ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ,
ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ
ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗ Δ/ΝΣΗ Π/ΘΜΙΑΣ &
Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΚΡΗΤΗΣ
ΓΡΑΦΕΙΟ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΣΥΜΒΟΥΛΩΝ
Δ. Ε. Ν. ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ

Κοιν.: Προϊστάμενο Επιστημονικής &
Παιδαγωγικής Καθοδήγησης
Δ/θμιας Εκπ/σης Κρήτης.

ΘΕΜΑ: «ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ Μ. Κ. (ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ) - 2010»

Αγαπητοί Συνάδελφοι,

Με κάποια καθυστέρηση σας στέλνω διδακτικό υλικό που αναφέρεται στο κεφάλαιο των Μιγαδικών αριθμών, ενώ στην διάρκεια του χρόνου θα ακολουθήσει υλικό και για τα άλλα κεφάλαια των Μαθηματικών κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου.
Ελπίζω στα κείμενα αυτά, τα οποία περιλαμβάνουν συμπληρώσεις, παρατηρήσεις, επισημάνσεις και ασκήσεις στη σχολική ύλη, να βρείτε ιδέες, προτάσεις και ασκήσεις χρήσιμες για το μαθηματικό και το διδακτικό σας έργο, αλλά και να θυμηθείτε κάποια σημεία από τα πανεπιστημιακά σας μαθήματα που μπορούν να απαντήσουν σε πιθανές ερωτήσεις και απορίες δικές σας ή των μαθητών σας. Οι συμπληρώσεις στην θεωρία και γενικά ότι δεν υπάρχει στο σχ. βιβλίο, είναι δική σας επιλογή αν τις διδάξετε, αλλά θεωρώ απαραίτητο να τις έχετε υπόψη. Δεν θεωρώ ότι είναι πλήρεις οι σημειώσεις αυτές, γι' αυτό σας καλώ να στείλετε ότι σχετικό υλικό πιστεύετε ότι θα τις εμπλουτίσει. Μην ξεχνάτε τέλος ότι οι σημειώσεις αυτές *απευθύνονται σε σας* και όχι στους μαθητές σας.
Χρήσιμο είναι η διατήρηση του αρχείου αυτού στο σχετικό φάκελο (υλικό και ηλεκτρονικό) «Διδακτικής Μαθηματικών» του σχολείου.

Καλή δύναμη

Συμπληρώσεις, Παρατηρήσεις, Επισημάνσεις και Ασκήσεις στο κεφάλαιο των Μιγαδικών αριθμών (§ 2.1, 2.2, 2.3)

Α. Προαπαιτούμενες Γνώσεις

1. Τα 3-4 πρώτα μαθήματα είναι χρήσιμο να αφιερωθούν σε μια επανάληψη βασικών εννοιών και ασκήσεων από την κλασική Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου (ταυτότητες, ανισοταυτότητες, απόλυτη τιμή, τριώνυμο) και από την Β΄ Λυκείου κατεύθυνσης (συνθήκες παραλληλίας και καθετότητας διανυσμάτων, ορισμοί και εξισώσεις κωνικών τομών). Η επανάληψη θα συμπληρωθεί στην εισαγωγή του Α΄ κεφαλαίου της Ανάλυσης με υπενθύμιση γνώσεων από την Άλγεβρα της Β΄ Λυκείου (κυρίως εκθετική, λογάριθμοι).

Β. Ορισμός και πράξεις Μιγαδικών

1. Εισαγωγή στους Μιγαδικούς αριθμούς.

Μια πρώτη συζήτηση, για αφόρμηση (πρόκληση ενδιαφέροντος)…
Είναι φανερό ότι η εξίσωση $\chi + 2 = 0$ δεν έχει λύση στο σύνολο N των φυσικών αριθμών, έχει όμως στο ευρύτερο σύνολο Z των ακεραίων αριθμών. Όμοια η εξίσωση $3x = 1$ δεν έχει λύση στο σύνολο Z, αλλά έχει στο ευρύτερο σύνολο Q των ρητών. Όμοια η εξίσωση $\chi^2 = 3$ δεν έχει λύση στο σύνολο των ρητών, αλλά έχει λύση στο σύνολο των αρρήτων, άρα στο ευρύτερο σύνολο R των πραγματικών αριθμών. Επίσης είναι γνωστό ότι και η εξίσωση $\chi^2 = -1$ δεν έχει λύση στο σύνολο R, δηλαδή ουσιαστικά δεν έχει έννοια στο σύνολο R η τετραγωνική ρίζα του αριθμού -1.
Γενικά, κάθε δευτεροβάθμια εξίσωση με αρνητική διακρίνουσα, όπως γνωρίζουμε, δεν έχει λύσεις στο σύνολο R. Η πορεία αυτή μας δημιουργεί την ελπίδα μήπως και οι εξισώσεις αυτές έχουν λύσεις σε ένα άλλο ευρύτερο σύνολο αριθμών.
Ιστορικά όμως η ανάγκη δημιουργίας νέων αριθμών δεν προέκυψε από την λύση των δευτεροβαθμίων εξισώσεων, αλλά από τη λύση των τριτοβαθμίων εξισώσεων και συνεχίζουμε όπως στην εισαγωγή του βιβλίου...

Ιστορικά στοιχεία (εκτός αυτά του βιβλίου)

Οι μιγαδικοί αριθμοί είναι σχετικά πρόσφατη ανακάλυψη, όχι ενός ανθρώπου αλλά πολλών. Φαίνεται ότι οι μιγαδικοί αριθμοί εισήχθησαν στα Μαθηματικά, από τον John Wallis (1673). Όμως, πολύ πριν από αυτόν, το πρόβλημα του υπολογισμού τετραγωνικής ρίζας αρνητικού αριθμού είχε τεθεί από παλιά (π.χ. Ήρων (50 μ.Χ.), Διόφαντος (275 μ.Χ.), Mahavira (850 μ.Χ.), Bhaskara (1150 μ.Χ.) κλπ.). Ο Wallis στο Algebra (cap. LXVI, Vol. II, p. 286, έκδοση στα Λατινικά), λέει ότι, «η τετραγωνική ρίζα ενός αρνητικού αριθμού αν και αδύνατος, δεν είναι ωστόσο πιο ακατανόητη από έναν αρνητικό αριθμό». Ονομάζει τις ποσότητες αυτές *φανταστικές* και φτάνει μέχρι το σημείο να θεωρήσει έναν άξονα κάθετο προς τον άξονα των πραγματικών αριθμών και να πει ότι αυτός θα έπρεπε να λέγεται άξων των φανταστικών ποσοτήτων. Πέραν του σημείου αυτού όμως, δεν προχωρά. Την συνέχεια της μελέτης των φανταστικών ποσοτήτων την ανέλαβε ο Leibnitz (1676) και ο Jean Bernoulli (1702). Γεωμετρική αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών έδωσαν οι Wessel (1797), Argand (1806) και

Gauçs (1831). Τέλος ο W. R. Hamilton (1805-1865) θεμελίωσε αργότερα με αλγεβρικό τρόπο τη θεωρία των μιγαδικών αριθμών. Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. History of Mathematics. Vol II, σελ. 261, του D.E. Smith, έκδοση Dover.
Η εισαγωγή αυτή είναι απαραίτητη ώστε να φανεί η αναγκαιότητα εισαγωγής των μιγαδικών αριθμών. Στο σημείο αυτό πρέπει να επισημάνουμε στους μαθητές το τόλμημα και συνάμα το ρίσκο της ανθρώπινης (επιστημονικής) φαντασίας, στηριζόμενης στη διαίσθηση, να δεχθεί ένα ανύπαρκτο για τα καθιερωμένα «αριθμό» (συμβολικά τον i) με την ιδιότητα $i^2 = -1$ και να καλπάσει σε νέα άγνωστα επιστημονικά πεδία. Ο συμβολισμός $\sqrt{-1} = i$ οφείλεται στον Euler. Αποφεύγουμε όμως να χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\sqrt{-1}$ όπως θα εξηγήσουμε παρακάτω.
Καλό είναι τέλος να αναφέρουμε ότι κάθε πολυωνυμική εξίσωση οποιουδήποτε βαθμού, με συντελεστές μιγαδικούς, έχει πάντα λύση στο νέο σύνολο αριθμών (σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας που διατύπωσε πρώτος ο D' Alembert, αλλά απέδειξε ο Gauss στην διδακτορική του διατριβή το 1799) και ως συνέπεια αυτού όλες οι λύσεις της, πλήθους όσο ο βαθμός της, είναι μιγαδικοί αριθμοί και έτσι δεν υπάρχει πια ανάγκη για νέους αριθμούς.
Εδώ πρέπει να γίνει η επισήμανση ότι το θεώρημα αυτό δεν είναι στην εξεταστέα ύλη και δεν πρέπει να χρησιμοποιείται στις εξετάσεις, αλλά καλό είναι να το γνωρίζουν. Έχει παρατηρηθεί τα προηγούμενα χρόνια, ότι μερικοί μαθητές, το θεωρούν δεδομένο και το χρησιμοποιούν σε ασκήσεις με εξισώσεις που αντιμετωπίζονται με μέσα της Ανάλυσης.

2. Ο τρόπος εισαγωγής των Μιγαδικών αριθμών από το σχολικό βιβλίο δεν είναι αυστηρά Μαθηματικός, αλλά είναι ένας επαγωγικο-παραγωγικός τρόπος κατάλληλος για μαθητές που έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή με τους μιγαδικούς αριθμούς. Χρήσιμο είναι να επισημανθεί ότι κάθε πραγματικός αριθμός $\chi = \chi + i0$ είναι και μιγαδικός ενώ δεν ισχύει το αντίστροφο. Η γεωμετρική αναπαράσταση του C τονίζει ακόμη περισσότερο αυτή την διαφορά. Ένας μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός που δεν είναι πραγματικός λέγεται **καθαρά μιγαδικός** αριθμός. Το 0 είναι ένας πραγματικός αριθμός, αλλά τον θεωρούμε (καταχρηστικά) *και* φανταστικό. Αυτό δικαιολογείται και από την εποπτεία, αφού ανήκει και στον y-άξονα που είναι ο φανταστικός άξονας, αλλά βοηθά και στην αποφυγή περιπτωσιολογίας σε διάφορα προβλήματα.

3. Α. Συχνό είναι το λάθος των μαθητών να θεωρούν σε καρτεσιανή μορφή ένα οποιοδήποτε μιγαδικό που έχει την μορφή $\zeta + \omega i$, π.χ. $\alpha = -2 + (3-i)i$ ή $\beta = (2+i)+3i$. Χρειάζεται λοιπόν να τονιστεί, όχι μόνο λεκτικά (ότι πρέπει $\zeta \in R$ και $\omega \in R$) αλλά και «βιωματικά» π.χ.
$\alpha = -2 + (3 - i)i = -2 + 3i +1 = -1 + 3i$, οπότε $Re(\alpha) = -1$, $Im(\alpha) =3$ κλπ.
Β. Η ισοδυναμία $\alpha + \beta i = \gamma + \delta i \Leftrightarrow \alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$, δικαιολογείται από το σχ. βιβλίο λόγω της παραδοχής της μοναδικότητας του μιγαδικού $\alpha + \beta i$, δηλαδή της μοναδικότητας των α, β. Μπορούμε όμως, μετά την διδασκαλία των 4 πράξεων, να δώσουμε 2-3 αριθμητικές παραστάσεις (ή να πουν οι μαθητές δικές τους) με πραγματικούς αριθμούς και τον i συνδεδεμένους με τις 4 πράξεις, που τελικά μετά τις πράξεις καταλήγουν υποχρεωτικά στην τελική ("ανηγμένη") μορφή $\alpha + \beta i$, με α, β μοναδικούς ασφαλώς πραγματικούς αριθμούς. Αυτό μπορεί να μην αποδεικνύει την μοναδικότητα αλλά πείθει και είναι αρκετό για την φάση αυτή.

Γ. Η ισοδυναμία $\alpha + \beta i = \gamma + \delta i \Leftrightarrow \alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$, ισχύει μόνο αν όλοι οι αριθμοί α, β, γ, δ είναι πραγματικοί, π.χ. είναι
$(2i + 1) +3i = (1 + i) + 4i$ αλλά δεν ισχύει $2i + 1 = 1+i$ ή $3 = 4$.

4. Διαφορές των συνόλων R και C:

α. Η γνωστή ισοδυναμία στο R, $z^{2\kappa} + \omega^{2\lambda} = 0 \Leftrightarrow z = \omega = 0$ $(\kappa, \lambda \in N^*)$, δεν ισχύει στους μιγαδικούς, π.χ. $1^2 + i^2 = 0$.

β. Δεν μπορούμε να ορίσουμε διάταξη στο σύνολο των μιγαδικών.

Ο ορισμός καταρχήν κάποιας «φυσικής» διάταξης συμβιβαστής με τις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού του **C** και λαμβάνοντας υπόψη την διάταξη του R, παρουσιάζει προβλήματα:

Αν π.χ. ορίσουμε ως θετικό ένα μιγαδικό με $\alpha + \beta i > 0 \Leftrightarrow \alpha > 0$ και $\beta > 0$, τότε ενώ το άθροισμα δυο τέτοιων θετικών μιγαδικών είναι θετικός, όπως εύκολα αποδεικνύεται, δεν ισχύει το ίδιο για το γινόμενο: ενώ $1+i > 0$ και $1+2i > 0$ το γινόμενό τους είναι $(1+i)(1+2i) = -1+3i$ που δεν είναι θετικός σύμφωνα με τον ορισμό μας, άρα ο πολλαπλασιασμός δεν θα είναι συμβατός με την διάταξη αυτή (όπως θα περιμέναμε) κλπ.

Πιο γενικά, η ισότητα $i^2 = -1$, απαγορεύει τον ορισμό διάταξης σο C:
Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια διάταξη «<» (εννοείται ολική) στο C συμβιβαστή με τις πράξεις "+", "·" .Τότε (εξ' ορισμού της –ολικής- διάταξης σε σώμα) θα υπάρχει ένα μη κενό υποσύνολο Θ του C ώστε :

- για κάθε $\zeta \in C$ να ισχύει $\zeta = 0$ ή $\zeta \in \Theta$ ή $-\zeta \in \Theta$ και
- για κάθε $\zeta, \omega \in \Theta$ να ισχύουν $\zeta + \omega \in \Theta$ και $\zeta \cdot \omega \in \Theta$.

Ας ονομάσουμε θετικό (>0) ένα αριθμό του Θ, οπότε αρνητικός (<0) είναι ένας μιγαδικός ζ, συμβολικά $\zeta < 0$, όταν $-\zeta \in \Theta$ ή $-\zeta > 0$.
Ο i δεν είναι μηδέν, οπότε (εξ' ορισμού) θα έχουμε $i > 0$ ή $i < 0$. Θα δείξουμε ότι και τα δυο οδηγούν σε άτοπο.

- Αν $i > 0$, τότε $i \cdot i > 0$ ή $-1>0$ (βλ. σημείωση). Άρα $1<0$ (εξ' ορισμού του αρνητικού), αλλά τότε και $1 = (-1)(-1) > 0$, άτοπο (άρα $1>0$)) .

Σημείωση: Η σχέση $-1>0$ δεν είναι κατ' αρχήν ψευδής, εφόσον η υποτιθέμενη διάταξη στο C δεν οφείλει να είναι επέκταση αυτής του R. Έτσι προχωρήσαμε και ουσιαστικά δείξαμε και (το θεώρημα) ότι η μονάδα ενός διατεταγμένου σώματος είναι θετικό στοιχείο (γνωστή πρόταση από την πανεπιστημιακή άλγεβρα). Στο άτοπο μπορούμε να οδηγηθούμε και αλλιώς:
$-1 > 0$, οπότε λόγω $i > 0$, θα έχουμε $- i = (-1)i > 0$, οπότε $i < 0$, άτοπο.

