f\left(\frac{1}{e^5}\right) > 0, \quad f\left(\frac{1}{4}\right) < 0 \quad \text{και} \quad f(e^5) > 0.$$

**Μονάδες 6**

**β.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $M(1, f(1))$ .

**Μονάδες 5**

**γ.** Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της  $f$ .

**Μονάδες 4**

**δ.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα  $(0, +\infty)$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Έστω  $f$  μία παραγωγίσιμη συνάρτηση στο  $\mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει  $f'(x) - f(x) = -4e^{-3x}$  και  $f(0) = 2$ .

**α.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $h(x) = e^{-x}f(x) - e^{-4x}$  είναι σταθερή.

**Μονάδες 5**

**β.** Να αποδείξετε ότι:  $f(x) = e^x + \frac{1}{e^{3x}}$ .

**Μονάδες 6**

**γ.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:  $I(x) = \int_0^x f(t)dt$

**Μονάδες 9**

**δ.** Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{I(x)}{x^2}$ .

**Μονάδες 5**

## ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

### ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοτυπιών αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.  
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τις φωτοτυπίες.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοτυπιών.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοτυπιών.

**ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ  
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

## ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ  
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ  
ΤΡΙΤΗ 12 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2006  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΕΙΣ (4)**

### **ΘΕΜΑ 1ο**

α) Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x}$  .

Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$   
και ισχύει  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  .

**Μονάδες 10**

β) Έστω μία συνάρτηση  $f$  και το σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ ;

**Μονάδες 5**

γ) Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς **1, 2, 3, 4** και **5** των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη (**Σ**), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή, ή (**Λ**), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.

**1.** Αν  $z_1, z_2$  είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει :

$$\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| .$$

**Μονάδες 2**

**2.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \varepsilon\phi x$  . Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $R_1 = R - \{x \mid \sigma\upsilon\nu x = 0\}$  και ισχύει

$$f'(x) = -\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} .$$

**Μονάδες 2**

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

3. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$  , τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$  .

**Μονάδες 2**

4.  $\int \sin x dx = -\cos x + c$  .

**Μονάδες 2**

5. Αν για μία συνάρτηση  $f$ , συνεχή στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$  ισχύει  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$  , τότε  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$  .

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Έστω ότι για τον μιγαδικό αριθμό  $z$  ισχύει:

$$(5z-1)^5 = (z-5)^5 .$$

α) Να δείξετε ότι  $|5z-1| = |z-5|$  .

**Μονάδες 5**

β) Να δείξετε ότι:  $|z|=1$  .

**Μονάδες 10**

γ) Αν  $w = 5z+1$  , να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων  $M(w)$  στο μιγαδικό επίπεδο.

**Μονάδες 10**

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(x-5) + 2x - 12$ .

α) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ ;

**Μονάδες 6**

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

**Μονάδες 7**

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 6**

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x)=2006$  έχει μοναδική λύση στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Έστω η συνεχής συνάρτηση  $f$ , για την οποία ισχύει

$$f(x) = 3 + 2 \int_0^x f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση  $\Phi(x) = \frac{f(x)}{e^{2x}}$  είναι σταθερή.

**Μονάδες 5**

β) Να αποδειχθεί ότι  $f(x) = 3e^{2x}$ .

**Μονάδες 5**

γ) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου  $E(\lambda)$  που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x=0$ ,  $x=\lambda$  με  $\lambda > 0$ .

**Μονάδες 10**

δ) Να βρεθεί το  $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{E(\lambda)}{\lambda}$

**Μονάδες 5**

## ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

### ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοτυπιών αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τις φωτοτυπίες.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοτυπιών.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοτυπιών.

**ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ  
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ



ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ  
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ  
ΤΡΙΤΗ 13 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2005  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

α) Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

**Μονάδες 10**

β) Έστω  $M(x, y)$  η εικόνα του μιγαδικού αριθμού  $z = x + yi$  στο μιγαδικό επίπεδο.

Τι ορίζουμε ως μέτρο του  $z$ ;

**Μονάδες 5**

γ) Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς 1, 2, 3, 4 και 5 των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη ( $\Sigma$ ), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή, ή ( $\Lambda$ ), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν  $z$  μιγαδικός αριθμός και  $\bar{z}$  ο συζυγής του, τότε ισχύει

$$|z|^2 = z \bar{z} .$$

**Μονάδες 2**

2. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης  $f$  στο  $x_0$ , τότε ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right| .$$

**Μονάδες 2**

3. Ισχύει  $(\eta \mu x)' = -\sigma \upsilon \nu x$ .

