Θέματα Μαθηματικών
Πολυτεχνικός-Φυσικομαθηματικός-Γεωπονοδασολογικός κύκλος 1974

ΖΗΤΗΜΑ1ο

α) Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των παραγωγίσιμων συναρτήσεων και γνωρίζοντες ότι η συνάρτηση e^x παραγωγίζεται στο R, δείξτε ότι η συνάρτηση: $\phi(x)=\frac{\lambda e^x-(1+\lambda)e^{-x}}{1+e^x}$ όπου λ∈R, παραγωγίζεται στο R.

β) Με τη βοήθεια της παραγώγου της φ να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η συνάρτηση φ είναι φθίνουσα στο R.

ΖΗΤΗΜΑ2ο

α) Ένα πολυώνυμο σ(x) βαθμού ν λαμβάνει την ίδια τιμή ξ για ν+1 τουλάχιστον διαφορετικές τιμές του x. Να δείξετε ότι το σ(x) είναι ένα σταθερό πολυώνυμο.

β) Έστω ότι $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ είναι ακέραιοι διαφορετικοί ανά δυο. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $(x-\alpha_1)^2(x-\alpha_2)^2\cdots(x-\alpha_\nu)^2+1$ δεν έχει πραγματικές ρίζες και ότι αυτό δεν μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο δυο πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές και με Βαθμούς ≥ 1

ΖΗΤΗΜΑ3ο

Α. 1) Να δοθεί ο ορισμός της γεωμετρικής προόδου με λόγο ω. Ακολούθως να αποδειχθούν οι τύποι που δίνουν το νιοστό όρο και το άθροισμα των ν πρώτων όρων αυτής.

2) Αν $|\omega|<1$ να δειχθεί ότι η ακολουθία $\alpha_\nu=\omega^\nu$, $\nu\in N^*$ είναι μηδενική και ακολούθως να βρεθεί ο τύπος που δίνει το άθροισμα των απείρων όρων της προόδου

Β. Δίνεται το πολυώνυμο: $\phi(x)=6x^4+(6\lambda-5)x^3+(6\mu-5\lambda+1)x^2+(\lambda-5\mu)x+\mu$ όπου λ,μ∈R. Αν γνωρίζουμε ότι το φ(x) έχει ρίζα το μιγαδικό αριθμό 1+i να υπολογιστούν τα λ και μ και να βρεθούν οι υπόλοιπες ρίζες του πολυωνύμου φ(x)

ΖΗΤΗΜΑ4ο

Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ η διάμεσος από την κορυφή Α είναι ίση με την πλευρά γ. Να δείξετε ότι:

1) εφΒ=3εφΓ

2) ημΑ=2ημ(Β-Γ)

ΖΗΤΗΜΑ5ο

Έστω μια συνάρτηση $f:R_{+}^{*}\to R$ με $f(xy)=f(x)+f(y)$ (1) για κάθε $x,y\in R_{+}^{*}$

1) Να δείξετε ότι :f(1)=0 και $f(\frac{1}{\rho})=-f(\rho)$, για κάθε $\rho\in R_{+}^{*}$

2) Υποθέτουμε ακόμα ότι ο μοναδικός θετικός ρητός αριθμός t, για τον οποίο ισχύει: f(t)=0 είναι ο t=1. Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν θετικοί ρητοί αριθμοί ρ και τα με $\rho\neq\tau$ και f(ρ)=f(τ).

ΖΗΤΗΜΑ6ο

1) Να λυθεί η εξίσωση: $z^{\nu}+1=0, \nu\in N^{*}$

2) Αν $z+\frac{1}{z}=x$ να δείξετε ότι η παράσταση: $z^{\nu}+\frac{1}{z^{\nu}}$ με $\nu\in N^{*}$ είναι ένα πολυώνυμο $P_{\nu}(x)$ ως προς x βαθμού ν (χρησιμοποιείστε προαιρετικά Μαθηματική επαγωγή)

3) Να δείξετε ότι η εξίσωση: $P_{\nu}(x)=0$ έχει όλες τις ρίζες της πραγματικές και άνισες και να τις βρείτε.

ΖΗΤΗΜΑ7ο

1) Να λυθεί η εξίσωση: στεμθ=στεμ2θ+στεμ3θ

2) Αν ΑΒΓΔΕΖΗ είναι ένα κανονικό επτάγωνο να δείξετε τριγωνομετρικά ότι:

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{A\Gamma}+\frac{1}{A\Delta}$$

ΖΗΤΗΜΑ8ο

1) Δώστε τον ορισμό του λογαρίθμου πραγματικού αριθμού και αποδείξτε τους τύπους ευρέσεως του λογαρίθμου γινομένου δυο αριθμών, πηλίκου δυο αριθμών, δυνάμεως αριθμού και τον τύπο αλλαγής βάσεως.