- Όμοια, αν $i < 0$ τότε $- i > 0$ (εξ' ορισμού του αρνητικού), οπότε και $(-i)(-i) > 0$ ή $-1>0$ και λόγω $- i > 0$, $i = (-1)(- i) > 0$, άτοπο.

Άρα δεν μπορεί να οριστεί διάταξη στο C συμβιβαστή με τις πράξεις του "+", "·".
Μπορεί όμως να οριστεί μια άλλη «τυπική διάταξη» η λεγόμενη «λεξικογραφική» :
Αν $\zeta = \alpha + \beta i$, $\omega = \gamma + \delta i$, τότε ορίζουμε $\zeta < \omega \Leftrightarrow (\alpha < \gamma)$ ή $(\alpha = \gamma$ και $\beta < \delta)$, έτσι π.χ..
$0 = (0, 0) < (0, 1) = i$.

❖ Επομένως, αν $\zeta \in C$, ισχύει, $\zeta > 0$ αν και μόνο ($\zeta \in R$ και $\zeta > 0$). Όμοια αν $\zeta < 0$.

γ. Δεν ορίζουμε τετραγωνική ρίζα μιγαδικού. Αν θέλαμε π.χ. να ορίσουμε τετραγωνική ρίζα του 2i, ένα αριθμό (ασφαλώς) με την ιδιότητα $\zeta^2 = 2i$, τότε αν $\zeta = \chi + \psi i$, θα έχουμε

$(\chi + \psi i)^2 = 2i \Leftrightarrow \chi^2 - \psi^2 = 0$ και $2\chi\psi = 2 \Leftrightarrow \chi = \psi = 1$ ή $\chi = \psi = -1$

Άρα $\zeta = 1+i$ ή $\zeta = -1- i$. Δηλαδή ο i έχει δυο τετραγωνικές ρίζες. Το ίδιο αποδεικνύεται για κάθε μιγαδικό αριθμό. Πως όμως θα τις διακρίνουμε, αν θέλουμε να κάνουμε πράξεις με αυτές, αφού στο C δεν έχουμε διάκριση μεταξύ θετικών και αρνητικών αριθμών ή άλλη διάκριση; Δεν ορίζεται λοιπόν (μονοσήμαντα) η τετραγωνική ρίζα μιγαδικού, όπως συμβαίνει στους (θετικούς) πραγματικούς και έτσι δεν ορίζουμε τετραγωνική ρίζα μιγαδικού ούτε χρησιμοποιούμε το σύμβολο της ρίζας (τετραγωνικής ή άλλης). Συνέπεια αυτού είναι να μην ορίζουμε και δυνάμεις μιγαδικών με εκθέτη ρητό, όπως συμβαίνει στους πραγματικούς και περιοριζόμαστε μόνο σε δυνάμεις μιγαδικών με εκθέτες ακέραιους Πάντως σε μερικά πανεπιστημιακά βιβλία ορίζεται το σύμβολο $\sqrt{z}$ με διπλή σημασία, δηλαδή παριστάνει και τις δυο τετραγωνικές ρίζες του μιγαδικού z. Έτσι όμως ο τύπος $\varphi(z) = \sqrt{z}$ δεν ορίζει συνάρτηση κατά τα γνωστά (είναι μια πλειότιμος συνάρτηση).

5. Ομοιότητες των συνόλων R και C.

Έχουν τις ίδιες πράξεις και τις ιδιότητες των πράξεων, με συνέπειες :

Α. **Να ισχύουν στο C όλες οι γνωστές ταυτότητες στο R** και ειδικά οι (πολύ χρήσιμες)

- $z^3 + w^3 = (z + w)(z^2 - zw + w^2)$,
- $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$
- $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$, $z^3 + 1 = (z + 1)(z^2 - z + 1)$

(Προσοχή στις αξιοσημείωτες παραστάσεις $\alpha^2 \pm \alpha\beta + \beta^2$, $z^2 \pm z + 1$)

Β. Ο αλγεβρικός λογισμός να γίνεται όπως στους πραγματικούς αριθμούς λαμβάνοντας υπόψη ότι $1 + i^2 = 0$. Επίσης και η λύση συστημάτων μιγαδικών γίνεται με τις γνωστές μεθόδους από τους πραγματικούς αριθμούς

Γ. Οι δυνάμεις μιγαδικών (με εκθέτες μόνο ακέραιους) να έχουν τις γνωστές από τους πραγματικούς αριθμούς ιδιότητες.

6. α. Το μιγαδικό επίπεδο (Μ.Ε.) ή επίπεδο Gauss, δεν ταυτίζεται με το καρτεσιανό επίπεδο. Το Μ.Ε. έχει επιπλέον στοιχεία (δομή). Ενώ ως προς τις πράξεις πρόσθεση και αφαίρεση δεν υπάρχει διαφορά, στο Μ.Ε. ορίζεται γινόμενο και πηλίκο μιγαδικών, ενώ στο καρτεσιανό δεν ορίζουμε γινόμενο διανυσμάτων (ως εσωτερική πράξη, το εσωτερικό γινόμενο δεν είναι ως γνωστό εσωτερική πράξη, ενώ το εξωτερικό είναι διάνυσμα αλλά όχι του επιπέδου των διανυσμάτων).

β. Αν $z = \alpha + \beta i$ ($\alpha, \beta \in R$) και Z η εικόνα του στο Μ.Ε., τότε $Z(\alpha, \beta)$ και $\overrightarrow{OZ} = (\alpha, \beta) = (Re(z), Im(z))$.

Δηλαδή, η διανυσματική ακτίνα (δ. α.) ενός μιγαδικού είναι διάνυσμα με συντεταγμένες το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μιγαδικού αυτού, δηλαδή

έχει τις **ίδιες** συντεταγμένες με την εικόνα του z. Η μετάβαση από τους μιγαδικούς στις διανυσματικές τους ακτίνες είναι χρήσιμη σε πολλά θέματα μιγαδικών.

γ. Κατ' αναλογία με τους πραγματικούς αριθμούς, αντί να λέμε η εικόνα του μιγαδικού z, μπορούμε να λέμε απλά το σημείο z ή ο μιγαδικός z και να εννοούμε από τα συμφραζόμενα την εικόνα του z.

δ. Έστω $z, \omega \in C^*$, $\lambda \in R$, και Z, W οι εικόνες τους αντίστοιχα. Ισχύουν

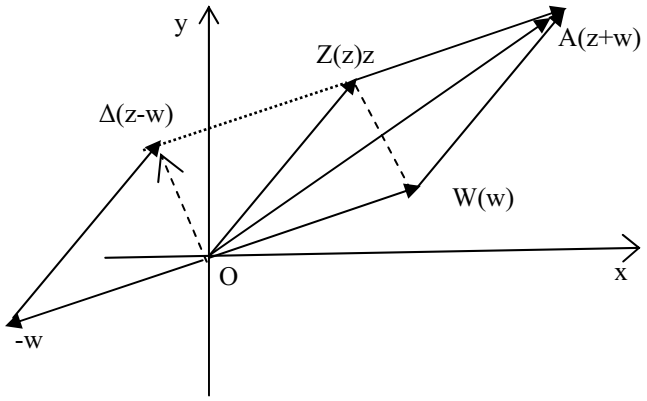
$z = \lambda\omega$ αν και μόνο αν $\overrightarrow{OZ} = \lambda \overrightarrow{OW}$ και ειδικότερα

i. $\overrightarrow{OZ} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OW} \Leftrightarrow$ υπάρχει $\lambda > 0$ με $z = \lambda\omega \Leftrightarrow \dfrac{z}{\omega} > 0$.

ii. $\overrightarrow{OZ} \uparrow\downarrow \overrightarrow{OW} \Leftrightarrow$ υπάρχει $\lambda < 0$ με, $z = \lambda\omega \Leftrightarrow \dfrac{z}{\omega} < 0$.

(Μπορεί να δοθούν ως ασκήσεις και καλό είναι να απομνημονευτούν)

7. Στο παραλληλόγραμμο της πρόσθεσης μιγαδικών



Η κύρια διαγώνιος ΟΑ ορίζει την δ.α. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OZ} + \overrightarrow{OW} = \left(\mathrm{Re}(z+w), \mathrm{Im}(z+w)\right)$ του z + w, ενώ η άλλη διαγώνιος WZ = ΟΔ την δ. α.

$\overrightarrow{O\Delta} = \overrightarrow{WZ} = \overrightarrow{OZ} - \overrightarrow{OW} = \left(\mathrm{Re}(z-w), \mathrm{Im}(z-w)\right)$ της διαφοράς z - w.

❖ Άρα και $|z-w| = (O\Delta) = (ZW)$

❖ Με βάση τα παραλληλόγραμμα OZAW, OWZΔ και χρησιμοποιώντας γνώσεις από την Γεωμετρία μπορούμε να αντιμετωπίσουμε πολλές ασκήσεις μιγαδικών.

Π.χ. αν $|z + w| = |z - w|$ τότε οι δ. α των μιγαδικών z, w είναι κάθετες και αντίστροφα. Πράγματι, το παραλληλόγραμμο OZAW έχει ίσες διαγώνιες αν και μόνο είναι ορθογώνιο.

❖ Στο πολλαπλασιασμό των μιγαδικών, χρήσιμο είναι να δώσουμε και το γινόμενο $(\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i) = \alpha^2 + \beta^2$, επισημαίνοντας ότι ο μιγαδικός $\alpha + \beta i$ πολλαπλασιαζόμενος με τον (συζυγή του) $\alpha - \beta i$ δίνει πάντα *γινόμενο πραγματικό* (και μάλιστα μη αρνητικό) αριθμό. Έτσι όταν στην συνέχεια θέλουμε να βρούμε το πηλίκο $\dfrac{\gamma + \delta i}{\alpha + \beta i}$ (σε

καρτεσιανή μορφή) θα έρθει φυσιολογικά το τέχνασμα του πολλαπλασιασμού και των δυο όρων με τον α-βi για «να κάνουμε τον α + βi πραγματικό».

8. Δυνάμεις του i: Παρατηρείται συχνά οι μαθητές την ιδιότητα $i^{\nu} = i^{\upsilon}$, $\nu = 4\kappa+\upsilon$, να την γενικεύουν για κάθε μιγαδικό ζ, δηλαδή να γράφουν $\zeta^{4\kappa+\upsilon} = \zeta^{\upsilon}$. Καλό είναι λοιπόν να τονιστεί το σημείο αυτό και μάλιστα να δοθεί ένα αντιπαράδειγμα, π.χ.
$(2i)^5 \neq (2i)^1$.

Γ. Συζυγείς Μιγαδικοί

9. Οι σχέσεις $z+\bar{z}=2\alpha$, $z-\bar{z}=2\beta i$ χρήσιμο είναι να γραφούν και στη μορφή

$$z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z),\ z-\bar{z}=2\mathrm{Im}(z)i \quad \text{ή} \quad \mathrm{Re}(z)=\frac{z+\bar{z}}{2},\ \mathrm{Im}(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i}$$

(έκφραση του πραγματικού και φανταστικού μέρους μιγαδικού)

10. Κριτήρια πραγματικού και φανταστικού αριθμού με συζυγείς.

Ισχύουν α) $z \in R \Leftrightarrow \bar{z} = z$ β) $z \in I \Leftrightarrow \bar{z} = -z$

Να τονίσουμε ότι τα κριτήρια αυτά χρησιμοποιούνται συνήθως σε θεωρητικά θέματα (όπου δεν γράφουμε συνήθως τους μιγαδικούς σε καρτεσιανή μορφή) και προκύπτουν εύκολα από τις παραπάνω σχέσεις του βιβλίου. Μπορούν να χρησιμοποιούνται από τους μαθητές αλλά τουλάχιστον με την αναφορά ότι προκύπτουν από τις σχέσεις
$z+\bar{z}=2\alpha$, $z-\bar{z}=2\beta i$ του βιβλίου.

11. Αξιοσημείωτες συζυγείς αριθμοί : $z\overline{w}$, $\bar{z}w$ με

$$\mathrm{Re}(z\overline{w})=\mathrm{Re}(\bar{z}w),\ \mathrm{Im}(z\overline{w})=-\mathrm{Im}(\bar{z}w)$$

$$z\overline{w}+\bar{z}w=2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}),\quad z\overline{w}-\bar{z}w=2\,\mathrm{Im}(z\overline{w})i,\quad z\overline{w}\cdot\bar{z}w=|z|^2|w|^2\geq 0$$

12. Η ιδιότητα του πηλίκου συζυγών μπορεί να αποδειχθεί και με την βοήθεια της ιδιότητας γινομένου συζυγών, παρατηρώντας ότι $z_1=\frac{z_1}{z_2}\cdot z_2$ κλπ.

13. Αν $w\in C-\{0\}$, $z\in C$, τότε ισχύουν,

- $z\overline{w}\in R \Leftrightarrow \frac{z}{w}\in R \Leftrightarrow \overrightarrow{OZ} // \overrightarrow{OW} \Leftrightarrow$ O, Z, W συνευθειακά, και
- $z\overline{w}\in I \Leftrightarrow \frac{z}{w}\in I \Leftrightarrow \overrightarrow{OZ}$ κάθετη στην $\overrightarrow{OW}$.

(Να δοθούν ως ασκήσεις. Αποδεικνύονται και με την βοήθεια του μέτρου)

14. Η εξίσωση $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$, $\alpha \neq 0$.

Α. Η λύση της εξίσωσης αυτής διευκολύνεται αν προηγηθεί η λύση, ως προς ζ, της εξίσωση $\zeta^2=\omega^2$ και να τονιστεί ότι ισχύει και στο C η ισοδυναμία $\zeta^2=\omega^2 \Leftrightarrow \zeta=\pm\omega$.
Β. Επισημαίνουμε ότι την εξίσωση αυτή την λύνουμε με τους συντελεστές να είναι μόνο πραγματικοί αριθμοί και με αυτή την προϋπόθεση έχει συζυγείς ρίζες όταν δεν

έχει πραγματικές. Επίσης ότι οι γνωστοί τύποι του Vieta ισχύουν και για μιγαδικές ρίζες και είναι αρκετά χρήσιμοι σε σχετικά θέματα .

Δ. Μέτρο Μιγαδικού

15. Το μέτρο ενός μιγαδικού είναι επέκταση στο C της γνωστής έννοιας της απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού. Έτσι προκύπτει, ειδικότερα, ότι το μέτρο ενός πραγματικού αριθμού είναι ίσο με την απόλυτη τιμή του. Για τον ορισμό λοιπόν του μέτρου μπορούμε να αρχίσουμε από τον γεωμετρικό ορισμό της απόλυτης τιμής πραγματικού και να επεκταθούμε ομαλά στο μέτρο μιγαδικού. Στην συνέχεια να επιστρέψουμε αλγεβρικά στην απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού ως ειδική περίπτωση. Ασφαλώς μερικά απλά παραδείγματα υπολογισμού μέτρου δεν πρέπει να θεωρηθεί αυτονόητο ότι είναι εύκολη υπόθεση για όλους τους μαθητές…

16. Ιδιότητες του μέτρου

Α. Η ιδιότητα $\zeta = 0 \Leftrightarrow |\zeta| = 0$ μας διευκολύνει μερικές φορές να δείξουμε ότι ένας μιγαδικός αριθμός ή μια αλγεβρική μιγαδική παράσταση είναι μηδέν.
Β. Μέσω της (σημαντικής) σχέσης $|z|^2 = z\bar{z}$ γίνεται η «απαλλαγή» από το μέτρο.
Χρήσιμες σε ασκήσεις είναι και οι ισοδύναμες σχέσεις $\bar{z} = \frac{|z|^2}{z}$, $z = \frac{|z|^2}{\bar{z}}$ οι οποίες εκφράζουν ένα από τους $\bar{z}$, z συναρτήσει του άλλου.