**Μονάδες 2**

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

4. Ισχύει  $\int e^x dx = e^{2x} + c$  ,  $c \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 2**

5. Αν  $f$  είναι συνεχής συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε η  $f$  παίρνει στο  $[\alpha, \beta]$  μια μέγιστη τιμή  $M$  και μια ελάχιστη τιμή  $m$ .

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί

$$z_1 = 3+i \text{ και } z_2 = 1-3i .$$

α) Να αποδείξετε ότι  $\frac{z_1}{z_2} = i$  και  $|iz_1 + z_2|^2 = 0$  .

**Μονάδες 8**

β) Να αποδείξετε ότι  $z_1^{2006} + z_2^{2006} = 0$  .

**Μονάδες 8**

γ) Θεωρούμε το μιγαδικό αριθμό

$$w = \frac{kz_1 - iz_2}{z_2 - kz_2} , \quad k \in \mathbb{R} - \{1\} .$$

Να αποδείξετε ότι για κάθε  $k \in \mathbb{R} - \{1\}$  ισχύει  $\text{Im}(w) = -1$  .

**Μονάδες 9**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \alpha + e^x , & x \leq 0 \\ x \ln x , & x > 0 \end{cases} \text{ όπου } \alpha \in \mathbb{R} .$$

A) Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό  $\alpha$  ώστε η συνάρτηση  $f$  να είναι συνεχής στο  $x_0=0$  .

**Μονάδες 10**

B) Αν για τον πραγματικό αριθμό  $\alpha$  ισχύει  $\alpha = -1$  :

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

i) Να εξετάσετε αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0=0$  .

**Μονάδες 5**

ii) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της  $f$ .

**Μονάδες 5**

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x=1$  και  $x=e$ .

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = x - \ln x + e^x, \quad x \in (1, +\infty).$$

α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(1, +\infty)$ .

**Μονάδες 6**

β) Να βρεθούν τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

**Μονάδες 6**

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x)=2005$  έχει μοναδική λύση στο διάστημα  $(1, +\infty)$ .

**Μονάδες 6**

δ) Έστω  $\Pi = \int_2^e f(x) dx + \int_{f(2)}^{f(e)} f^{-1}(x) dx$ . Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $\Pi - 2\ln 2$ .

**Μονάδες 7**

## ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

### **ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοτυπιών αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τις φωτοτυπίες.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοτυπιών.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοτυπιών.

**ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ  
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ  
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ  
ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ  
ΠΕΜΠΤΗ 16 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2004  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ)  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $F$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής  $G(x) = F(x) + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , είναι παράγουσες της  $f$  στο  $\Delta$  και
- κάθε άλλη παράγουσα  $G$  της  $f$  στο  $\Delta$  παίρνει τη μορφή  $G(x) = F(x) + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 10**

**B.** Έστω  $A$  ένα υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ ,  $f$  μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $A$  και  $x_0 \in A$ .  
Πότε θα λέμε ότι η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0$  (ολικό) μέγιστο, το  $f(x_0)$ ;

**Μονάδες 5**

*Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις  $\Gamma$ ,  $\Delta$ ,  $E$ ,  $\Sigma T$  και  $Z$  να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη  $\Sigma$ , αν η πρόταση είναι **Σωστή**, ή  $\Delta$ , αν αυτή είναι **Λανθασμένη**.*

**Γ.** Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους στο μιγαδικό επίπεδο.

**Μονάδες 2**

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**Δ.** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

**Μονάδες 2**

**Ε.** Ισχύει ο τύπος  $\int \eta \mu x dx = \sigma \nu x + c$

**Μονάδες 2**

**ΣΤ.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Θα λέμε ότι: Η συνάρτηση  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο  $\Delta$ , αν η  $f'$  είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του  $\Delta$ .

**Μονάδες 2**

**Ζ.** Έστω μια 1-1 συνάρτηση  $f$  και  $C, C'$  οι γραφικές παραστάσεις των  $f$  και  $f^{-1}$  στο ίδιο σύστημα αξόνων. Τότε οι γραφικές παραστάσεις  $C$  και  $C'$  των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y=x$ .

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & , x \leq 0 \\ \alpha x + \beta & , 0 < x < 1 \\ 1 + x \ln x & , x \geq 1 \end{cases} \quad \text{όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

**α)** Να βρείτε τα  $\alpha$  και  $\beta$  έτσι ώστε η  $f$  να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

**Μονάδες 8**

**β)** Αν, για τους πραγματικούς αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$ , ισχύει:  $\alpha=1$  και  $\beta=0$ , τότε:

**i)** Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$

**Μονάδες 9**

ii) Να υπολογίσετε τα όρια :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Έστω  $z$  μιγαδικός αριθμός, με  $z \neq \pm i$  και  $w = \frac{z}{z^2 + 1}$ .