2) Αριθμητικής προόδου ο πρώτος όρος είναι logα και ο δεύτερος όρος είναι logβ. Να δειχθεί ότι το άθροισμα Σ_{ν} των ν πρώτων όρων της προόδου είναι:

$$\Sigma_{\nu}=\frac{1}{2}\log\frac{\beta^{\nu(\nu-1)}}{\alpha^{\nu(\nu-1)}}$$

ΖΗΤΗΜΑ9ο

Δίνεται το τριώνυμο $\phi(x)=x^{2}+\alpha x+\beta$, α,β∈R.

1) Να βρείτε τους αριθμούς $y,z\in R$ για τους οποίους ισχύουν: φ(y)=z, φ(z)=y και $y\neq z$

2) Έστω ότι υπάρχει ένας μοναδικός αριθμός ω για τον οποίο ισχύει: φ(ω)=ω. Τότε να δείξετε ότι υπάρχουν γνήσιοι μιγαδικοί αριθμοί y και z για τους οποίους ισχύουν: φ(y)=z, φ(z)=y και $y\neq z$. Υπολογίστε τους αριθμούς αυτούς συναρτήσει του ω.

ΖΗΤΗΜΑ10ο

Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\beta=4\gamma\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}+\frac{A}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}-\frac{A}{2}\right)$. Να δείξετε ότι:

1) Α=2Γ

2) $\alpha^{2}=\beta\gamma+\gamma^{2}$

Θέματα Μαθηματικών
Πολυτεχνικός-Φυσικομαθηματικός-Γεωπονοδασολογικός κύκλος 1976

ΖΗΤΗΜΑ11ο

α) Δώστε του ορισμούς της μηδενικής ακολουθίας, της συγκλίνουσας και της φραγμένης ακολουθίας πραγματικών αριθμών.

β) Δείξτε ότι οι μηδενικές και οι συγκλίνουσες ακολουθίες είναι φραγμένες.

ΖΗΤΗΜΑ12ο

Δίνεται η εξίσωση: $(\alpha+1)x^3-(\alpha^2+5\alpha-5)x^2+(\alpha^2+5\alpha-5)x-(\alpha+1)=0,\ \alpha\in R-\{-1\}$.

1) Δείξτε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου α η εξίσωση έχει ρίζες που αποτελούν γεωμετρική πρόοδο.

2) Αν παραστήσουμε με x_2 τη ρίζα της εξίσωσης που δεν εξαρτάται από την παράμετρο α , προσδιορίστε τότε το α ώστε οι ρίζες x_1,x_2,x_3 να αποτελούν αριθμητική πρόοδο.

3) Δείξτε ότι για τις τιμές της παραμέτρου α που βρήκατε στην προηγούμενη ερώτηση η εξίσωση έχει τρεις ίσες ρίζες.

ΖΗΤΗΜΑ13ο

α) Πολυώνυμο Π(x) έχει την ιδιότητα: Π(x)=Π(1-x). Δείξτε ότι το πολυώνυμο Π(x)-Π(0) διαιρείται από το πολυώνυμο x(x-1)

β) Πολυώνυμο P(x) έχει την ιδιότητα P(x)=P(x-1). Δείξτε ότι το πολυώνυμο P(x) είναι σταθερό πολυώνυμο.

ΖΗΤΗΜΑ14ο

α) Αν $\kappa\in N_+^*$ (θετικός ακέραιος) δείξτε ότι ο αριθμός $\kappa^2+4\kappa$ βρίσκεται μεταξύ των τετραγώνων δυο διαδοχικών θετικών ακεραίων αριθμών.

β) Αν $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in N_+^*$ (θετικοί ακέραιοι) δείξτε ότι το γινόμενο: $\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\delta}\right)\left(\frac{\delta}{\gamma}-\frac{\beta}{\alpha}\right)$ δεν μπορεί να είναι θετικός ακέραιος.

ΖΗΤΗΜΑ15ο

Να βρεθούν οι λύσεις της ανίσωσης: $\frac{3-4\sigma\upsilon\nu x}{2+4\sigma\upsilon\nu x}+\frac{2+\eta\mu x}{1-2\eta\mu x}>1$ στο διάστημα [0,2π].

ΖΗΤΗΜΑ16ο

1) Να γράψετε την παράσταση: Α= ημ2x +κ συν2x όπου κ σταθερός πραγματικός αριθμός στη μορφή Α=λ ημy όπου λ σταθερός αριθμός και y συνάρτηση του x.

2) Να δείξετε ότι η παράσταση Β=(ημx+συνx)(ημx+2συνx) μπορεί να γραφεί στη μορφή: Β= μ+ν ημω όπου μ,ν σταθεροί αριθμοί και ω συνάρτηση του x. Να βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της Β για x μεταβαλλόμενο στο διάστημα [0,2π]

Θέματα Μαθηματικών
Πολυτεχνικός-Φυσικομαθηματικός-Γεωπονοδασολογικός κύκλος 1977

ΖΗΤΗΜΑ17ο

α) Να δείξετε ότι μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση μπορεί να έχει το πολύ ένα σημείο μηδενισμού στο πεδίο ορισμού της.