Γ. Με την βοήθεια των σχέσεων $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$ «απαλλασσόμαστε ή μετακινούμε τους συζυγείς ή τα πρόσημα» μέσα στα μέτρα. Το τελευταίο είναι αρκετά χρήσιμο σε σχέσεις σχετικές με εξίσωση κύκλου ή μεσοκαθέτου στο C.

Δ. Η ιδιότητα του μέτρου πηλίκου μπορεί να αποδειχθεί και με την βοήθεια αυτής του γινομένου, παρατηρώντας ότι $z_1 = \frac{z_1}{z_2} \cdot z_2$, κλπ.

Ε. Η ιδιότητα $|z^\nu| = |z|^\nu$ ή η αντίστοιχη στους συζυγείς, καλό είναι ζητηθεί από τους μαθητές να την αποδείξουν με την μέθοδο της Μαθηματικής επαγωγής για να φανεί η συνέχεια της Μαθηματικής γνώσης, αλλά και θυμηθούν οι μαθητές την μέθοδο αυτή. Μια άμεση και καλή εφαρμογή αυτής της ιδιότητας είναι : να βρεθεί η απόσταση του μιγαδικού $\zeta = \left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{2010}$ από την αρχή του Μ.Ε.

17. Κριτήρια πραγματικού και φανταστικού αριθμού με μέτρα:

$$z \in R \Leftrightarrow |z|^2 = z^2 \quad , \quad z \in I \Leftrightarrow |z|^2 = -z^2 .$$

(καλό είναι να τα γνωρίζουν οι μαθητές, αλλά απαιτείται απόδειξη αν το αναφέρουν στις εξετάσεις!). Ιδιαίτερα να επισημάνουμε το συχνό λάθος των μαθητών $(z)^2 = |z|^2$ (π.χ. $i^2 \neq |i|^2$) και γενικά ότι $(z)^\nu \neq |z|^\nu$, $\nu \in N^*$, $(\zeta + \omega)^2 \neq |\zeta + \omega|^2$ κλπ.

18. Τριγωνική Ανισότητα.

Α. Στην τριγωνική ανισοταυτότητα, $||z| - |\omega|| \le |z + \omega| \le |z| + |\omega|$.

Αν Z, W οι εικόνες των z, ω αντίστοιχα, η ισότητα αριστερά ισχύει αν και μόνο $\overrightarrow{OZ} \uparrow\downarrow \overrightarrow{OW}$, ενώ δεξιά αν και μόνο $\overrightarrow{OZ} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OW}$. Αυτό προκύπτει και από τον συλλογισμό ότι, αν τα σημεία O, Z, W δεν είναι συνευθειακά τότε ορίζουν τρίγωνο και ισχύουν αυστηρά οι ανισότητες στο τρίγωνο OZW, άρα τα σημεία O, Z,W είναι συνευθειακά κλπ..
Υπενθυμίζουμε και την αντίστοιχη (τριγωνική) ανισοϊσότητα στα διανύσματα.

$$||\overrightarrow{OZ}| - |\overrightarrow{OW}|| \le |\overrightarrow{OZ} + \overrightarrow{OW}| \le |\overrightarrow{OZ}| + |\overrightarrow{OW}|.$$

Β. Ως άμεσες εφαρμογές της τριγωνικής ανισότητας μπορούν να δοθούν οι ασκήσεις : αν α, β, γ μιγαδικοί αριθμοί τότε ισχύουν

i) $|\alpha - \beta| \le |\alpha| + |\beta|$ ii) $|\alpha - \bar{\beta}| \le |\bar{\alpha}| + |\beta|$, iii) $|\alpha - \beta| \le |\alpha - \gamma| + |\gamma - \beta|$

Γ. Ας σημειωθεί ακόμη ότι σε προβλήματα μέγιστων ή ελάχιστων όταν χρησιμοποιούμε την τριγωνική ανισότητα, πρέπει να εξασφαλίζεται απαραίτητα η ισότητα για να έχουμε ακρότατο. Π.χ. αν $|\zeta| = 1$, $|\omega| = 2$ τότε το μέγιστο της παράστασης $|\zeta + \omega|$, για την οποία έχουμε $|\zeta + \omega| \le |\zeta| + |\omega| = 3$, δεν είναι οπωσδήποτε το 3, αλλά ίσως είναι το 3 (δεν ξέρουμε δηλαδή αν υπάρχει μέγιστο). Απαιτείται να εξετάσουμε αν οι δ. α. ακτίνες των ζ, ω μπορούν να είναι ομόρροπες και (αν ζητείται) για ποιους μιγαδικούς συμβαίνει αυτό. Συχνά όμως τα σχετικά προβλήματα αντιμετωπίζονται πιο άμεσα με Γεωμετρικό τρόπο.

19. Απόσταση μιγαδικών

Α. Η έκφραση της απόστασης των (εικόνων) δυο μιγαδικών ζ, ω με την διαφορά $|\zeta-\omega|$ είναι ένα ιδιαίτερο σημαντικότερο θέμα στη τωρινή ύλη των Μιγαδικών και πρέπει να γίνει κατανοητή μέσα από απλές και ποικίλες ασκήσεις κατανόησης.
Β. Εκτός από τους δυο γ. τ., τον κύκλο και την μεσοκάθετη που υπάρχουν στο βιβλίο, μπορούμε να αναφέρουμε και δυο άλλους σε μιγαδική μορφή:
την έλλειψη $|z - z_1| + |z - z_2| = 2\alpha$ και την υπερβολή $||z - z_1| - |z - z_2|| = 2\alpha$ ως άμεση εφαρμογή του ορισμού των και ως άσκηση την παραβολή, που έχει την μιγαδική μορφή $(z - \bar{z})^2 = -4p(z + \bar{z})$.

Ε. Μεθοδολογικές Σημειώσεις

1. Αν $\zeta = \omega$ τότε $\zeta^2 = \omega^2$ και γενικά $\zeta^\nu = \omega^\nu$ ($\nu \in N^*$) αλλά δεν ισχύει το αντίστροφο (όπως και στο R). Ισχύει όμως $\zeta^2 = \omega^2 \Leftrightarrow \zeta = \pm\omega$, μόνο όμως με εκθέτη 2. γιατί αν ν ακέραιος , ν > 1, τότε η ισότητα $\zeta^{2\nu} = \omega^{2\nu}$ δεν είναι ισοδύναμη με $\zeta = \pm\omega$.
Π.χ. $i^4 = 1^4$.

2. Ισχύει, $\zeta = \omega \Leftrightarrow \bar{\zeta} = \bar{\omega}$ (απαλλαγή ή μετακίνηση συζυγών σε ισότητα).

3. Ισχύει, $\zeta = \omega \Rightarrow |\zeta| = |\omega|$ (πολύ χρήσιμη σε ασκήσεις με δυνάμεις, ιδίως μεγάλες, μιγαδικών)
(αλλά δεν ισχύει το αντίστροφο : $|i| = |-i|$, ιδιαίτερη προσοχή σ' αυτό. Υπόψη και η άσκηση 50.Β παρακάτω).

4. Πολλές γνώσεις από τα Μαθηματικά Κατεύθυνσης Β΄ Λυκείου είναι χρήσιμες στην αντιμετώπιση θεμάτων με μιγαδικούς αριθμούς. Ιδιαίτερα επισημαίνουμε τις συνθήκες παραλληλίας και καθετότητας διανυσμάτων, το εσωτερικό γινόμενο, την εξίσωση ευθείας και τις κωνικές τομές.

5. Συχνή είναι η τάση των μαθητών σε ασκήσεις μιγαδικών να γράφουν αμέσως τους μιγαδικούς σε καρτεσιανή μορφή με ολέθρια συνήθως αποτελέσματα. Να τονιστεί ότι αυτή η γραφή δεν μας βοηθά καθόλου σε θεωρητικές ασκήσεις (όπου συνήθως εργαζόμαστε με τις ιδιότητες) και εν πάση περιπτώσει είναι η τελευταία μας κίνηση αν βλέπουμε ότι δεν μπορούμε να προχωρήσουμε αλλιώς.

6. Σε θέματα ακρότατων αποστάσεων μιγαδικών σχετικά με κύκλους και ευθείες, χρήσιμο είναι να έχουμε υπόψη τις παρακάτω προτάσεις της Ευκλείδειας Γεωμετρίας:

Α. Αν η αρχή του Μ.Ε. βρίσκεται εκτός ενός κύκλου, τότε απ' όλους τους μιγαδικούς που ανήκουν στο κύκλο αυτό, την μικρότερη και την μεγαλύτερη απόσταση (μέτρο) από την αρχή του Μ.Ε. την έχουν οι μιγαδικοί που αντιστοιχούν στα (αντιδιαμετρικά) σημεία τομής της διακεντρικής ευθείας που διέρχεται από την αρχή του Μ.Ε. με τον κύκλο.

Β. Αν μια ευθεία βρίσκεται εκτός κύκλου, τότε απ' όλους τους μιγαδικούς που ανήκουν στο κύκλο αυτό, την μικρότερη και την μεγαλύτερη απόσταση από την ευθεία αυτή την έχουν αυτοί που αντιστοιχούν στα σημεία τομής της κάθετης από το κέντρο του κύκλου στην ευθεία αυτή, με τον κύκλο.

Γ. Αν δυο μιγαδικοί κινούνται πάνω σε δυο μη τεμνόμενους κύκλους, χωριστά, τότε η ελάχιστη και η μέγιστη απόσταση τους αντιστοιχεί σε μιγαδικούς με εικόνες τα σημεία τομής της διακεντρικής ευθείας με τους κύκλους αυτούς.

Γενικά, με την βοήθεια κυρίως της Γεωμετρίας και δευτερευόντως της Άλγεβρας αντιμετωπίζονται ευκολότερα πολλά θέματα μιγαδικών. Έτσι, ιδίως σε δύσκολες ασκήσεις μιγαδικών ας φέρνουμε κατά νου πρώτα τον γεωμετρικό τρόπο λύσης.

7. Γεωμετρικοί τόποι – μερικές επισημάνσεις.

Στα προβλήματα γεωμετρικών τόπων (γ. τ.) απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή:
α) Να αναφέρονται τα δεδομένα και τα σταθερά του προβλήματος,
β) Να αναφέρεται με σαφήνεια η ιδιότητα που έχει το σημείο του οποίου ζητούμε τον γεωμετρικό τόπο, και
γ) πρέπει να αποδεικνύεται το ορθό και το αντίστροφο. Γνωστή είναι η ασάφεια σε θέμα των απολυτηρίων εξετάσεων του 2006, αλλά δεν θα το σχολιάσω εδώ. Θα σχολιάσω όμως ένα θέμα των εισαγωγικών εξετάσεων τέκνων Ελλήνων εξωτερικού (θετικής κατεύθυνσης) που δόθηκε πριν λίγα χρόνια, επειδή το θεωρώ διδακτικότερο.

ΘΕΜΑ
Έστω ότι για ένα μιγαδικό αριθμό z ισχύει $(5z - 1)^5 = (z - 5)^5$:
α) Να δείξετε ότι $|5z - 1| = |z - 5|$.
β) Να δείξετε ότι $|z| = 1$.
γ) Αν $w = 5z + 1$ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων M(w) στο μιγαδικό επίπεδο.

Κατ' αρχή το (α) προκύπτει από την δεδομένη σχέση παίρνοντας τα μέτρα, ενώ το (β) είναι συνέπεια και συνέχεια του (α). Για το (γ) «λύνουμε την $w = 5z + 1$ ως προς z και αντικαθιστούμε στην $|z| = 1$, οπότε προκύπτει ο κύκλος $|w - 1| = 5$».
Ασάφεια υπάρχει στο (γ) ερώτημα.
Ωραία, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων M(w) στο μιγαδικό επίπεδο, προφανώς (κατά τον εξεταστή) όταν μεταβάλλεται ο z (που έπρεπε να αναφέρεται), αλλά που μεταβάλλεται ο z; Ίσως (ή προφανώς;) εννοεί ο εξεταστής, στον μοναδιαίο κύκλο (από το ερώτημα (β)), αλλά αυτό από πού προκύπτει; Το (γ) είναι ένα ανεξάρτητο ερώτημα και έπρεπε οπωσδήποτε να αναφέρεται που μεταβάλλεται ο z.
Το ότι πολλές φορές στα διάφορα θέματα «επικρατεί η συνήθεια» να θεωρείται «αυτονόητο» ένα επόμενο ερώτημα να λαμβάνει υπόψη του το συμπέρασμα του προηγουμένου, απλά είναι *μια κακή και επικίνδυνη συνήθεια,* που μόνο σύγχυση μπορεί να δημιουργήσει σε μαθητές και βαθμολογητές και ως εξεταστές πρέπει να την αποφεύγουμε γενικώς.
Γιατί όμως ο z να μην μεταβάλλεται ώστε (υπόθεση) $(5z - 1)^5 = (z - 5)^5$;
Θα μπορούσε κάλλιστα κάποιος μαθητής να το εκλάβει έτσι, και έτσι είναι το σωστό, αφού τα αρχικά δεδομένα καλύπτουν όλα τα ερωτήματα, οπότε η συνεπαγωγή

$$(5z - 1)^5 = (z - 5)^5 \Rightarrow |w - 1| = 5$$

θα προέκυπτε, μέσω των ερωτημάτων (α), (β), ασφαλώς δυσκολότερα. Το αντίστροφο όμως, που πρέπει ασφαλώς να αποδειχθεί μια και έχουμε γεωμετρικό τόπο, δηλαδή η συνεπαγωγή

$$|w - 1| = 5 \Rightarrow (5z - 1)^5 = (z - 5)^5,$$

δεν μπορεί να αποδειχθεί, γιατί δεν ισχύει!
Το ζήτημα είναι ότι οι σχέσεις $(5z - 1)^5 = (z - 5)^5$, $|z| = 1$,
δεν είναι ισοδύναμες, απλά η πρώτη συνεπάγεται την δεύτερη. Καλύτερα λοιπόν θα 'ταν το (γ) ερώτημα να είχε δοθεί ως εξής :

(γ) Αν $w = 5z + 1$ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων M(w) στο μιγαδικό επίπεδο, όταν η εικόνα του z μεταβάλλεται (σ' ολόκληρο) στον μοναδιαίο κύκλο.