α) Να αποδείξετε ότι αν ο  $w$  είναι πραγματικός, τότε ο  $z$  είναι πραγματικός ή  $|z| = 1$ .

**Μονάδες 10**

β) Να λύσετε, στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, την εξίσωση  $\frac{z}{z^2 + 1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

**Μονάδες 10**

γ) Αν  $z_1, z_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (β), να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = \frac{(z_1 \cdot z_2)^3 - i}{4 + (z_1 + z_2)^2}.$$

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το διάστημα  $\Delta = (0, +\infty)$  για την οποία ισχύει:

$$f(x) = x^2 - 1 + \frac{1}{x+1} \int_1^x f(t) dt, \quad x \in \Delta.$$

α) Να υπολογίσετε το  $f(1)$ .

**Μονάδες 3**

β) Να αποδείξετε ότι  $f'(x) = 3x - 1$ .

**Μονάδες 10**

γ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 6**

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ , τον άξονα  $x'$  και τις ευθείες  $x=2$  και  $x=4$ .

**Μονάδες 6**

### **ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιό σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**



## ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ  
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ  
ΤΡΙΤΗ 16 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2003  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ)  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

### **ΘΕΜΑ 1ο**

- α) Έστω  $A$  ένα υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  και μία συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ , με πεδίο ορισμού του  $A$ .  
Πότε η  $f$  λέγεται συνάρτηση 1-1;

**Μονάδες 5**

- β) Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και  $f'(x)=0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 12**

- γ) Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς 1, 2, 3, 4 των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη ( $\Sigma$ ), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή, ή ( $\Lambda$ ), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.

1.  $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

2.  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

3.  $|z_1 \cdot z_2| > |z_1| \cdot |z_2|$

4.  $|z_1|^2 = z_1 \cdot \overline{z_1}$

όπου  $z_1 = \alpha + \beta i$  και  $z_2 = \gamma + \delta i$  είναι μιγαδικοί αριθμοί.

**Μονάδες 8**

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -x-3 & , x \leq -\frac{4}{3} \\ 2x+1 & , x > -\frac{4}{3} \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = -\frac{4}{3}$ .

**Μονάδες 5**

β) Να εξετάσετε αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = -\frac{4}{3}$ .

**Μονάδες 10**

γ) Για  $x \neq -\frac{4}{3}$ , να βρείτε την  $f'(x)$  και να λύσετε την εξίσωση  $f(x) + f'(x) = \frac{1}{2}$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(z) = \frac{z+i}{z}$ , όπου  $z$  μιγαδικός αριθμός με  $z \neq 0$ .

α) Αν  $|f(z)| = |f(\bar{z})|$ , να αποδείξετε ότι ο  $z$  είναι πραγματικός αριθμός.

**Μονάδες 6**

β) Αν  $|f(z)| = 1$ , να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του  $z$  στο μιγαδικό επίπεδο.

**Μονάδες 9**

γ) Αν  $\operatorname{Re}(f(z)) = 2$ , να αποδείξετε ότι οι εικόνες του μιγαδικού αριθμού  $z$ , βρίσκονται σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

**Μονάδες 10**

## ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , για την οποία υποθέτουμε ότι ισχύει  $f(0)=0$  και ότι η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(0, +\infty)$  :

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x > 0$  υπάρχει  $\xi \in (0, x)$  τέτοιος ώστε  $f(x) = x \cdot f'(\xi)$  .

**Μονάδες 6**

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $h(x) = \frac{f(x)}{x} + e^x$  ,  $x > 0$  είναι συνάρτηση 1-1 στο διάστημα  $(0, +\infty)$  .

**Μονάδες 10**

γ) Αν  $h(x) = e^x + x^5 + x$  , να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_1^{e-1} f(x+1) dx \quad .$$

**Μονάδες 9**

### ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοτυπιών αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τις φωτοτυπίες.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοτυπιών.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοτυπιών.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ  
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ  
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ  
ΤΡΙΤΗ 17 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2002  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ)  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A. α)** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$ , να αποδείξετε ότι είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

**Μονάδες 8,5**

**β)** Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$ .

**Μονάδες 4**

**B. α)** Αν  $z=x+yi \neq 0$ ,  $|z|=\rho$  και  $\theta$  ένα όρισμα του  $z$ , να αποδείξετε ότι ο  $z$  παίρνει τη μορφή  
 $z=\rho(\cos\theta + i\eta\mu\theta)$

**Μονάδες 8,5**

**β)** Αν  $z_1=\rho_1(\cos\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)$ ,  $z_2=\rho_2(\cos\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)$  είναι η τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών  $z_1$ ,  $z_2$  και  $z_1=z_2$ , τότε

- 1)  $\rho_1=\rho_2$  και  $\theta_1+\theta_2=0$ .
- 2)  $\rho_1+\rho_2=0$  και  $\theta_1=\theta_2+2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- 3)  $\rho_1=\rho_2$  και  $\theta_1 - \theta_2=2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- 4)  $\rho_1 - \rho_2=0$  και  $\theta_1+\theta_2=2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

**Μονάδες 4**

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί

$$z_1 = 1 - 2i \quad \text{και} \quad z_2 = 3 + 4i$$

- α) Αν  $\frac{z_2}{z_1} = x + yi$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι  $x = -1$  και  $y = 2$ .