β) Με τη βοήθεια των παραγώγων να δείξετε ότι η συνάρτηση $\phi(x)=\alpha^x,\ 0<\alpha<1$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

γ) Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση $3^x+4^x=5^x$ έχει τη λύση x=2. Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή δεν έχει άλλη λύση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

ΖΗΤΗΜΑ18ο

α) Να μελετήσετε τα ακρότατα της συνάρτησης: $\phi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$.

β) Θεωρούμε το πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ όπου α>0 και $\beta^2-4\alpha\gamma\leq 0$. Να δείξετε ότι για οποιουσδήποτε διάφορους μεταξύ τους πραγματικούς αριθμούς κ,λ με $\kappa\cdot\lambda\leq 0$ ισχύει η σχέση:

$$\left|\frac{P(\kappa)-P(\lambda)}{\kappa-\lambda}\right|\geq\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$$

ΖΗΤΗΜΑ19ο

Για κάθε όχι αρνητικό πραγματικό αριθμό α να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς $z=x+yi$ όπου x και y πραγματικοί αριθμοί που ικανοποιούν την ισότητα: $|z|^2-2iz+2\alpha(1+i)=0$

ΖΗΤΗΜΑ20ο

α) Να δείξετε ότι $\log_\alpha x=(\log_\alpha\beta)\cdot(\log_\beta x)$ όπου α,β,x είναι θετικοί αριθμοί, $\alpha\neq 1,\beta\neq 1$.

β) Δίνεται η συνάρτηση: $\phi(x)=\log_\alpha x+\log_\beta x$. Να εκφράσετε αυτή τη συνάρτηση με τη βοήθεια του λογαρίθμου x με βάση το γινόμενο $\alpha\cdot\beta\cdot(\log_{\alpha\beta}x)$ και του λογαρίθμου α με βάση $\beta\cdot(\log_\beta\alpha)$. Στη συνέχεια να προσδιορίσετε το πρόσημο της συνάρτησης αυτής για τις διάφορες θετικές τιμές του x με την προϋπόθεση ότι 0<α<1 και β>1

Θέματα Μαθηματικών

Πολυτεχνικός-Φυσικομαθηματικός-Γεωπονοδασολογικός κύκλος 1978

ΖΗΤΗΜΑ21ο

Αν φ συνάρτηση του Α στο Β και σ συνάρτηση του Β στο Γ τότε τη σύνθεση της φ με τη σ θα την παραστήσουμε όπως συνηθίζεται με $\sigma\circ\phi$.

α) Να δείξετε ότι η σύνθεση συναρτήσεων έχει τη προσεταιριστική ιδιότητα

β) Αν είναι φ συνάρτηση του Α στο Α τότε ορίζουμε $\phi_1=\phi$ και $\phi_{\nu+1}=\phi_1\circ\phi_\nu$ για κάθε $\nu\in N^*$. Αν A_ν είναι το σύνολο τιμών της ϕ_ν να δείξετε ότι για κάθε φυσικό ν το σύνολο $A_{\nu+1}$ είναι υποσύνολο του A_ν.

γ) Αν η φ είναι επί του Α να δείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για τη συνάρτηση $\phi_\nu, \forall\nu\in N^*$

ΖΗΤΗΜΑ22ο

Αν είναι $y=x^2-\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}$ να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση: $1<\log_y\left(\frac{x-2}{x}\right)$. Να διακρίνετε τις περιπτώσεις y>1 και 0<y<1

ΖΗΤΗΜΑ23ο

α) Να δώσετε τον ορισμό του ορίου συνάρτησης φ(x) όταν $x\to x_0$ η συνάρτηση έχει όριο τον πραγματικό αριθμό y_0.

β) Να δώσετε μια γεωμετρική ερμηνεία του ορισμού αυτού ως προς ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

γ) Να βρείτε χρησιμοποιώντας γνωστές ιδιότητες , το όριο της συνάρτησης

$$\phi(x)=\frac{x^2-3x+20}{3x-4} \quad \text{όταν} \quad x\to 3$$

ΖΗΤΗΜΑ24ο

α) Χρησιμοποιώντας τις μεθόδους του διαφορικού λογισμού να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση: $y=1+\sqrt[5]{(x+2)^4}$ στο Δ=[-3,-1]

β) Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle για την προηγούμενη συνάρτηση στο διάστημα Δ.

ΖΗΤΗΜΑ25ο

1) Να δώσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δυο διανυσμάτων.

2) Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων δίνονται τα σημεία Α(1,2), Β(2,-3) και Γ(3,2). Να βρεθούν οι συντεταγμένες του συμμετρικού του σημείου Γ ως προς την ευθεία ΑΒ.