- Μια άλλη παρατήρηση που μπορεί να γίνει εδώ, αλλά δεν αφορά τους μαθητές, είναι ότι οι μιγαδικοί z με την ιδιότητα $(5z - 1)^5 = (z - 5)^5$ δεν είναι άπειροι, αλλά ακριβώς 5, ως λύσεις μιας πολυωνυμικής εξίσωσης $5^{ου}$ βαθμού. Άρα και οι μιγαδικοί w είναι ακριβώς 5, επομένως ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος δεν είναι ο κύκλος $|w - 1| = 5$, αλλά μόνο 5 σημεία του κύκλου αυτού! Είναι σχεδόν βέβαιο ότι κανείς μαθητής δεν θα έδωσε αυτή την σωστή απάντηση, χωρίς δική του βέβαια υπαιτιότητα, αλλά σίγουρα πολλοί βαθμολογήθηκαν με άριστα, αφού οι εκπτώσεις στην βαθμολογία σε αυτές τις περιπτώσεις είναι αναπόφευκτες. Έτσι λοιπόν το σωστότερο τελικά θα 'ταν το ερώτημα (γ) να είχε διατυπωθεί ως εξής:
  (γ) Αν $w = 5z+1$ να βρεθεί η καμπύλη πάνω στην οποία ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών w

8. Από τις παρακάτω ασκήσεις ο διδάσκων μπορεί να επιλέξει όσες κρίνει σκόπιμο όταν θα διδάσκει τους μιγαδικούς, αλλά και στο τέλος, στη γενική επανάληψη. Όμως προτού γίνει αυτό πρέπει απαραίτητα να λυθούν όσες ασκήσεις κριθούν σκόπιμο από το σχ. βιβλίο, συμπεριλαμβανομένων των ασκήσεων κατανόησης και των γενικών ασκήσεων. Οι ασκήσεις της σελίδας 122 του σχ. βιβλίου αναφέρονται σε ενότητα εκτός ύλης αλλά οι ασκήσεις 8 (Α΄ ομάδας) και 4, 6, 7, 8 (Β΄ ομάδας) μπορούν να λυθούν και καλό είναι να δοθούν, ίσως προαιρετικές. Το ίδιο μπορεί να γίνει και με τις παρακάτω ασκήσεις με αστερίσκο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Α. Ορισμός – Πράξεις Μιγαδικών

1. α) Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς x, y για τους οποίους ισχύει
$(x - 2i)(4 + yi) = x(4i + yi - 1)$
β) Να λύσετε το σύστημα ($zi + 2\omega = 1 + 3i$, $2z - \omega i = i$).

2. Να γράψετε σε καρτεσιανή μορφή τους μιγαδικούς
$\zeta = (-3 + 2i)^2 + (5 - i)(3 + 2i)$, $z = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} + \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$, $\omega = -2008(\text{συν}\theta - i\text{ημ}\theta)$

3. Α. Αν $2\omega = 1 - i\sqrt{3}$ να υπολογίσετε τους αριθμούς ω^3, ω^{2005}.
Β. Να λύσετε τις εξισώσεις
α) $z + zi = i$, β) $z^2 = 3 - 4i$, γ) $z^3 = -8$, δ) $z^3 + 2z(z+1) + 1 = 0$.

4. Να προσδιορίσετε τους μιγαδικούς α, β ώστε να ισχύει $\frac{\alpha}{z+i} + \frac{\beta}{z-i} = \frac{2}{1+z^2}$ για κάθε επιτρεπτό μιγαδικό z. (Απ. i, -i)

5. α) Αν Α(α), Β(β), α, β∈ C τότε η δ. α. του μιγαδικού α - β ισούται με το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$: Α. Σωστό Β. Λάθος

β) Αν η διανυσματική ακτίνα (δ. α.) του μιγαδικού $\omega = 2\bar{z}$ σχηματίζει γωνία 60° με τον ημιάξονα Ox, τότε η εικόνα του z είναι σημείο της ευθείας
Α. $y = (\sqrt{3}/3)x$, $x > 0$, Β. $y = 2x\sqrt{3}$ Γ. $y = x\sqrt{3}$, Δ. $y = -x\sqrt{3}$, $x>0$.

γ) Αν $z = -3\omega$ και η δ. α. του z σχηματίζει με τον ημιάξονα Ox γωνία 240°, τότε η δ. α. του ω σχηματίζει με τον ημιάξονα Ox γωνία
Α.180° Β. -80° Γ. 60° Δ. 150° .

δ) Αν $z = x - yi$, τότε $\text{Im}(-z^2) =$ Α. $2xyi$, Β. $-2xyi$, Γ. $2xy$ Δ. $-2xy$.

ε) Αν $\zeta^2 + \omega^2 = 0$ τότε Α. $\zeta = \omega = 0$ Β. $\zeta = 0$ ή $\omega = 0$ Γ. άλλο

στ) Αν $\zeta^2 + 1 = \zeta$, τότε $\zeta^3 + \zeta^{2004} =$, Α. 1, Β. -1, Γ. i, Δ. –2, Ε. 0.

ζ) Αν z, w∈C, $z + iw = 0$ τότε Α. $z = w = 0$ Β. $z = 0$ ή $w = 0$ Γ. άλλο.

6. Να βρεθούν οι μιγαδικοί z, ω ώστε η εξίσωση $zx + 2\omega x = \omega^2 + 4$ να έχει 2010 λύσεις ως προς x στο σύνολο C.

7. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $f(z) = \frac{z^2 - 4z + 3}{z^3 - 1}$ $g(x) = \frac{2x + 2i}{x^4 - 1}$ (στο σύνολο C) και στην συνέχεια να απλοποιηθεί ο τύπος τους.

8. α) Αν a, b, c μιγαδικοί δείξετε ότι
$\text{Re}(a + b + c) = \text{Re}(a) + \text{Re}(b) + \text{Re}(c)$, $\text{Im}(a + b + c) = \text{Im}(a) + \text{Im}(b) + \text{Im}(c)$.

Στην συνέχεια να δείξετε ότι αν τρεις μιγαδικοί ανήκουν στο πρώτο τεταρτημόριο του Μ.Ε., τότε και το άθροισμά τους ανήκει στο ίδιο τεταρτημόριο.
β) Αν $\zeta = \alpha + (7\alpha - 5 - i)i$, $\alpha \in R$, να βρεθεί ο α ώστε η εικόνα του ζ να ανήκει στην παραβολή $y = x^2$.

9*. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα $S = i^{2003} + i^{2004} + i^{2005} + i^{2006}$,
$\Sigma = i + (2 + 3i) + (4 + 5i) + (6 + 7i) + \ldots + (2\nu-2 + (2\nu-1)i)$, $\nu \in N^*$.

10. Α. Να δειχθεί ότι οι εικόνες των μιγαδικών $\zeta = 3\lambda-1+i(6-13\lambda)$, $\lambda \in R$, ανήκουν σε ευθεία της οποίας να βρεθεί η εξίσωση.
Β. Αν $\zeta+(\lambda^2-\lambda+1)\omega = 0$, $\lambda \in R$ να βρεθεί η γωνία των δ. α. των μιγαδικών ζ, ω .

11. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί x, y αν ισχύει η ισότητα $(\chi - \psi)\zeta = 2\chi + \psi - 6$, όπου $\zeta \in C$, με $\zeta^2 + \zeta + 2 = 0$.

12. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών z με την ιδιότητα :
Α) Η δ. α. του μιγαδικού $u=\dfrac{z-1}{z+1}$ να σχηματίζει γωνία 30° με τον x–άξονα.
(Απ. τόξο κύκλου)
Β) Ο μιγαδικός $\omega = \dfrac{z-1}{z+1}$ να έχει εικόνα στον θετικό ημιάξονα των y.

Β. Συζυγείς Μιγαδικοί

13. α) Για τον αριθμό $\alpha = \bar{z}\,\omega + \bar{\omega}\,z$, ισχύει Α. $\alpha \in R$ Β. $\alpha \in I$ Γ. $\alpha \in C$, Δ. $\alpha > 0$.
β) Για τον αριθμό $\alpha = \bar{z}\,\omega - \bar{\omega}\,z$, ισχύει Α. $\alpha \in R$ Β. $\alpha \in I$ Γ. $\alpha \in C$, Δ. $\alpha = 0$.

γ) Η εξίσωση $\alpha\zeta^2 + \beta\zeta + \gamma = 0$, α, β, $\gamma \in R$ έχει ρίζες κ, $\lambda \in C$ με $|\kappa| \neq |\lambda|$. Ισχύει
Α. κ, λ μιγαδικοί αριθμοί Β.κ, λ πραγματικοί αριθμοί Γ.κ, λ φανταστικοί αριθμοί

δ) Αν οι μιγαδικοί αριθμοί $\zeta, , \bar{\zeta} , -\zeta , -\bar{\zeta}$ σχηματίζουν (κυρτό) τετράπλευρο, τότε αυτό είναι : Α. Παραλληλόγραμμο Β. Ορθογώνιο Γ. Ρόμβος Δ. τετράγωνο

ε) Ο αριθμός $(\zeta + \bar{\zeta})^2$, $\zeta \in C$, είναι :
Α. μιγαδικός Β. φανταστικός Γ. μη θετικός Δ. μη αρνητικός

στ΄) Ο αριθμός $(\zeta - \bar{\zeta})^2$, $\zeta \in C$, είναι :
Α. μιγαδικός Β. φανταστικός Γ. μη θετικός Δ. μη αρνητικός

14. Έστω ζ, ω δυο καθαρά μιγαδικοί αριθμοί. Να αποδειχθεί ότι αν ισχύει μια από τις παρακάτω συνθήκες τότε οι αριθμοί αυτοί είναι συζυγείς.
α) Το άθροισμα και το γινόμενό τους είναι πραγματικοί αριθμοί.
β) Το άθροισμα τους καθώς και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι πραγματικοί αριθμοί.

15. Έστω z, $\omega \in C^*$. Να αποδειχθεί ότι
α) $\omega\bar{z} \in R \Leftrightarrow \omega/z \in R$ και $\omega\bar{z} \in I \Leftrightarrow \omega/z \in I$.
β) Αν $\omega/z \in I$ τότε οι δ. α. των z, ω είναι κάθετες και αντίστροφα.

16. α) Να βρεθεί δευτεροβάθμια εξίσωση με συντελεστές πραγματικούς αριθμούς που έχει ρίζα τον αριθμό -3+5i.
β) Αν κ, λ οι ρίζες της προηγούμενης εξίσωσης να δειχθεί ότι ο αριθμός $\zeta = \kappa^{\nu} + \lambda^{\nu}$, είναι πραγματικός για κάθε $\nu \in N$.

17. Α.Αν η εξίσωση $\zeta^2 + \alpha\zeta + \beta = 0$, $\alpha, \beta \in C$, έχει ρίζες συζυγείς να δειχθεί ότι $\alpha, \beta \in R$.
Β.Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών που ικανοποιούν την εξίσωση $3(\bar{z} + z) + i(\bar{z} - z) + 4(\bar{z}z - 1) + 5(\bar{z}z + 1) = 0$.

18. α) Αν το πολυώνυμο $P(\zeta) = \alpha\zeta^3 + \beta\zeta^2 + \gamma\zeta + \delta$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$, έχει ρίζα τον μιγαδικό z, να δειχθεί έχει ρίζα και τον συζυγή του.
β) Δεδομένου ότι κάθε πολυώνυμο ν βαθμού (με συντελεστές μιγαδικούς) έχει ν μιγαδικές ρίζες, είναι δυνατόν το πολυώνυμο $P(\zeta)$ να μην έχει πραγματική ρίζα;
γ) Αν η εξίσωση $x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$, $\beta, \gamma, \delta \in R$, έχει λύση x = 3-5i, τότε αποκλείεται να έχει λύση την Α. 6, Β. 3+5i, Γ. 0, Δ. 2+3i, Ε.-8.

19. Έστω α, β, γ καθαρά μιγαδικοί αριθμοί και οι αριθμοί
$\omega = \bar{\alpha}(\beta + \gamma) + \bar{\beta}(\gamma + \alpha) + \bar{\gamma}(\alpha + \beta)$, $z = \bar{\alpha}(\beta - \gamma) + \bar{\beta}(\gamma - \alpha) + \bar{\gamma}(\alpha - \beta)$. Να δειχθεί ότι ο αριθμός ω είναι πραγματικός, ενώ ο z φανταστικός.

20. Έστω $z \in C$ με $z\bar{z} = 1$, $z \neq 1, -1$. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\alpha = \left(\frac{1+z}{z-1}\right)^{2009}$ είναι φανταστικός, ενώ ο αριθμός $\beta = \left(\frac{1+z}{z-1}\right)^{2008}$ πραγματικός.

Γ. Μέτρο Μιγαδικού

21. Να υπολογίσετε τα μέτρα των μιγαδικών $\omega = \frac{1-i}{5+i} + i$, $\zeta = \left(\frac{6-8i}{10}\right)^{\nu}$, $q = \left(\frac{z}{|z|}\right)^{\nu}$, $z \in C^*$, $\nu \in N^*$.

22. α) Αν $z^2 = |z|^2$, τότε Α. $z \in R$, Β. $z \in I$, Γ. $z \in C$, Δ. z = 0, Ε. z > 0.

β) Αν $z^2 + |z|^2 = 0$, τότε Α. $z \in R$, Β. $z \in I$, Γ. z = 0, Δ. z < 0, Ε. $z \in C$.

γ) Οι εικόνες των μιγαδικών z με $|i - 3\bar{z}| = 12$ ανήκουν σε κύκλο κέντρου
Α. K(i), Β. K(-i), Γ. K(i/3), Δ. K(-i/3), Ε. K(4)
δ) Οι εικόνες των μιγαδικών ζ με $|\zeta + 1| = 1 + |\bar{z} - 1|$, ανήκουν σε
Α. ευθεία, Β. κύκλο, Γ. έλλειψη, Δ. υπερβολή. Ε. Παραβολή
ε) Ο γ. τόπος των μιγαδικών w με $|w + i| + |i + \bar{w}| = 6$ είναι
Α. ευθεία, Β. κύκλος, Γ. έλλειψη, Δ. υπερβολή. Ε. Παραβολή

Στ΄) Αν $|\omega - z| = |\bar{z}| + |\omega|$ τότε οι δ. α. των μιγαδικών z, ω είναι
Α.ομόρροπες Β. αντίρροπες Γ.κάθετες Δ.τεμνόμενες

ζ) Ο γ.τ. των μιγαδικών ω με $|\omega i + 1| = |\omega + 1|$ είναι

Α. η ευθεία y = x Β. η ευθεία y = -x Γ.ο κύκλος K(-1+i) Δ. Άλλο

23. Α. Αν ο μιγαδικός z ανήκει στον κύκλο κέντρου 1-i και ακτίνας 2, να δειχθεί ότι
$8 \le |z + 5 - 7i| \le 12$

Β.Αν α, β, γ μιγαδικοί αριθμοί τότε ισχύουν

i) $\left|\bar{\alpha} - \bar{\beta}\right| \le |\alpha| + |\beta|$, ii) $|\alpha - \beta| \le |\alpha - \gamma| + |\gamma - \beta|$

24. α) Να λυθεί η εξίσωση $\chi^3 - 4\chi^2 + \chi + 26 = 0$.
β) Να δειχθεί ότι οι λύσεις της εξίσωσης αυτής είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου.

25. Α. Αν ισχύει $(2i - 4\omega)^{1866} = \dfrac{1 + i\sqrt{15}}{4}$ να δείξετε ότι ο ω ανήκει σε κύκλο κέντρου Κ(i/2) και ακτίνας 1/4.

Β. Αν z + 2i = 4ω, όπου ο μιγαδικός ω ανήκει στον προηγούμενο κύκλο και δεν είναι φανταστικός, να δείξετε ότι ο αριθμός $u = \left(\dfrac{i + z}{i - z}\right)^{1913}$ είναι φανταστικός.

Γ. Ποια ιστορικά γεγονότα έγιναν τα έτη 1866, 1913;

26. Να βρεθεί ο γ. τ. των μιγαδικών ζ με την ιδιότητα, το τρίγωνο με κορυφές τους μιγαδικούς ζ , $\bar{\zeta}$ και την αρχή των αξόνων να είναι ισόπλευρο.
(Απ. δυο ευθείες εκτός αρχής)

27. Έστω z, ω∈C*. Να αποδειχθεί ότι

α) ότι $\bar{z}\omega > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\omega}{z} > 0 \Leftrightarrow \bar{\omega} z > 0$, β) $|z - \omega| = |z| + |\omega| \Leftrightarrow \dfrac{z}{\omega} < 0$,

γ) $|z - \omega| = ||z| - |\omega|| \Leftrightarrow \dfrac{z}{\omega} > 0$, δ) $\mathrm{Re}(\bar{z}\omega) = |z||\omega| \Leftrightarrow$ οι δ.α των z, ω ομόρροπες.