**Μονάδες 8**

- β) Αν μια ρίζα της εξίσωσης  $x^2 + \beta x + 2\gamma = 0$ , όπου  $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , είναι η  $\frac{z_2}{z_1}$ , να βρείτε τις τιμές των  $\beta$  και  $\gamma$ .

**Μονάδες 8**

- γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$  για τους οποίους ισχύει

$$|z - 2z_1| = |z_2|$$

**Μονάδες 9**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2x + 4 + \frac{1}{2x+4}$ .

- α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο που τέμνει τον άξονα  $y'y$ .

**Μονάδες 7**

- β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 9**

- γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ , τον άξονα των  $x$  και τις ευθείες  $x=0$ ,  $x=1$ .

**Μονάδες 9**

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

## ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

### ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν  $f(1) = 0$  και

$$x f'(x) - 2f(x) = x, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $h(x) = \frac{f(x)}{x^2}$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ .

**Μονάδες 7**

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 8**

γ) Να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x f(t) dt}{(\ln x)^2}$$

**Μονάδες 10**

### ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοτυπιών αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τις φωτοτυπίες.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοτυπιών.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοτυπιών

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ  
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ &  
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ  
ΤΕΤΑΡΤΗ 5 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2001  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A. α)** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 3**

**β)** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ ;

**Μονάδες 3**

**γ)** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$  και  $f(\alpha) \neq f(\beta)$ , τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(\alpha)$  και  $f(\beta)$  υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιος ώστε  $f(x_0) = \eta$ .

**Μονάδες 6,5**

**B.** Δίνεται συνάρτηση  $f$  συνεχής στο  $x_0 = 0$  για την οποία ισχύει :

$$x [f(x) - 2x + 2] = \eta x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$

**α)** Να αποδείξετε ότι  $f(0) = -1$ .

**Μονάδες 6**

**β)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Μονάδες 6,5**

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z, w$  τέτοιοι ώστε  $w = \frac{z - 3i}{1 + i}$ .

**A. α)** Αν  $w = 2 - 2i$ , τότε το μέτρο του μιγαδικού  $z$  είναι :

A. 3,                      B. 4,                      Γ. 5,                      Δ. 2.

Να γράψετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

**Μονάδες 5**

**β)** Αν  $|w| = 2\sqrt{2}$ , να αποδείξετε ότι η εικόνα του  $z$  ανήκει σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του.

**Μονάδες 7,5**

**B. α)** Αν  $z = x + yi$ , με  $x, y \in \mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι

$$\operatorname{Re}(w) = \frac{x + y - 3}{2}, \quad \operatorname{Im}(w) = \frac{-x + y - 3}{2}.$$

**Μονάδες 6**

**β)** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων  $M$  των μιγαδικών  $z$  για τους οποίους ισχύει  $\operatorname{Arg}(w) = \frac{\pi}{4}$ .

**Μονάδες 6,5**

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Δίνεται συνάρτηση  $f(x) = x \ln x - 2x$ .

α) Να βρείτε τα διαστήματα της μονοτονίας της  $f$ .

**Μονάδες 8**

β) Να αποδείξετε ότι  $\ln x \geq 2 - \frac{e}{x}$ , για κάθε  $x > 0$ .

**Μονάδες 7**

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ , τον άξονα των  $x$  και τις ευθείες  $x = 1$ ,  $x = e$ .

**Μονάδες 10**

### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Δίνεται συνάρτηση  $f$  δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f''(x) = f(x)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(0) = 1$  και  $f'(0) = 0$ . Να αποδείξετε ότι :

α) η συνάρτηση  $g(x) = \frac{f'(x) + f(x)}{e^x}$  είναι σταθερή,

**Μονάδες 8**

β)  $[f(x) \cdot e^x]' = e^{2x}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,

**Μονάδες 8**

γ) ο τύπος της  $f$  είναι  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .

**Μονάδες 9**

### ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοτυπιών αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τις φωτοτυπίες.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοτυπιών.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοτυπιών.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**





Γενικό Λύκειο Νεστορίου  
Σχολικό έτος 2013-2014  
Βοηθητικό Υλικό της Γ' Λυκείου