ΖΗΤΗΜΑ26ο

1) Να δείξετε την ταυτότητα:

$$συν^2α+συν^2β+συν^2γ+συν^2(α+β+γ)-2=2συν(α+β)συν(β+γ)συν(γ+α).$$

2) Αν συνα=εφy εφω, συνβ=εφω εφx, συνγ=εφx εφy και α+β+γ=π να δείξετε ότι

$$ημ^2x+ημ^2y+ημ^2ω=1$$

ΖΗΤΗΜΑ27ο

Αν ω,φ,θ είναι αντίστοιχα οι οξείες γωνίες που σχηματίζει η διάμεσος ΑΜ οξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ με τις πλευρές ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ τότε να δείξετε ότι:

1) σφθ=2σφΑ+σφΒ

2) σφφ=2σφΑ+σφΓ

3) $2σφω=|σφΒ-σφΓ|$

4) $σφΑ=\dfrac{4μ_α{}^2-α^2}{4αμ_αημω}$

Θέματα Μαθηματικών
Β΄ Λυκείου τύπος 2 (ακυρώθηκαν) 1979

ΖΗΤΗΜΑ28ο

1) Από την εφα ενός τόξου α να υπολογισθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί ημίτονο, συνημίτονο του τόξου 2α.

2) Αν $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, και $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\varepsilon\varphi\frac{\beta}{2}=t$, $t\in R$ να υπολογίσετε το συν(α−β)

ΖΗΤΗΜΑ29ο

1) Σε δοθέντα κύκλο (O,ρ) να εγγράψετε κανονικό εξάγωνο και να υπολογίσετε την πλευρά και το απόστημά του από την ακτίνα του κύκλου.

2) Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ. Από την κορυφή Α αυτού φέρουμε την Αx κάθετη στο επίπεδο του τριγώνου και ενώνουμε το τυχόν σημείο Δ της Αx με το μέσο Μ της βάσεως ΒΓ. Να αποδειχθεί ότι είναι:α) $\Delta M\perp B\Gamma$ και β) $B\Gamma\perp(\Delta AM)$

ΖΗΤΗΜΑ30ο

1) Δείξτε ότι κάθε μιγαδικός αριθμός μπορεί να γραφεί σαν τετράγωνο μιγαδικού αριθμού.

2) Αν $z_1,z_2\in C$, να δείξετε ότι : $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$

3) Αν $\alpha,\beta\in C$ τότε σύμφωνα με την ερώτηση 1 υπάρχει ένα $z\in C$ τέτοιο ώστε $\alpha\beta=z^2$. Αποδείξτε την ισότητα $|\alpha|+|\beta|=\left|\frac{\alpha+\beta}{2}+z\right|+\left|\frac{\alpha+\beta}{2}-z\right|$.

ΖΗΤΗΜΑ31ο

1) Δείξτε ότι το σύνολο Α των ριζών της εξίσωσης $z^3=1$ είναι ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό στο σύνολο C.

2) Δείξτε ότι δυο οποιεσδήποτε από τις ρίζες της προηγούμενης εξισώσεως είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του διανυσματικού χώρου C πάνω στο Â.

Θέματα Μαθηματικών

Β΄ Λυκείου τύπος 2 - 1979

ΖΗΤΗΜΑ32ο

Να δειχθεί η ισότητα: $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}=\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$

ΖΗΤΗΜΑ33ο

Σε ένα κύκλο (O,R) να εγγραφεί κανονικό τρίγωνο (ισόπλευρο) και να υπολογιστεί η πλευρά και το απόστημά του από την ακτίνα του κύκλου.

ΖΗΤΗΜΑ34ο

Α. Αν $z\neq -1+0i$ και $z\neq 1+0i$ δείξτε ότι:

α) Όταν $|z|=1$ τότε ο αριθμός $\frac{z-1}{z+1}$ είναι καθαρός φανταστικός.

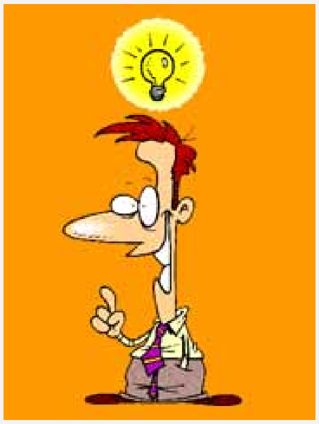
β) Όταν ο αριθμός $\frac{z-1}{z+1}$ είναι καθαρός φανταστικός τότε $|z|=1$.

Β. Να βρείτε το μέτρο και το όρισμα του μιγαδικού $z=-\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta$.

ΖΗΤΗΜΑ35ο

Α. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα K. Αν A και B είναι διανυσματικοί υπόχωροι του V να δείξετε ότι το σύνολο $A\cap B$ δεν είναι το κενό και μάλιστα είναι υπόχωρος του V.

Β. Αν x,y,z είναι τρία γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία ενός γραμμικού διανυσματικού χώρου, να δείξετε ότι και τα στοιχεία x, y-x, z-x είναι επίσης γραμμικώς ανεξάρτητα.