ε) Αν $|z - \omega| = |z| + |\omega|$ ή $|z - \omega| = ||z| - |\omega||$ τότε οι εικόνες των z, ω και η αρχή των αξόνων είναι σημεία συνευθειακά (και αντίστροφα).

28. Α.Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού ζ αν ισχύει $|2\zeta - 1| = |\zeta - 2|$. (Απ. 1)

Β. Αν Re(z)·Re(w) > 0, τότε η εικόνα του μιγαδικού $\dfrac{z - w}{z + \bar{w}}$ ανήκει στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου και αντίστροφα.

29. Α. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί ζ, ω με την ιδιότητα $|2\zeta^2 - \omega| + |\omega + 2i| = 0$

Β. Έστω α, β μιγαδικοί β ≠0. Να εξεταστεί αν οι μιγαδικοί α + β, α - β, $\alpha + i\sqrt{3}\beta$ αποτελούν κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

30. Αν ο λόγος των αποστάσεων του μιγαδικού z από τις εικόνες των μιγαδικών ζ_1=-16 και ζ_2 = -1 είναι 4, να δείξετε ότι ο z ανήκει σε κύκλο κέντρου Ο.

31. Έστω |ζ| = 3 και ω = 4 + 3i. α)Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της παράστασης |ζ + ω|, β) Ποιο σημείο του κύκλου |ζ| = 3 απέχει λιγότερο και ποιο περισσότερο από την εικόνα του ω; (Απ.8, 2, (12/5, 9/5), (-12/5, -9/5))

32. Οι ρίζες των εξισώσεων $|2 - \omega| = |\omega i + 2i|$, $(2005 + 3z)^{2008} + i(2005 - 3z)^{2008} = 0$ έχουν εικόνες στον φανταστικό άξονα.

33. Να βρεθεί ο μιγαδικός ζ ώστε το τρίγωνο με κορυφές τους μιγαδικούς 1, -i και ζ να είναι ισόπλευρο. (Απ. $(1 \pm \sqrt{3})(1-i)/2$)

34. α) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος (γ. τ.) των μιγαδικών z που ικανοποιούν την εξίσωση $(1 + i)\bar{z} + (1 - i)z = 1$.
β) αν η εικόνα ενός μιγαδικού z κινείται πάνω στην ευθεία $2x + 2y = 1$, να δειχθεί ότι ο $\omega = 1/z$ κινείται σε κύκλο, γ) αν $\zeta\omega = 1-i$ να δειχθεί ότι ο ζ ανήκει σε ευθεία.

Δ. Επανάληψης

35. Α. Να βρεθεί ο $x \in C$ ώστε ο αριθμός $z = |x(x + 2) + 4| + |x|i$ να είναι φανταστικός. Στην συνέχεια να βρεθεί ο z.
Β. Αν α. $\beta \in C$, $\beta \neq 0$, να δειχθεί ότι οι εικόνες των μιγαδικών

$\alpha + \beta$, $\alpha + i\sqrt{3}\beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha - i\sqrt{3}\beta$, σχηματίζουν ρόμβο.

36. Έστω οι μιγαδικοί $z = 2 - 3i$, $\omega = 3 + 2i$. Να δείξετε ότι

α) $\frac{z}{\omega} = -i$, β) $z^{1922} + \omega^{1922} = 0$, γ) Ποιο ιστορικό γεγονός έγινε το 1922;…

37. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha + \beta i$, όπου $\alpha, \beta \in R$ και $w = 3z - i\bar{z} + 4$.
α) Να αποδείξετε ότι $Re(w) = 3\alpha - \beta + 4$, $Im(w) = 3\beta - \alpha$.

β) Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 12$, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$.

γ) Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z, οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$, έχει το ελάχιστο μέτρο. (Παν/ες. 2003)

38. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$ με $\alpha \in C$, $0<|\alpha| < 1$, $0<|z| \leq 1$.

Να αποδειχθεί ότι, α) $\bar{\alpha}z \neq 1$
β) Ο z ανήκει στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου, αν και μόνο ο f(z) ανήκει στο εσωτερικό του ίδιου κύκλου,

γ) $|z| = 1$ αν και μόνο $|f(z)| = 1$, δ) $f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{1}{\overline{f(z)}}$, $z \neq \alpha$.

39. Α. Έστω $\zeta \in C$. Να βρεθεί η ικανή και αναγκαία συνθήκη (όσο αφορά τον ζ) ώστε
α) οι αριθμοί $1+ \zeta i$, $1 - \zeta i$ να είναι ρίζες μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης με πραγματικούς συντελεστές.
β) οι αριθμοί $2i + \zeta i$, $-2i + \zeta i$ να είναι ρίζες μιας εξίσωσης $2^{ου}$ βαθμού με πραγματικούς συντελεστές. (Απ. $\zeta \in R$, $\zeta \in I$)
Β. Από τους μιγαδικούς ζ με την ιδιότητα $|\zeta - 3 - i| = 1$ να βρεθεί αυτός που απέχει λιγότερο καθώς και αυτός που απέχει περισσότερο από την αρχή των αξόνων.

40. Α. Αν το άθροισμα δυο καθαρά μιγαδικών αριθμών είναι πραγματικός και η διαφορά τους φανταστικός να αποδειχθεί ότι είναι συζυγείς.

Β. Έστω z, α, β, γ μιγαδικοί αριθμοί. Να αποδειχθεί ότι

α) $|\bar{z} + z| + |z - \bar{z}| \le 2\sqrt{2}\,|z|$, β) $|\alpha||\beta - \gamma| \le |\beta||\gamma - \alpha| + |\gamma||\alpha - \beta|$.

41. Έστω ότι οι μιγαδικοί αριθμοί α, β, γ ανήκουν στον μοναδιαίο κύκλο. Να δείξετε ότι,

α) ο αριθμός $K = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ είναι πραγματικός, β) ισχύει $|\alpha + \beta + \gamma| = |\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha|$.

42. Α.Να δείξετε ότι οι μιγαδικοί αριθμοί

$\zeta = \text{συν}\theta - \text{ημ}\theta + i(\text{συν}\theta + \text{ημ}\theta)$, $\omega = -(\text{συν}\theta + \text{ημ}\theta) + i(\text{συν}\theta - \text{ημ}\theta)$

είναι διαφορετικοί για κάθε $\theta \in R$ και ότι οι εικόνες τους και η αρχή του μιγαδικού επιπέδου είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου.

Β.Να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό του οποίου η εικόνα είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου αυτού.

43. Έστω ω μιγαδικός αριθμός με την ιδιότητα $\omega^7\bar{\omega}^3 = 1$.

α) Να δειχθεί ότι $|\omega| = 1$,

β) Να δειχθεί ότι η εξίσωση $\omega^7\bar{\omega}^3 = 1$ είναι ισοδύναμη με την $\omega^4 = 1$,

γ) Να λυθεί η εξίσωση $z^7\bar{z}^3 = 1$.

44*.α) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών z με την ιδιότητα οι δ. α. των μιγαδικών z + i, z - i να είναι αντίρροπες. β) Να λυθεί η εξίσωση $|z + i| + |z - i| = 2$.

45. Α. Να βρεθεί ο γ. τ. των μιγαδικών αριθμών ζ με την ιδιότητα $|2 + \bar{\zeta} + 5i| = 2$.

Β. Από όλους τους μιγαδικούς που ανήκουν στον προηγούμενο γεωμετρικό τόπο να βρεθεί αυτός : α) του οποίου η δ. α. σχηματίζει τη μικρότερη γωνία με τον χ–άξονα, β) που απέχει λιγότερο από τον χ-άξονα, γ*) του οποίου η δ. α σχηματίζει τη μεγαλύτερη γωνία με τον χ-άξονα.

46. α) Να βρεθεί ο γ. τ. των μιγαδικών z με την ιδιότητα $|z + i| < |z - i|$.

β) Αν οι μιγαδικοί α, β, γ ανήκουν στον προηγούμενο γ. τ. να αποδειχθεί ότι και το άθροισμά τους ανήκει στον ίδιο γ. τ.

47*. Α. Αν α, β, $z \in \mathbf{C}$ με $|\alpha| \ne |\beta|$ τότε ισχύει, $\alpha\bar{z} + \beta z = 0$ αν και μόνο αν $z = 0$.

Β. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(z) = |z| + \frac{9}{|z|}$, $z \in C^*$, έχει ελάχιστη τιμή το 6, όταν ο z ανήκει σε ένα κύκλο τον οποίο και να ορίσετε.

48*. Α. Να βρεθεί ο γ. τ. των μιγαδικών ζ με την ιδιότητα οι μιγαδικοί ζ, , $\bar{\zeta}$, - ζ , - $\bar{\zeta}$ να είναι κορυφές (κυρτού) τετραπλεύρου.

Β. Αν $\zeta \in C$ τότε να δείξετε ότι $|\zeta| = |\zeta + 1| = 1$ αν και μόνο αν $\zeta^2 + \zeta + 1 = 0$.

49. Έστω $\rho > 0$ και $\lambda \in (0, 1)$ σταθεροί. Αν η εικόνα του μιγαδικού z διαγράφει τον κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας ρ, να δείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού ω με

$2\omega = z(1 + \lambda) + \bar{z}(1 - \lambda)$ διαγράφει έλλειψη με ημιάξονες ρ, λρ.

50. Α) Αν $|z|=|z+\frac{1}{z}|$ να δείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού $\omega = z^2$ ανήκει σε ευθεία παράλληλη στον άξονα των φανταστικών αριθμών.
Β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο ν ώστε $(1 - i)^\nu = 8$. (Απ. ν = 6 ;;)

51*. Α. Να βρεθούν οι καθαρά μιγαδικές ρίζες της εξίσωσης $z^6 = 1$.
Β. Έστω α, β, γ μιγαδικοί, $\alpha \neq \beta$. Αν $\alpha - \beta = i(\alpha - \gamma)$ να αποδειχθεί ότι οι εικόνες των α, β, γ είναι κορυφές ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου.

52. Έστω z, ω μιγαδικοί αριθμοί.
α) Να γραφεί η παράσταση $A = 1 + |z|^2|\omega|^2 + z\overline{\omega} + \overline{z}\omega$ ως τετράγωνο ενός μη αρνητικού αριθμού.
β) Να δειχθεί ότι $|z - \omega|^2 \leq (1 + |z|^2)(1 + |\omega|^2)$,
γ) Να αποδειχθεί ότι συνάρτηση $\varphi(\chi) = \chi^2 + 2|z - \omega|\chi + (1 + |z|^2)(1 + |\omega|^2)$, είναι μη αρνητική για κάθε $\chi \in R$.

53*. α) Αν $\omega\overline{z} \in R$ τότε οι εικόνες των z, ω και η αρχή των αξόνων είναι σημεία συνευθειακά και αντίστροφα.
β) Αν $|\omega| = 1$ να δειχθεί ότι οι δ. α. των μιγαδικών ω^2, $\omega+\omega^3$ ανήκουν σε ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων.
γ) Έστω z, $\omega \in C$ με $|z| = |\omega|$, $z \neq i\omega$. Να αποδειχθεί ότι οι εικόνες των μιγαδικών $\alpha = (z + i\omega)^{2004}$, $\beta = (z - i\omega)^{2004}$ και η αρχή των αξόνων είναι σημεία συνευθειακά. Στην συνέχεια να δειχθεί ότι υπάρχει $\theta > 0$ ώστε $\alpha = \theta\beta$.

54*. Α. Να λύσετε την εξίσωση $z^2\text{συν}^2\theta - z\text{ημ}2\theta + 2 = \text{συν}^2\theta$, $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$.
Β. Να δείξετε ότι η εικόνα της ρίζας της εξίσωσης αυτής με θετικό φανταστικό μέρος, καθώς το θ μεταβάλλεται, ανήκει σε υπερβολή.

55*. α) Αν $\alpha \in R$ και $\omega = \frac{1}{z-\alpha}$ να δείξετε ότι $\omega - \overline{\omega} = (\overline{z} - z)|\omega|^2$.
β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-4} = 5$ έχει όλες τις ρίζες της πραγματικές .

56. α) Αν α, β, γ μιγαδικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι $|\alpha - \beta| + |\alpha - \gamma| \geq |\beta - \gamma|$.
β) Να δειχθεί ότι η ισότητα ισχύει όταν και μόνο οι εικόνες των οι α, β, γ είναι σημεία συνευθειακά και ο α βρίσκεται είναι μεταξύ των β, γ.
γ) Να δειχθεί ότι οι λύσεις της εξίσωσης $|\chi| + |\chi - 1| + |\chi - 2| + |\chi - 3| = 4$, $\chi \in C$ είναι όλοι οι (πραγματικοί) αριθμοί του διαστήματος [1, 2] και μόνο αυτοί.

57. α) Να λυθεί η εξίσωση $(z^2 + 1)^2 + z^3 + z = 0$.
β) Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των εξισώσεων $(z^2 + 1)^2 + z^3 + z = 0$, $z^{16} + 2z^{14} + 1 = 0$.

58*. Αν η δ. α. του μιγαδικού ζ σχηματίζει γωνία π/4 με τον ημιάξονα Ox, να δειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού $\omega = \zeta - \frac{2}{\zeta}$ ανήκει σε τμήμα υπερβολής.

59*. Α.Να βρεθεί ο γ. τ. των μιγαδικών ζ με την ιδιότητα $|\zeta - 4| + |\zeta - 3i| = 5$. (Απ.ευθ. τμ.)
Β. Έστω α, $\beta \in C^*$ με $\alpha \neq \beta$ και $\alpha^2 + \beta^2 = \alpha\beta$. Τότε ισχύουν i) $|\alpha| = |\beta|$, ii) οι εικόνες των α, β και η αρχή των αξόνων είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

60*. α) Να βρεθεί ο $\alpha\in R$ ώστε η εξίσωση $\alpha x^4 - 10x^3 + 5x^2 = x + 5$ να 'χει ρίζα ένα καθαρά μιγαδικό ζ με $\zeta^3 = -1$. (Απ. 4)

β) για την προηγούμενη τιμή του α να δειχθεί ότι η εξίσωση αυτή έχει ως ρίζες της ρίζες της εξίσωσης $x^2 - x + 1 = 0$ και στην συνέχεια να λυθεί.

61.α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού $A\subset R$ της συνάρτησης φ με τύπο $\varphi(t) = \sqrt{1-(2-t)^2}$.

β) Αν $z = 3 - t + i\varphi(t)$, $t\in A$, να δειχθεί ότι οι δ. α. των μιγαδικών $\alpha = z^2$ και $\beta = z - 1$, $z \neq 0$, είναι ομόρροπες.

62*. Έστω Σ η εικόνα ενός πραγματικού αριθμού θ και Α, Β οι εικόνες των μιγαδικών z , ω αντίστοιχα στο Μ.Ε., ώστε το τρίγωνο ΑΣΒ να είναι ορθογώνιο στο Σ και ισοσκελές. Αν $Re(\omega) > \theta > Re(z)$ και τα φανταστικά μέρη των z, ω είναι θετικοί αριθμοί, να δειχθεί ότι α) ο αριθμός $(z - \theta)(\overline{\omega - \theta})$ είναι φανταστικός, β) $\omega = \theta - i(z - \theta)$.

63. Α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει

$z_1 + z_2 = 4 + 4i$, $2z_1 - \overline{z_2} = 5 + 5i$, να βρείτε τους z_1, z_2 .