ΖΗΤΗΜΑ36ο

Αν $\Pi(x)=x^2+2|z_1-z_2|x+\left(1+|z_1|^2\right)\left(1+|z_2|^2\right)$, όπου z_1,z_2 είναι δοσμένοι μιγαδικοί αριθμοί, να δείξετε ότι $\Pi(x)\geq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x. Πότε μπορεί να ισχύει η ισότητα;

ΖΗΤΗΜΑ37ο

α) Τι καλείται συνδυασμός των ν πραγμάτων ανά κ

β) Να αποδείξετε τον τύπο που δίνει το πλήθος των συνδυασμών των ν πραγμάτων ανά κ. Υποτίθεται ότι $1\leq\kappa\leq\nu$.

ΖΗΤΗΜΑ38ο

α) Πότε μια συνάρτηση φ(x) λέγεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; Πότε μια συνάρτηση φ(x) λέγεται συνεχής σε ένα διάστημα;

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση φ(x) που δίνεται από το τύπο $\phi(x)=x^2\eta\mu\frac{1}{x},\ x\neq 0$ και φ(0)=0 είναι συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

ΖΗΤΗΜΑ39ο

Δίνεται ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές Π(x) βαθμού ≥ 2.

α) Να δείξετε ότι αν ο πραγματικός αριθμός ρ είναι πολλαπλή ρίζα του Π(x) τότε ο ρ είναι ρίζα της παραγώγου του Π(x).

β) Με τη βοήθεια της προηγούμενης ιδιότητας να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α και β ώστε το πολυώνυμο $\Pi(x)=x^4+(\alpha-\beta)x^3+2\alpha x^2-5x+4$ να έχει πολλαπλή ρίζα τον αριθμό 1.

ΖΗΤΗΜΑ40ο

Θεωρούμε τα μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και υποθέτουμε ότι υπάρχει λ∈R με: $|\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}|=1$. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζεται από τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν υπερβαίνει το μέτρο του $\vec{\beta}$.

ΖΗΤΗΜΑ41ο

Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt{2}(-1+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)+(4-4\sqrt{2})\cdot\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x=0$

ΖΗΤΗΜΑ42ο

Να αποδειχθεί το θεώρημα : Δίνεται ένα επίπεδο (Π), μια ευθεία του (ζ) και ένα σημείο Α που δεν ανήκει στο (Π). Από το Α θεωρούμε ευθεία (ε) παράλληλη προς την ευθεία (ζ). Τότε η ευθεία (ε) είναι παράλληλη προς το επίπεδο (Π).

ΖΗΤΗΜΑ43ο

Το άθροισμα των 4 πρώτων όρων μιας απολύτως φθίνουσας γεωμετρικής προόδου είναι 30 και το άθροισμα των απείρων όρων της είναι 32. Να βρεθεί η πρόοδος.

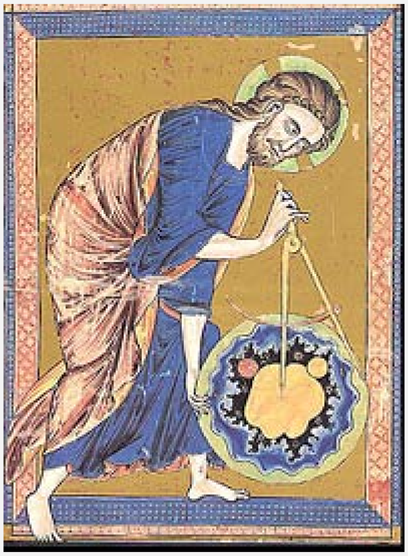
ΖΗΤΗΜΑ44ο

α) Βρείτε το άθροισμα των ν όρων
$i+(2+3i)+(4+5i)+(6+7i)+\ldots+[2\nu-2+(2\nu-1)i]$, $\nu \in N^*$

β) Αν $|z+16| = 4|z+1|$ δείξτε ότι $|z| = 4$

ΖΗΤΗΜΑ45ο

Βρείτε τον Μ.Κ.Δ των ακεραίων 11 και 15 και έπειτα προσδιορίστε ακεραίους x και y τέτοιους ώστε $11x+15y=(11,15)$



ΖΗΤΗΜΑ46ο

α) Αν το όριο της ακολουθίας α_ν είναι το $+\infty$ και το όριο της ακολουθίας β_ν είναι το $+\infty$, να αποδειχθεί ότι το όριο της ακολουθίας του αθροίσματος $\alpha_\nu+\beta_\nu$ είναι το $+\infty$.

β) Να αποδειχθεί η πρόταση: κάθε συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα είναι συνεχής στο διάστημα αυτό.

ΖΗΤΗΜΑ47ο

α) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{|x|(x-1)}{x}, x\in R^*$ και f(x)=1 για x=0. Να εξετασθεί αν είναι συνεχής και να γίνει η γραφική παράσταση αυτής.

β) Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης: $y=-x+\sqrt{x^2+2x+3}$ όταν x τείνει στο $+\infty$.

ΖΗΤΗΜΑ48ο

α) Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β ώστε η συνάρτηση $y=\alpha x^3+\beta x^2-6x+1$ να δέχεται τοπικά ακρότατα στα σημεία x=1 και x=-2

β) Να μελετηθεί η μονοτονία της παραπάνω συνάρτησης (αφού αντικατασταθούν τα α και β με τις τιμές τους).

ΖΗΤΗΜΑ49ο

Δίνονται τα σημεία Α(1,1), Β(-1,3) και Γ(2,-4)

α) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας του ύψους του τριγώνου ΑΒΓ που διέρχεται από το σημείο Α.

β) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας της διαμέσου του τριγώνου ΑΒΓ που διέρχεται από το σημείο Β.

γ) Να βρεθεί το σημείο τομής των παραπάνω ευθειών.

ΖΗΤΗΜΑ50ο

α) Αν σε δυο ορθογώνια τρίγωνα ο λόγος των υποτεινουσών είναι ίσος με το λόγο δυο καθέτων πλευρών τα τρίγωνα είναι όμοια.

β) Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι: $\hat{B}-\hat{\Gamma}=1^L$. Αν ΑΔ είναι το ύψος του να αποδείξετε ότι $A\Delta^2=\Delta B\cdot\Delta\Gamma$

ΖΗΤΗΜΑ51ο

α) Από το συν2α να υπολογιστούν το ημα και συνα

β) Να αποδείξετε την ισότητα: $\varepsilon\varphi(45^\circ-\alpha)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\eta\mu 2\alpha}$

ΖΗΤΗΜΑ52ο

α) Να βρεθούν οι κυβικές ρίζες του μιγαδικού αριθμού $z=-1+i\sqrt{3}$.

β) Να δειχθεί ότι δυο οποιεσδήποτε από τις παραπάνω κυβικές ρίζες είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του διανυσματικού χώρου C πάνω στο R.

ΖΗΤΗΜΑ53ο

α) Αν (Γ,.) είναι ομάδα και για κάθε α,β∈Γ ισχύει $(\alpha\cdot\beta)^2=\alpha^2\cdot\beta^2$ να αποδείξετε ότι η ομάδα είναι αντιμεταθετική (αβελιανή).

β) Αν x,y είναι δυο στοιχεία του πραγματικού διανυσματικού χώρου V τότε το σύνολο των στοιχείων της μορφής αx+βy όπου α,β∈R είναι γραμμικός υπόχωρος του V.

ΖΗΤΗΜΑ54ο

α) Να βρεθεί το: $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^2-2x+1}{|x|-1}$

β) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $y=\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^2+x-2}$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της και η οριακή τιμή της όταν $x\to -2$

ΖΗΤΗΜΑ55ο

α) Να αποδειχθεί η ιδιότητα: Αν $\lim\alpha_\nu=0$ και $\lim\beta_\nu=\beta$ τότε υπάρχει το $\lim(\alpha_\nu\cdot\beta_\nu)$ και ισούται με αβ. Δηλαδή : $\lim(\alpha_\nu\cdot\beta_\nu)=\lim(\alpha_\nu)\cdot\lim(\beta_\nu)$.

β) Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία $\alpha_\nu=\omega^\nu,\ \nu=1,2,3,\ldots$ και ω πραγματικός αριθμός με $|\omega|<1$, είναι μηδενική.

ΖΗΤΗΜΑ56ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,2,-1),\ \vec{\beta}=(1,-3,2)$ και $\vec{\gamma}=(1,1,-\frac{1}{2})$

α) Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δυο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μια να έχει τη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

β) Να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

γ) Να εξηγήσετε γιατί το διάνυσμα $\vec{\beta}$ δεν μπορεί να αναλυθεί σε δυο συνιστώσες με διευθύνσεις τις διευθύνσεις των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$.

ΖΗΤΗΜΑ57ο

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση $9x^2-16y^2=144$, με εστίες Ε΄ και Ε και σημείο Α(κ,λ) πάνω στην υπερβολή.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία Α και Ε΄ και της ευθείας που περνά από τα σημεία Α και Ε.

β) Να προσδιοριστούν τα σημεία Α για τα οποία οι παραπάνω ευθείες είναι κάθετες μεταξύ τους.

ΖΗΤΗΜΑ58ο

α) Αν δυο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους παράλληλες μια προς μια ή κάθετες μια προς μια είναι όμοια.

β) Να αποδειχθεί ότι η απόσταση οποιουδήποτε σημείου ενός κύκλου από μια χορδή του είναι μέση ανάλογος μεταξύ των αποστάσεων του σημείου αυτού από τις εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της χορδής.

ΖΗΤΗΜΑ59ο

α) Αν για τις γωνίες α,β,γ ισχύει η σχέση α+β+γ=κπ , όπου κ ακέραιος να δειχθεί ότι εφα+εφβ+εφγ=εφα εφβ εφγ. Δίνεται ότι $\alpha,\beta,\gamma \neq \kappa\pi+\frac{\pi}{2}, \kappa\in Z$.