Β.Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z, ω ισχύουν $|z - 1 - 3i| \le \sqrt{2}$, $|\omega - 3 - i| \le \sqrt{2}$:
i. να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z, ω έτσι ώστε $z = \omega$ και
ii. να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z - \omega|$. (Επαναληπτικές. 2005)

64**. Έστω ο μιγαδικός $z = \alpha + \beta i$, $(\alpha, \beta\in R)$, $\beta \neq 0$ και $\omega = \dfrac{2-\overline{z}}{2+\overline{z}}$ με $(\omega - z)\in R$.

Να αποδειχθεί ότι α) $|z + 2| = 2$, β) $\omega - z = 1$.

65*. Έστω $\alpha, \beta, \gamma\in C^*$ με $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$ και $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Να αποδειχθεί ότι
Α. $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 = 0$.
Β.i) $\alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\alpha} = -1$, ii) οι α, β, γ αποτελούν κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς $\sqrt{3}$.

66*.Α)Αν οι μιγαδικοί αριθμοί α, β, γ ανήκουν στο εσωτερικό του κύκλου κέντρου Κ(0) και ακτίνας 1, τότε ισχύει $|\alpha\beta| + |\beta\gamma| + |\gamma\alpha| \ge |\alpha\beta\gamma|$.
Β) Για οποιουσδήποτε μιγαδικούς α, β, γ ισχύει $|(1- \alpha)(1- \beta)(1- \gamma)| \ge 1 - |\alpha| - |\beta| - |\gamma|$.
(Υπ. Σε μια προφανή περίπτωση ισχύει η (Β))

67**. Να αποδειχθεί ότι: α) Αν $\zeta\in C$ τότε $Re(\zeta) \le |\zeta|$, β) Αν z, ω μιγαδικοί αριθμοί,

$\theta\in (0, \pi/2)$ τότε ισχύει $\dfrac{|z|^2}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} + \dfrac{|\omega|^2}{\eta\mu^2\theta} \ge |z|^2 + |\omega|^2 + 2\,Re(\overline{z}\omega)$. (Θαλής 2006)

* * *

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ,
ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ
ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗ Δ/ΝΣΗ Π/ΘΜΙΑΣ &
Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ ΚΡΗΤΗΣ
ΓΡΑΦΕΙΟ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΣΥΜΒΟΥΛΩΝ
Δ. Ε. Ν. ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ

Κοιν.: Προϊστάμενο Επιστημονικής &
Παιδαγωγικής Καθοδήγησης
Δ/θμιας Εκπ/σης Κρήτης.

ΘΕΜΑ: «ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ Μ. Κ. :
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΟΡΙΑ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ »

Συνάδελφοι,

Το διδακτικό αυτό υλικό είναι συνέχεια του προηγουμένου-βελτιωμένου- των Μιγαδικών και αποτελεί συνένωση των παλαιών αρχείων «Συναρτήσεις» και «Όρια-Συνέχεια» του 2007.Από την μακρόχρονη εμπειρία μου είχα διαπιστώσει ότι το σχολικό βιβλίο δεν επαρκεί για να βοηθήσει πραγματικά τον καθηγητή που διδάσκει στην Γ΄ Λυκείου και απαιτείται ένα συμπλήρωμα. Αυτό ακριβώς το συμπλήρωμα προσπαθώ με τις σημειώσεις αυτές να υλοποιήσω, έχοντα κατά νου και την σύσταση του G. Polya, ο οποίος στο περίφημο βιβλίο του «Πώς να το λύσω» (1998, σελ.161) γράφει:

«Ο πρώτος κανόνας διδασκαλίας είναι να γνωρίζετε αυτό που πρόκειται να διδάξετε. Ο δεύτερος κανόνας διδασκαλίας είναι να γνωρίζετε λίγο περισσότερα από αυτά που πρόκειται να διδάξετε»

Οι αναγκαίες αυτές συνθήκες δεν είναι όμως και ικανές για ένα αποτελεσματικό Καθηγητή. Γι' αυτό είναι ανάγκη να στρέφομε το ενδιαφέρον μας και προς την Διδακτική των Μαθηματικών (και όχι μόνο).. Στον τομέα αυτόν προσπαθώ να συμβάλλω με άλλα κείμενά μου, το περιεχόμενο των οποίων δεν πρέπει να αγνοείται, ακόμη και στην Γ΄ Λυκείου, εν ονόματι μιας (κακώς ή καλώς εννοούμενης) «φροντιστηριακής προετοιμασίας» των μαθητών ή μιας «αυστηρής» Μαθηματικής εκπαίδευσης.

Υπενθυμίζω ότι οι σημειώσεις αυτές απευθύνονται *μόνο* στους διδάσκοντες το μάθημα. Ένα αντίγραφο του αρχείου αυτού να μείνει στο σχετικό φάκελο (υλικό και ηλεκτρονικό) του σχολείου.

Παρατηρήσεις, Επισημάνσεις, Συμπληρώσεις και Ασκήσεις στο 1ο κεφάλαιο της Ανάλυσης (ενότητες 1.1 - 1.8)

Α. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (ενότητες 1.1-1.3)

1. Επανάληψη της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου.

Στην αρχή του κεφαλαίου, είναι απαραίτητη η γενική επανάληψη της κλασικής Άλγεβρας κυρίως της Α΄ Λυκείου με έμφαση στις ταυτότητες, ανισοταυτότητες, απόλυτες τιμές, τριώνυμο και την βασική Μαθηματική λογική, περισσότερο αναλυτική από ότι την έχει το σχ. βιβλίο. Η επανάληψη αυτή μπορεί να συνδυαστεί και με την εύρεση του πεδίου ορισμού συναρτήσεων. Ας έχουμε υπόψη ότι η αλγεβρική υστέρηση των μαθητών δυσκολεύει τη παραπέρα εκμάθηση της Ανάλυσης.

2. Συμβολισμός μεταβλητών και συναρτήσεων.

α) Χρήσιμο είναι να χρησιμοποιούμε και άλλους συμβολισμούς για τον τύπο μιας συνάρτησης, εκτός από τον συνηθισμένο $y = f(x)$: η ανεξάρτητη μεταβλητή καλό είναι να μην είναι πάντα x και η εξαρτημένη y, *ιδίως στις παραγώγους* π.χ. $x(t)$, $\varphi(\lambda)$, $g(y)$, $Q(P)$ κλπ.
Αυτό αποτρέπει την μονοτονία και την μηχανική μάθηση, βοηθά στην κατανόηση των διαφόρων εννοιών που αναφέρονται στις συναρτήσεις και συνδέει τις συναρτήσεις με πραγματικά αλληλοεξαρτώμενα μεγέθη από άλλες επιστήμες.
β) Στην αντίστροφη της $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$, η ανεξάρτητη μεταβλητή δεν υπάρχει πάντα λόγος να γίνεται x (και η εξαρτημένη y) καλύτερα να μένει όπως προκύπτει. Αν πρόκειται π.χ. για φυσικά μεγέθη δεν επιτρέπεται, αλλά και δεν έχει νόημα, η αλλαγή μεταβλητής. Όταν όμως εξετάζουμε και τις δυο συναρτήσεις στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων (από Μαθηματικής - τυπικής πλευράς, δηλ. χωρίς να μας ενδιαφέρουν τα μεγέθη που παριστάνουν οι μεταβλητές τους), τότε επιβάλλεται η ανεξάρτητη μεταβλητή να παρίσταται με το ίδιο γράμμα.

3. Στην ισότητα των συναρτήσεων: ο ορισμός της ισότητας είναι ένας τυπικός αριθμητικός ορισμός, δηλαδή δεν εξετάζει το μέγεθος (και τη μονάδα) που παριστάνει η μεταβλητή της συνάρτησης. Να αναφέρουμε και ότι, δυο συναρτήσεις f, g δεν είναι ίσες (σύμφωνα με τον ορισμό του σχ. βιβλίου) αν έχουν διαφορετικά πεδία ορισμού ή όταν έχουν ίδιο πεδίο ορισμού Α και υπάρχει (ένα τουλάχιστον) $\xi \in A$ με $f(\xi) \neq g(\xi)$.

4. Στη σύνθεση των συναρτήσεων

Το πεδίο ορισμού της σύνθεσης, όπως διατυπώνεται στο βιβλίο δεν χρειάζεται να απομνημονευτεί και να χρησιμοποιείται μηχανικά. Μπορεί εύκολα να βρίσκεται κάθε φορά ως εξής: αν έχουμε την σύνθεση, π.χ. των συναρτήσεων $\lambda(x)$ και $\varphi(x)$, φολ, με πεδία ορισμού D_λ, D_φ, αντίστοιχα, *τότε γράφουμε καταρχήν*

$$(\varphi\circ\lambda)(x) = \varphi(\lambda(x))$$

και *παρατηρώντας προσεκτικά το δεύτερο μέλος της ισότητας* αυτής διαπιστώνουμε ότι: το πεδίο ορισμού της σύνθεσης πρέπει να είναι, το σύνολο των αριθμών x για τους οποίους καταρχήν μπορεί να λειτουργήσει η λ (εσωτερική), (δηλ. που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της λ) για τους οποίους ο αριθμός λ(x) ανήκει στο πεδίο ορισμού της φ (για να μπορεί να λειτουργήσει η φ!), ή

$$D_{\varphi o \lambda} = \{x \in D_\lambda \text{ με } \lambda(x) \in D_\varphi\}$$

Αν διαπιστώσουμε ότι δεν είναι κενό, προχωρούμε να βρούμε τον τύπο της φολ : (φολ)(x) = φ(λ(x))=… , ενώ αν είναι κενό δεν ορίζεται η σύνθεση φολ.
Αυτός είναι ο λόγος που πρέπει να *προηγείται* της εύρεσης του τύπου της σύνθεσης η εύρεση του πεδίου ορισμού της. Τέλος καλό είναι να επαληθεύουμε αν το πεδίο ορισμού της τελικής συνάρτησης (φολ)(x) που βρήκαμε συμπίπτει με το $D_{\varphi o \lambda}$.

5. Βασικές μέθοδοι για την (αλγεβρική) εύρεση της μονοτονίας μιας συνάρτησης.

α) Κατασκευαστική μέθοδος (ευθεία απόδειξη). Χρήσιμες είναι εδώ οι ιδιότητες των ανισοτήτων καθώς και η μονοτονία των συναρτήσεων e^x, lnx .
β) Μέθοδος της διαφοράς (όμοια με την παλιά μέθοδο του λόγου μεταβολής).

6. Α. Το «όταν» στο ορισμό της γν. αύξουσας , αλλά και στους άλλους ορισμούς, έχει την έννοια του «αν και μόνο αν».
Β. Μετά τον ορισμό της γν. αύξουσας (γν. φθίνουσας) συνάρτησης απαραίτητο και χρήσιμο είναι να αποδειχθεί (στην τάξη, με άτοπο απαγωγή) ότι

- Αν φ γνησίως αύξουσα τότε, $\varphi(\alpha) < \varphi(\beta) \Rightarrow \alpha < \beta$
- Αν φ γνησίως φθίνουσα τότε, $\varphi(\alpha) < \varphi(\alpha) \Rightarrow \alpha > \beta$
- Αν φ γνησίως μονότονη τότε $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta$ (1-1).

Από τον ορισμό της μονοτονίας (στο τελευταίο, της συνάρτησης) ισχύουν και τα αντίστροφα. Έτσι οι προκύπτουσες ισοδυναμίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν *στη λύση ανισώσεων και εξισώσεων.* (Αυτή τη συμπλήρωση, όπως και πολλές άλλες, οι μαθητές πρέπει, με δική μας προτροπή, να τις γράφουν πάνω στο βιβλίο τους). Επίσης όταν την εφαρμόζουν οι μαθητές, να λένε τουλάχιστον ότι προκύπτει από τον ορισμό της μονοτονίας και διά της εις άτοπον απαγωγής.

7. Η μονοτονία μιας συνάρτησης αναφέρεται πάντοτε *σε συγκεκριμένα διαστήματα* του πεδίου ορισμού της και δεν κληρονομείται (πάντα) στην ένωσή τους**.**
Έτσι, αν φ γνησίως φθίνουσα (γνησίως αύξουσα) στα διαστήματα (α, β], (β, γ), τότε δεν είναι γν. φθίνουσα (γν. αύξουσα) στην ένωση τους (α, β] ∪ (β, γ), π.χ. η συνάρτηση φ με $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ με x > 0 και φ(x) = -x για x ≤ 0

❖ Ισχύει όμως ότι :

Αν φ γνησίως φθίνουσα (γν. αύξουσα) στα διαστήματα (α, β], (β, γ) και συνεχής στο β, τότε η φ είναι γν. φθίνουσα (γν. αύξουσα) στην ένωση τους (α, β] ∪(β, γ) = (α, γ) (απόδειξη στη σελ. 11, IV.1) .

8. Η (αλγεβρική) εύρεση των (ολικών) ακροτάτων μιας συνάρτησης μπορεί να γίνει:

α) Με τις γνωστές βασικές (Αλγεβρικές) ανισοταυτότητες:

- $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$ ή $(\alpha + \beta)^2 \geq 4\alpha\beta$ (ισότητα για $\alpha = \beta$)
- Αν $\theta > 0$ τότε $\theta + \frac{1}{\theta} \geq 2$ (ισότητα για $\theta = 1$).

π.χ. για την συνάρτηση $f(x) = \frac{12x}{9+x^2}$, έχουμε $9 + x^2 \geq 6|x|$ ή $|f(x)| \leq 2$ με ισότητα για $x = 3, -3$ κλπ
.

β) με την βοήθεια της μονοτονίας σε κλειστό διάστημα.

π.χ. η $f(t) = \sqrt{2-\sqrt{t-1}}$ με $A = [1, 5]$, αποδεικνύεται γν. φθίνουσα, οπότε για κάθε $1 \leq t \leq 5$ ισχύει $f(5) \leq f(t) \leq f(1)$, άρα η f έχει μέγιστο, ελάχιστο κλπ.
Ενώ στο διάστημα (1, 5) ισχύει $f(5) < f(t) < f(1)$ και δεν έχει ακρότατα.

- Γενικά: μια γνησίως μονότονη συνάρτηση σε *ανοικτό* διάστημα, δεν έχει ακρότατα. (Απόδειξη διά της εις άτοπον απαγωγής)

γ) Με την βοήθεια του συνόλου τιμών,
π.χ. αν $\varphi(A) = [2, +\infty)$, η φ έχει ελάχιστο το 2 (για την τιμή του $x \in A$ με $\varphi(x) = 2$) αλλά όχι μέγιστο.

9. Να διασαφηνιστούν περισσότερο και να τονιστεί η σημασία των σημαντικών σχολίων-προτάσεων της σελίδας 152 οι οποίες είναι ισοδύναμες του ορισμού μιας 1-1 συνάρτησης. Επίσης στο σχόλιο της σελίδας 153 το «προφανώς» να αποδειχθεί (στη τάξη, με άτοπο απαγωγή) και να τονιστεί το αντίστροφο με το αντιπαράδειγμα.

10. Πολλές φορές για την απόδειξη του 1-1 μιας συνάρτησης είναι ευκολότερο να δείξουμε πρώτα ότι είναι γνησίως μονότονη, π.χ. $\lambda(x) = e^x + 5x$.

11. Σύνολο τιμών Συνάρτησης
Το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης παίζει σπουδαίο ρόλο σε πολλά θέματα της Ανάλυσης. Είναι χρήσιμο :

- ✓ Για την εύρεση των (ολικών) ακροτάτων.
- ✓ Ως πεδίο ορισμού της αντίστροφης
- ✓ Για την ύπαρξη ρίζας εξίσωσης.

Τρόποι εύρεσης συνόλου τιμών: Αλγεβρικός - Αναλυτικός.

Η (αλγεβρική) εύρεση του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης μπορεί να μας δώσει συγχρόνως και την πληροφορία αν η συνάρτηση είναι 1-1 και στην περίπτωση αυτή έχουμε άμεσα και την αντίστροφή της.

Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση $\varphi(x) = 2+\sqrt{x-1}$. Πεδίο ορισμού $A = [1, +\infty)$.

Αναζητούμε τα $y \in R$ για τα οποία υπάρχει $x \in A$ με $y = \varphi(x)$, δηλαδή λύνουμε την εξίσωση $y = \varphi(x)$ ως προς x (με παράμετρο y).

$$\begin{aligned} y = \varphi(x) &\Leftrightarrow y = 2+\sqrt{x-1} \\ &\Leftrightarrow y - 2 = \sqrt{x-1} \\ &\Leftrightarrow x - 1 = (y-2)^2 \text{ και } y \geq 2 \\ &\Leftrightarrow x = 1 + (y-2)^2,\ y \geq 2. \end{aligned}$$

Άρα για κάθε $y \geq 2$ υπάρχει $x = 1 + (y - 2)^2 \geq 1$ $(x \in A)$ με $y = \varphi(x)$.
Άρα $\varphi([1, +\infty)) = [2, +\infty)$ (αφού $[2, +\infty) \subseteq \varphi([1, +\infty))$ αλλά λόγω των ισοδυναμιών και $\varphi([1, +\infty)) \subseteq [2, +\infty)$).

Επί πλέον, επειδή για κάθε $y \geq 2$ υπάρχει μοναδικό $x = 1 + (y - 2)^2 \in A$ με $y = \varphi(x)$, η φ είναι 1-1, με αντίστροφη την $\varphi^{-1}(y) = 1 + (y - 2)^2$, $y \geq 2$.
Η τήρηση των παραπάνω ισοδυναμιών πρέπει να τηρείται αυστηρά. Μην ξεχνούμε ότι (αυστηρή) διαδικασία λύσης εξίσωσης αγνώστου έστω χ, σημαίνει τον *ισοδύναμο* μετασχηματισμό της σε εξίσωση ή εξισώσεις -λυμένης -μορφής (χ=..)…

Σημείωση: Δεν υπάρχει πάντα λόγος να εναλλάζουμε τις μεταβλητές x, y, όπως αναφέρεται στο σχ. βιβλίο. Είναι πιο φυσικό και λογικό να διατηρούνται με τα σύμβολά τους οι μεταβλητές, προπάντων αν εκφράζουν φυσικά μεγέθη (π.χ. $S = 2t + 3$, t χρόνος, S διάστημα (σε κατάλληλες μονάδες τα t, S, 2, 3). Όταν όμως θέλουμε να ασχοληθούμε με θέματα που αφορούν την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης και της αντίστροφής της *στο ίδιο σύστημα αξόνων*, συνήθως τοποθετούμε στον οριζόντιο άξονα την ανεξάρτητη μεταβλητή και στον κατακόρυφο την εξηρτημένη, και των δυο συναρτήσεων, οπότε για διευκόλυνση μπορούμε να παριστάνουμε με το ίδιο γράμμα τις ανεξάρτητες μεταβλητές και με ένα άλλο τις εξηρτημένες. Αυτό π.χ. κάνουμε όταν θέλουμε να βρούμε τα κοινά σημεία της γ. π. μιας συνάρτησης και της αντίστροφής της

Παρατήρηση

Η αλγεβρικός τρόπος εύρεσης του συνόλου τιμών μπορεί να μην εφαρμόζεται γενικώς (π.χ. όταν δεν μπορεί να λυθεί ως προς x η εξίσωση $y = f(x)$, π.χ. $f(x) = xe^x$) , αλλά πολλές φορές είναι απλούστερος, αφού δεν απαιτεί την συνέχεια, την μονοτονία και την εύρεση ορίων του αναλυτικού τρόπου.

12. Η αντίστροφη μιας γν. μονότονης συνάρτησης είναι της αυτής μονοτονίας.

Πράγματι, **έ**στω $\varphi(x)$, $x \in A$, π.χ. γν. φθίνουσα και $\kappa, \lambda \in \varphi(A)$, $\kappa < \lambda$.
Τότε υπάρχουν $\alpha, \beta \in A$ με $\kappa = \varphi(\alpha)$, $\lambda = \varphi(\beta)$.
Έτσι έχουμε $\kappa < \lambda \Rightarrow \varphi(\alpha) < \varphi(\beta) \Rightarrow \alpha > \beta \Rightarrow \varphi^{-1}(\kappa) > \varphi^{-1}(\lambda)$.

13. Σχέση φ , φ^{-1} και διχοτόμου y = x.

Εκτός από την γνωστή και αξιοσημείωτη συμμετρία των γ. π. των φ , φ^{-1}, έχουμε τα εξής:

α) Αν $\varphi(x) = x$ τότε $\varphi(x) = \varphi^{-1}(x)$ $(x \in A \cap \varphi(A) \neq \varnothing)$.
Δηλαδή, τα κοινά σημεία της γ. π. της φ(x) με την y = x είναι και κοινά σημεία των φ, φ^{-1}, y = x.

β) Αν φ γνησίως αύξουσα τότε, $\varphi(x) = \varphi^{-1}(x) \Leftrightarrow \varphi(x) = x$ $(x \in A \cap \varphi(A))$.
(Το ορθό αποδεικνύεται με άτοπο απαγωγή, ενώ το αντίστροφο προκύπτει εύκολα)
Άρα τα κοινά σημεία της (γν. αύξουσας) φ με την αντίστροφή της είναι πάνω στην διχοτόμο y = x. Αυτό είναι πολύ χρήσιμο ιδίως όταν δεν μπορεί να βρεθεί η αντίστροφη π.χ. $\varphi(x) = xe^{x-1}$, $x \geq 0$,

γ) Αν η φ είναι γνησίως φθίνουσα, δεν ισχύει η προηγούμενη ισοδυναμία.

Παράδειγμα 1

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$, έχει άπειρα κοινά σημεία (ταυτίζεται) με την αντίστροφή της $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ **.**

Παράδειγμα 2

Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-x}$, $x \leq 1$, είναι γνησίως φθίνουσα και έχει με την αντίστροφή της $f^{-1}(x) = 1 - x^2$, $x \geq 0$, κοινά σημεία (στο σύνολο [0, 1]) τα σημεία

$$(0,1),\ (1,0),\ \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

(προκύπτουν από την λύση της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$, $x \in [0, 1]$ ή του συστήματος $(y = f(x),\ x = f(y))$.

Σημείωση 1

Πριν λίγα χρόνια ένας συνάδελφος «απέδειξε» ότι σε κάθε περίπτωση τα κοινά σημεία των f, f^{-1} είναι πάνω στην διχοτόμο y = x. Όμως, θεωρεί ότι η αντίστροφης μιας συνάρτησης είναι άμεσα, σε κάθε σημείο, «δεμένη» με τη συνάρτηση από την οποία προήλθε, με αποτέλεσμα η γραφική παράσταση της αντίστροφης να δημιουργείται με ορισμένη φορά διαγραφής, θεώρηση που ξεφεύγει τελείως από την ανεξαρτησία της αντίστροφης, όπως την θεωρούμε παραδοσιακά. Όποιος ενδιαφέρεται σχετικά μπορεί να ανατρέξει σε διάφορα ελληνικά μαθηματικά site ή να με ρωτήσει

Σημείωση 2

Σε ορισμένα βιβλία και περιοδικά υπάρχουν θεωρητικές ασκήσεις όπου με δεδομένη μια συναρτησιακή σχέση για την f (π.χ. $f^3(x) + f(x) = 3x$) αποδεικνύεται κατ' αρχήν ότι η f είναι 1-1. Στην συνέχεια η αντίστροφη βρίσκεται θέτοντας y = f(x) και καταλήγοντας άμεσα σε μια σχέση της μορφής x = g(y), οπότε συνάγεται ότι $f^{-1}(y) = g(y)$. Για να είναι αυτό σωστό πρέπει να δειχθεί και το αντίστροφο: $x = g(y) \Rightarrow y = f(x)$ και να προσεχθεί στη πορεία και το σύνολο τιμών της f.

Δίνουμε ένα παράδειγμα:

Έστω συνάρτηση φ με πεδίο ορισμού το A=R τέτοια ώστε $\varphi^3(x) + \varphi(x) = x$ για κάθε $x \in R$.
α) Να δειχθεί ότι η φ είναι 1-1,
β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της φ και η αντίστροφή της.

Λύση
α) Απλό.
β) Για την εύρεση του συνόλου τιμών της φ, *αναζητούμε τα $y \in R$ για τα οποία υπάρχει $x \in R=A$ με $y = \varphi(x)$* , δηλαδή λύνουμε ως προς $x \in R$ την εξίσωση $y = \varphi(x)$. Από την δοθείσα σχέση με $y = \varphi(x)$ έχομε

$$y^3 + y = x \text{ και με } y \in R \text{ έχουμε } x \in R=A$$

Από αυτό δεν μπορούμε να πούμε ότι λύσαμε την εξίσωση $y = \varphi(x)$ ως προς x (και άρα $\varphi^{-1}(y)= y^3 + y$, $y \in R$)

(Λύση εξίσωσης ως προς x, σημαίνει, ουσιαστικά, τον ισοδύναμο μετασχηματισμό της στη μορφή x = ή x =..). Για να το πούμε αυτό πρέπει να αποδείξουμε και το αντίστροφο:

Αν $x, y \in R$ και $x = y^3 + y$ τότε $y = \varphi(x)$

Έστω $x, y \in R$ με $y^3 + y = x$, οπότε λόγω της υπόθεσης έχουμε $y^3 + y = \varphi^3(x) + \varphi(x)$.

Για να προκύψει η $y = \varphi(x)$, αρκεί η συνάρτηση $g(t) = t^3 + t$ να είναι 1-1 στο R
Πράγματι, αυτό αποδεικνύεται κατά τα γνωστά, οπότε $y = \varphi(x)$,

Άρα $y = \varphi(x) \Leftrightarrow x = y^3 + y$ με $x, y \in R$

Επομένως για κάθε $y \in R$ υπάρχει (μοναδικό) $x = y^3 + y \in R$ με $y = \varphi(x)$.Άρα η φ έχει σύνολο τιμών το R, (είναι 1-1) και αντίστροφη την

$$\varphi^{-1}(y) = y^3 + y, \ y \in R$$

Βέβαια θα μπορούσε ως βοηθητικό ερώτημα να είχε δοθεί, το να δειχθεί ότι η $g(t) = t^3 + t$ είναι 1-1 (Βλ. σχετικά και τις ασκήσεις 17,18).

Σημείωση

Μια άλλη πορεία λύσης μπορούσε να στηριχθεί στην Πρόταση:
Έστω φ, g συναρτήσεις ορισμένες στο R με $g(\varphi(x)) = x$ για κάθε $x \in R$.Αν η φ έχει σύνολο τιμών το R τότε
α) οι συναρτήσεις g, φ είναι 1 -1,
β) Η g είναι η αντίστροφη της φ (και αντίστροφα)

(αφήνεται ως άσκηση)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $x(t) = \ln\frac{1+t}{1-t}$ και να δειχθεί ότι είναι περιττή. Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης (γ. π.) της x(t) με τους άξονες.

2. Να βρεθούν τα σημεία τομής των γ. π. των συναρτήσεων
$g(x) = x^3 - x + 1$, $h(x) = 2x + 3$.

3. Να εξεταστεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $\varphi(y) = \frac{1}{y} - \ln y$ και να δειχθεί ότι η εξίσωση $y\ln y + y = 1$ έχει μοναδική προφανή λύση, η οποία και να βρεθεί.

4. Έστω η συνάρτηση φ με τύπο $\varphi(\alpha) = \left(\frac{3}{7}\right)^{\alpha} + \left(\frac{4}{7}\right)^{\alpha} - 1$.

α) Να αποδειχθεί ότι η φ είναι γνησίως φθίνουσα (στο πεδίο ορισμού της),
β) Να δειχθεί ότι η εξίσωση $3^x + 2^{2x} = 7^x$ έχει μόνο την λύση x = 1.
γ) Να λυθεί η εξίσωση $\varphi(x^3 + x) = \varphi(3 - x)$.

5. α) Αν για μια συνάρτηση φ ισχύει $2000 \le \varphi(\lambda) \le 2007$ για κάθε $\lambda \in R$, τότε η φ:
Α. έχει ελάχιστο Β. έχει μέγιστο Γ. έχει ελάχιστο και μέγιστο Δ. ίσως έχει ακρότατα.
β) Μια συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το διάστημα [0, 1) και είναι 1-1.
Η αντίστροφή της:
Α. έχει μέγιστο Β. έχει ελάχιστο Γ. δεν έχει ακρότατα.
γ) Αν η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το Α και είναι 1-1, τότε η ισότητα
$(gog^{-1})(\lambda) = \lambda$
Α. Δεν ισχύει ποτέ Β. ισχύει για κάθε $\lambda \in A$ Γ. ισχύει για κάθε $\lambda \in g(A)$
δ) Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το Α και είναι 1-1, τότε για τις συναρτήσεις fof^{-1}, $f^{-1}of$ ισχύει
Α. είναι ίσες Β. δεν είναι ίσες Γ. μερικές φορές είναι ίσες.

6. Έστω φ συνάρτηση ορισμένη στο σύνολο Α. Να αποδειχθεί ότι:
Α. Ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε το σημείο Σ(α, β) να είναι κέντρο συμμετρίας της γ. π. της φ είναι να ισχύει $\varphi(2\alpha - \chi) = 2\beta - \varphi(\chi)$ για κάθε χ , $(2\alpha - \chi) \in A$
Β. Ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η ευθεία χ = ξ να είναι άξονας συμμετρίας της γ. π. της φ είναι να ισχύει $\varphi(2\xi - \chi) = \varphi(\chi)$ για κάθε χ , $(2\xi - \chi) \in A$.
Γ. Ποια συμμετρία παρουσιάζει η γ. π. μιας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης;

7. Με την βοήθεια των ανισοταυτοτήτων $\alpha^2 + \beta^2 \ge 2\alpha\beta$, $\theta + 1/\theta \ge 2$, $(\theta > 0)$, να βρεθεί η μέγιστη τιμή και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $x(t) = \frac{4t}{1+t^2}$. Επίσης η ελάχιστη τιμή της $f(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{1+x^2}$. Έχει μέγιστη τιμή η f(x); (Απ.2, 2, -2, όχι)

8 Με την βοήθεια της ανισότητας $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|\le|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$ (ισότητα αν και μόνο $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ παράλληλα) να βρεθεί η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $h(x) = |x|+\sqrt{8-x^2}$. (Απ. 4)

9. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $x(t) = t^2 - 4t +6$, $t \ge 2$ είναι γνησίως μονότονη και να βρεθεί η αντίστροφή της. Στην συνέχεια να βρεθούν τα κοινά σημεία της γ. π. της x(t) με την αντίστροφή της.

10. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $x(y) = \dfrac{e^y-1}{e^y+1}$, και η αντίστροφή της αν υπάρχει.

11. Έστω η συνάρτηση φ με τύπο $\varphi(y) = \ln(-y+\sqrt{1+y^2})$. Να αποδειχθεί ότι

α) έχει πεδίο ορισμού το R και είναι περιττή,

β) είναι 1-1 και να βρεθεί η αντίστροφή της,

γ) να βρεθούν τα ακρότατα της φ και της αντίστροφής της.