β) Για τις γωνίες x,y να αποδειχθεί ότι ισχύει η σχέση:

$$(\varepsilon\phi^2 x+\varepsilon\phi^2 y)\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon\phi^2 x}+\frac{1}{\varepsilon\phi^2 y}\right)\geq(\varepsilon\phi x+\varepsilon\phi y)\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon\phi x}+\frac{1}{\varepsilon\phi y}\right) \text{ με } x,y\neq\frac{\kappa\pi}{2}, \kappa\in Z.$$

Πότε η σχέση ισχύει σαν ισότητα;

ΖΗΤΗΜΑ60ο

α) Να διατυπωθεί το θεώρημα De Moivre

β) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $(1+iz)^{\nu}=\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$ με ν φυσικό αριθμό και $z\in C$ δεν έχει πραγματική λύση.

ΖΗΤΗΜΑ61ο

α) Να δοθεί ο ορισμός του διανυσματικού υπόχωρου $A\neq\varnothing$ ενός διανυσματικού χώρου V και να αποδειχθεί ότι και αυτός είναι διανυσματικός χώρος.

β) Στο σύνολο $G=\{x\in R/-1<x<1\}$ ορίζουμε την πράξη * ως εξής $x*y=\frac{x+y}{1+xy}, (1)$.

Να αποδειχθεί ότι η $(G,*)$ είναι αντιμεταθετική ομάδα. Οι σημειούμενες πράξεις στο δεύτερο μέλος της (1) είναι οι συνήθεις του R.

ΖΗΤΗΜΑ62ο

α) Θεωρούμε ότι οι ακολουθίες πραγματικών αριθμών β_ν, γ_ν συγκλίνουν στον ίδιο πραγματικό αριθμό κ. Αν για την ακολουθία α_ν ισχύει $\beta_\nu \le \alpha_\nu \le \gamma_\nu,\ \forall \nu \ge \nu_0$ να αποδειχθεί ότι η α_ν συγκλίνει επίσης στο κ.

β) Να υπολογισθεί το $\lim \alpha_\nu$ με: $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{3^\nu + 5^\nu + 7^\nu},\ \nu = 1,2,3,\ldots$

(Υπενθυμίζεται ότι $\sqrt[\nu]{\alpha} \to 1$, αν $\alpha \in R_+^*$)

ΖΗΤΗΜΑ63ο

α) Να δοθεί ο ορισμός της παραγώγου μιας συνάρτησης σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και στη συνέχεια να δοθεί ο ορισμός της γεωμετρικής σημασίας της παραγώγου στο σημείο x_0.

β) Οι συναρτήσεις f(x) και g(x) έχουν κοινό πεδίο ορισμού το $\Delta \subseteq R$ και παραγωγίζονται παντού σε αυτό. Επί πλέον είναι $g(x) \ne 0,\ \forall x \in \Delta$. Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $\phi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Να αποδειχθεί ότι αν $\phi'(\rho) = 0$ τότε είναι

$$\phi(\rho) = \frac{f'(\rho)}{g'(\rho)} \quad \text{όπου } g'(\rho) \ne 0 \text{ και } \rho \in \Delta .$$

ΖΗΤΗΜΑ64ο

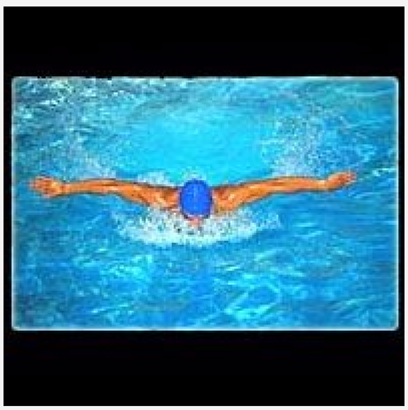
Η συνάρτηση g ορίζεται από τον τύπο: $g(x) = \lim\limits_{\nu \to +\infty} \dfrac{x^{2\nu+1} + x^2}{x^{2\nu} + 1}$ με $\nu = 1,2,\ldots$ και $x \in R$.

Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια στα σημεία x=1 και x=-1

ΖΗΤΗΜΑ65ο

α) Να δοθεί ο ορισμός του εσωτερικού γινομένου δυο διανυσμάτων.

β) Στο επίπεδο θεωρούμε το ορθογώνιο σύστημα αξόνων xOy και σταθερό σημείο Α αυτού με $|\overrightarrow{OA}| = 3$. Ποια γραμμή γράφουν τα σημεία Μ(x,y) του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $\overrightarrow{OM}\left(\overrightarrow{OM} - 2\cdot\overrightarrow{OA}\right) = 7$



Θέματα Μαθηματικών
Β΄ Λυκείου τύπος 2 - 1983

(για βελτίωση βαθμολογίας)

ΖΗΤΗΜΑ66ο

Δίνεται το σύστημα $\begin{cases}(1-\lambda)x-2\lambda y=2\\ 2\lambda x+(\lambda-1)y=\lambda-4\end{cases}$

(λ∈R, παράμετρος). Να οριστεί το σύνολο των τιμών της παραμέτρου λ που καθεμιά τους είναι τέτοια ώστε το σύστημα να έχει μια μοναδική λύση έστω (ξ,η) που να ικανοποιεί τη συνθήκη: ξ+η>1

ΖΗΤΗΜΑ67ο

Α. Να αποδειχθεί ότι αν για τις γωνίες Α,Β,Γ ισχύει: Α+Β+Γ=π τότε θα ισχύει $\sigma\upsilon\nu^2 A+\sigma\upsilon\nu^2 B+\sigma\upsilon\nu^2\Gamma+2\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma=1$

Β. Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $\sigma\upsilon\nu^4\frac{\pi}{8}+\sigma\upsilon\nu^4\frac{3\pi}{8}=\frac{3}{4}$

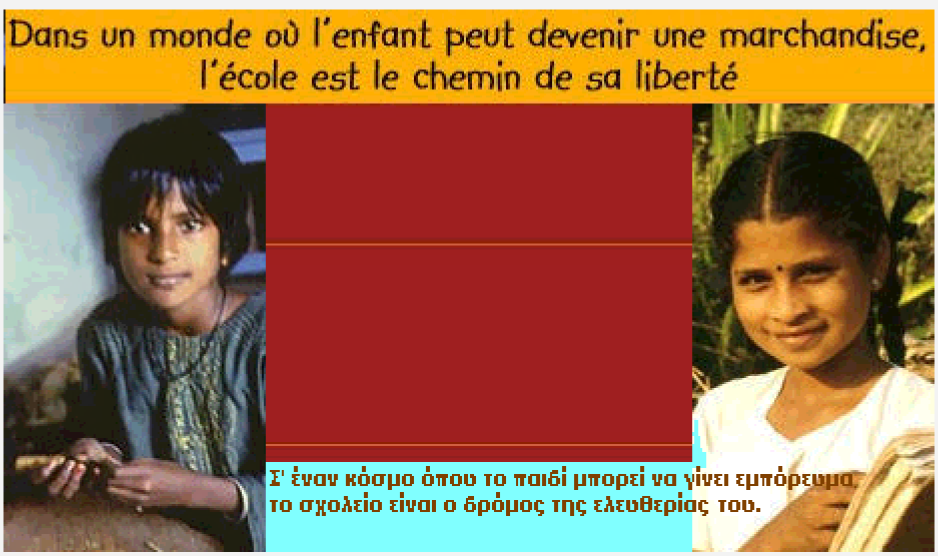
ΖΗΤΗΜΑ68ο

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Έστω ότι μια παράλληλη της ΑΔ τέμνει την ΑΒ στο Γ΄, την ΒΓ στο Α΄ και τη ΑΓ στο Β΄. Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $\frac{A\Gamma'}{AB'}=\frac{AB}{A\Gamma}$

ΖΗΤΗΜΑ69ο

Α. Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$, όπου z_1,z_2 συμβολίζουν μιγαδικούς αριθμούς. Σε ποια περίπτωση ισχύει το ίσον;

Β. Έστω ω με $\omega^3=1, \omega\in C, \omega\neq 1$. Να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης $K=(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^5)$



Θέματα Μαθηματικών
Γ΄ Λυκείου (τύπος 2) 1983

(για βελτίωση βαθμολογίας)

ΖΗΤΗΜΑ70ο
Δυο τρίγωνα ΑΒΓ ,Α΄Β΄Γ΄ βρίσκονται σε διαφορετικά επίπεδα και είναι ΑΒ παράλληλη Α΄Β΄, ΒΓ παράλληλη Β΄Γ΄, ΑΓ παράλληλη Α΄Γ΄. Να αποδειχθεί ότι οι ευθείες ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ περνάνε από το αυτό σημείο ή είναι παράλληλες μεταξύ τους.

ΖΗΤΗΜΑ71ο
α) Να μελετηθεί ως προς την σύγκλιση η ακολουθία $\alpha_\nu = \frac{\nu^2+\nu+1}{2\nu^2+\nu+7}, \nu = 1,2,3,\ldots$

β) Να ορισθούν οι πραγματικοί αριθμοί x που ο καθένας τους είναι τέτοιος ώστε να ισχύει: $\left| x + \lim \frac{\nu^2+3}{3\nu^2-1} \right| > \frac{7}{3}$

ΖΗΤΗΜΑ72ο
Θεωρούμε τη συνάρτηση της μεταβλητής x με τύπο $y = \frac{5x}{x^2+x+1}$ με πεδίο ορισμού το R. Να αποδειχθεί ότι η πιο πάνω συνάρτηση έχει δυο ακρότατα, ένα μέγιστο και ένα ελάχιστο (και να υπολογισθούν αυτά τα ακρότατα). Ακόμη να υπολογισθούν οι τιμές της x στις οποίες αντιστοιχούν τα πιο πάνω ακρότατα.

ΖΗΤΗΜΑ73ο
Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2,1,-1), \vec{\beta} = (1,-1,0)$ του χώρου R^3.

Να ορισθεί διάνυσμα $\vec{\gamma} = (\kappa,\lambda,\mu)$ τέτοιο ώστε να ισχύουν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} = \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = 0$ και $|\vec{\gamma}| = \sqrt{11}$