12. Έστω f, g συναρτήσεις 1-1 με κοινό πεδίο ορισμού Α και κοινό σύνολο τιμών Α. Να αποδειχθεί ότι, α) οι συναρτήσεις fog, gof είναι 1-1,

β) Ισχύει $(fog)^{-1} = g^{-1}o\, f^{-1}$, $(gof)^{-1} = f^{-1}o\, g^{-1}$.

13*. Έστω η συνάρτηση με τύπο $x(t) = \dfrac{e^t}{e^t+\sqrt{e}}$, $t\in R$.

α) Να δειχθεί ότι για κάθε $x\in(0, 1)$ υπάρχει μοναδικό $t\in R$ με $x = \dfrac{e^t}{e^t+\sqrt{e}}$.

β) Η συνάρτηση $f(\alpha) = x(\alpha) + x(1-\alpha)$, $\alpha\in R$ είναι σταθερή,

γ) Να υπολογιστεί το άθροισμα $\Sigma = x\left(\frac{1}{10}\right)+x\left(\frac{2}{10}\right)+...+x\left(\frac{9}{10}\right)$. (Απ.9/2)

14. Αν οι κορυφές ενός τριγώνου βρίσκονται στην υπερβολή y = 1/x να δειχθεί ότι και το ορθόκεντρό του βρίσκεται πάνω σ' αυτήν

.

15*. Έστω f, g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το R και g(R) = R ώστε (fog)(x) = x για κάθε $x \in R$.Να αποδειχθεί ότι, α) οι f, g είναι 1-1, β) $f = g^{-1}$, $g = f^{-1}$.

16.** Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το R για τις οποίες ισχύει $|f(t) - g(t)| < \varepsilon$ για κάθε $t\in R$ και για κάθε θετικό αριθμό ε. Να δειχθεί ότι είναι ίσες. Όμοια με την ιδιότητα $f^2(t) + g^2(t) \le \varepsilon + 2f(t)g(t)$.

17*.Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R και $f(x) > 0$ για κάθε $x\in R$, που ικανοποιεί την σχέση $\dfrac{1}{f(x)} - \ln f(x) = x$ για κάθε $x\in R$, καθώς και η συνάρτηση $\varphi(t) = \dfrac{1}{t} - \ln t$. α) Να δειχθεί ότι οι f, φ είναι γνησίως μονότονες,

β) Να βρεθεί η αντίστροφη της f αν υπάρχει, γ) Να βρεθεί η τιμή f(1). (Απ. 1)

18.** α) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $\varphi(t) = e^t/t$, $t \ge 1$ είναι γν. αύξουσα (με παράγωγο).

β) Έστω συνάρτηση f(x), $x \ge e$, για την οποία ισχύουν $e^{f(x)} = x\, f(x)$ και $f(x) \ge 1$ για κάθε $x \ge e$. Να δειχθεί ότι η f είναι 1-1 και να βρεθεί η αντίστροφή της.

Β. ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ (ενότητες 1. 4 - 1. 7)

1. Α. Χρήσιμο είναι να γίνει διάκριση των εννοιών:

- «*δεν έχει έννοια* το όριο της f στο $\xi \in R \cup \{+\infty, -\infty\}$»: όταν η συνάρτηση f δεν ορίζεται «κοντά στο ξ», π.χ $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x^2 - |x|}$, $\lim\limits_{\omega \to +\infty}$ εφω.

- «*δεν υπάρχει* το όριο της f στο $\xi \in R \cup \{+\infty, -\infty\}$»: όταν το όριο έχει έννοια και τα πλευρικά όρια (όταν η f ορίζεται εκατέρωθεν του ξ) είναι διαφορετικά (πεπερασμένα ή άπειρα), π.χ. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{|x|}$. Αυτή είναι η πλέον συνηθισμένη, για το σχ. βιβλίο, περίπτωση, αλλά είναι δυνατόν να μην υπάρχει (σύμφωνα πλέον με τον ορισμό του ορίου) ούτε ένα από τα πλευρικά όρια.

Β. Σύμφωνα με το σχ. βιβλίο η έκφραση «υπάρχει το όριο…» σημαίνει ότι είναι πραγματικός αριθμός ή άπειρο. Σε ορισμένα πανεπιστημιακά βιβλία αυτό σημαίνει ότι είναι μόνο πραγματικός αριθμός .

Γ. Συνηθίζεται όταν ζητείται να βρεθεί ένα όριο αυτό να έχει έννοια, ανεξάρτητα αν υπάρχει ή όχι. Έτσι, αν τυχόν ο ερωτών θέλει να εξετάσει ο ερωτώμενος αν έχει ή όχι έννοια ένα όριο, πρέπει να το ζητήσει συγκεκριμένα (και μετά ίσως αν υπάρχει να ζητήσει και να βρεθεί).

Δ. Όταν ζητείται να εξεταστεί αν έχει έννοια το όριο μιας συνάρτησης στο σημείο $\xi \in R \cup \{+\infty, -\infty\}$, δεν χρειάζεται να βρεθεί το πεδίο ορισμού της (όπως βέβαια και όταν ζητείται να βρεθεί ένα όριο). Αρκεί να είναι ορισμένη σε μια περιοχή του σημείου αυτού (άλλο βέβαια ότι πολλές φορές είναι πιο εύκολο να βρούμε πρώτα το πεδίο ορισμού της και μετά να διαπιστώσουμε αυτό).

Άλλωστε υπάρχει περίπτωση να μην είναι εύκολο να βρεθεί το πεδίο ορισμού (και να τεθεί σε μορφή διαστημάτων), οπότε μας αρκεί να εξασφαλίσουμε περιοχή του σημείου (εκτός ίσως του σημείου) στην οποία ορίζεται η συνάρτηση. Π.χ.

Να εξεταστεί αν έχει έννοια τα όριο $\lim\limits_{\lambda \to 0} \frac{\lambda + 2}{\lambda^6 - \lambda + 1}$.

Η εύρεση του πεδίου ορισμού δεν είναι εύκολη (είναι το R, αλλά και δεν μας ενδιαφέρει). Είναι $\lim\limits_{x \to 0}(\lambda^6 - \lambda + 1) = 1 > 0$, οπότε $\lambda^{2010} - \lambda + 1 \neq (>)\ 0$ κοντά στο 0 κλπ.

2. Στο 1ο θεώρημα της διάταξης (σελ.165).

Να σημειωθεί ότι δεν ισχύει το αντίστροφο: π.χ. $x^2 > 0$ κοντά στο 0 (π.χ. στο $(-1, 0) \cup (0, 1)$), αλλά (όπως θα δούμε παρακάτω) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$,

3. Στο 2° θεώρημα της διάταξης (σελ.166).
Αν $f(x) < g(x)$ κοντά στο ξ, δεν συνεπάγεται ότι $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) < \lim\limits_{x\to\xi} g(x)$,

(το αντίστροφο αποδεικνύεται εύκολα)
Ισχύει όμως πάντα ότι $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) \le \lim\limits_{x\to\xi} g(x)$ (εφόσον τότε είναι και $f(x) \le g(x)$).

π.χ. $x^2 < 2x^2$, $x \ne 0$, αλλά $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = \lim\limits_{x\to 0} 2x^2 = 0$.

4. Το Θεώρημα (όρια και πράξεις) της σελίδας 166, μετά το «τότε» να προστεθεί « υπάρχουν τα παρακάτω όρια και ισχύουν»…
Το ίδιο και στο κριτήριο παρεμβολής (σελ.169) «υπάρχει το όριο της f στο x_0 και…». Αυτή είναι η σωστή διατύπωση των θεωρημάτων και αποτρέπει λάθη.
Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει, π.χ.
Για την ιδιότητα $\lim\limits_{x\to\xi}(f(x)g(x)) = \lim\limits_{x\to\xi} f(x) \lim\limits_{x\to\xi} g(x)$, έχουμε

$\lim\limits_{x\to\xi}(\frac{|x|}{x}\cdot(-\frac{|x|}{x}) = -1$, αλλά δεν υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{|x|}{x}\right)$.

- Ισχύει όμως ότι, αν υπάρχουν τα όρια των π.χ. των f + g και f στο ξ, τότε υπάρχει και όριο της g και της f - g στο ξ. (Να δοθεί ως άσκηση) .

5. (Ιδιότητα 5, θεωρήματος σελ.166).
Αν $\lim\limits_{t\to\xi} |f(t)| = |\alpha|$ δεν συνεπάγεται ότι $\lim\limits_{t\to\xi} f(t) = \alpha$ (το αντίστροφο ισχύει πάντα).

π.χ. $\lim\limits_{x\to 1} |x^2| = |-1|$ αλλά $\lim\limits_{x\to 1} x^2 \ne -1$,ή $\lim\limits_{x\to 0}\left|\frac{|x|}{x}\right| = |1|$ αλλά δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$.
Ισχύει όμως ότι, $\lim\limits_{t\to\xi} |f(t)| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{t\to\xi} f(t) = 0$ ($-|f(t)| \le f(t) \le |f(t)|$ κλπ) .

6. Ως γνωστό, αν $x\in R$ σε ακτίνια τότε $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 1$.

Αν όμως $\theta\in R$ σε μοίρες τότε $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\eta\mu\theta}{\theta} = \frac{\pi}{180}$ (χρήση του $\frac{\theta}{180} = \frac{x}{\pi}$)

7. Στο όριο σύνθεσης συναρτήσεων fog στο x_0 (σελ.173) .
Η συνθήκη $g(x)\ne u_o$ κοντά στο x_0, δεν μπορεί να αγνοηθεί (Βλ. σχετικά το αντιπαράδειγμα στη σελίδα 128 των οδηγιών του Π. Ι. 2007-2008). Αν έχουμε «καλούς» μαθητές ή μαθητές με μαθηματικές ανησυχίες, ας αναφερθεί αυτό: κάπου οι μαθητές πρέπει να δουν και κάτι βαθύτερο στα Μαθηματικά και να μην νομίζουν ότι είναι πάντα ξερά θεωρήματα χωρίς απόδειξη, αχρεωστήτως δοσμένα, και ασκήσεις για τις εξετάσεις…

8. Τα όρια $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \eta\mu x$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sigma\upsilon\nu x$, *δεν υπάρχουν* (μια πρώτη-και αρκετή για τα σχ. πλαίσια- δικαιολόγηση μπορεί να γίνει μέσω της γνωστής γραφικής παράστασης των συναρτήσεων).
Η πληροφόρηση αυτή θα αποτρέψει πολλούς μαθητές να «δίνουν διάφορες τιμές» στα όρια αυτά, ιδίως σε… αγχώδεις καταστάσεις.

Απόδειξη*: Έστω ότι υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty} ημx = ρ \in R\cup\{+\infty, -\infty\}$. Επειδή $-1\le ημx\le 1$ δεν μπορεί το ρ να είναι $+\infty$ ή $-\infty$, άρα $ρ\in R$. Έχουμε τότε και
$\lim\limits_{x\to+\infty} ημ(x+α) = \lim\limits_{u\to+\infty} ημu = ρ$ για κάθε $α\in R$.
Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} ημ(x+α) = ρ$ ή $\lim\limits_{x\to+\infty} (ημxσυνα + συνxημα) = ρ$ για κάθε $α\in R$
Για α = -π προκύπτει $\lim\limits_{x\to+\infty} ημx = -ρ$, οπότε ρ = 0.
Για α = π/2 προκύπτει $\lim\limits_{x\to+\infty} συνx = ρ = 0$ και από την γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα των ημx, συνx καταλήγουμε σε άτοπο. Το $\lim\limits_{x\to+\infty} συνx$ δεν υπάρχει λόγω $συν\left(x-\frac{π}{2}\right)$ = ημx. Όμοια εργαζόμαστε και στο -∞.

9. Αν $f(x) \le g(x)$ κοντά στο $ξ\in R\cup\{+\infty, -\infty\}$, και

- $\lim\limits_{x\to ξ} f(x) = +\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to ξ} g(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to ξ} g(x) = -\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to ξ} f(x) = -\infty$.

Η δικαιολόγηση μπορεί να γίνει διαισθητικά αλλά και με το κριτήριο παρεμβολής.

10. *Απροσδιόριστη μορφή*: λέμε την περίπτωση του ορίου, το οποίο *έχει έννοια* και για τον υπολογισμό του δεν μπορεί να εφαρμοστεί κάποιος γνωστός κανόνας των ορίων. Μπορεί να υπάρχει ή να μην υπάρχει το όριο αυτό.
Για παράδειγμα τα όρια

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}\ ,\ \lim_{u\to0}\frac{u}{|u|}$$

είναι απροσδιόριστες μορφές και ενώ το πρώτο υπάρχει (και είναι ίσο με 2) , το δεύτερο δεν υπάρχει.

11. Έχοντας υπόψη τις αντίστοιχες ιδιότητες των ορίων, συντομογραφικά μπορούμε να χρησιμοποιούμε τους παρακάτω συμβολισμούς που βοηθούν στον λογισμό των ορίων (αλλά να μην τις αναφέρουμε ως πράξεις στο $R\cup\{+\infty, -\infty\}$) :

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty,\ (-\infty) + (-\infty) = -\infty,\ \frac{1}{0^+} = +\infty\ ,\ \frac{1}{0^-} = -\infty\ ,\ \frac{1}{+\infty} = 0\ ,\ \frac{1}{-\infty} = 0 \text{ κλπ.}$$

12. Για την σωστή κωδικοποίηση και ανάκληση από την μνήμη των ορίων και γενικά των ιδιοτήτων της εκθετικής συνάρτησης $α^x$, με α > 1 και 0 < α < 1, καθώς και της λογαριθμικής συνάρτησης lnx, να γίνει σύσταση στους μαθητές να *απομνημονεύσουν κυριολεκτικά τις γραφικές τους παραστάσεις* μέσω των οποίων θα ανακαλούν στη μνήμη τις πολλές χρήσιμες ιδιότητές τους και όχι να τις απομνημονεύσουν!.

13. **Επιμερισμός Ορίου:** συχνό λάθος, που πρέπει να επισημανθεί: χρησιμοποιείται ουσιαστικά η «φαινομενική ιδιότητα»:

Αν $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = \alpha \in R$, τότε $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to\xi} \alpha g(x)$ η οποία δεν ισχύει (πάντα), π.χ.

$$1 = \lim_{x\to 0} x\frac{x+1}{x} = \lim_{x\to 0} 0\frac{x+1}{x} = 0\text{, άτοπο.}$$

Προσοχή : αν $\alpha\neq 0$ και υπάρχει το όριο της g(x) στο ξ, τότε ισχύει. (άσκηση)

14. Ιστορικά στοιχεία.
Σχετικά με το συμβολισμό του απείρου, αναφέρουμε ότι το σύμβολο ∞ χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον John Wallis το 1655. Το υιοθέτησε από το αντίστοιχο λατινικό σύμβολο ∞ το οποίο παρίστανε το 1.000. Ο Wallis χρησιμοποίησε για πρώτη φορά τον συμβολισμό του απείρου στο βιβλίο του «Arithmetica infitorum»

15. Χρήσιμες υποδείξεις για τις ασκήσεις:

Α. Αν $\lim\limits_{x\to\xi} \frac{f(x)}{x-\xi} = \alpha \in R$ τότε $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = 0$.

Πολύ χρήσιμη σε ασκήσεις και εύκολα αποδείξιμη: $f(x) = \frac{f(x)}{x-\xi}(x-\xi)$ κλπ.

Ακόμη μπορούμε να θέσουμε $g(x) = \frac{f(x)}{x-\xi}$ κλπ, που είναι μια γενική μέθοδος «ξεφωλιάσματος» μιας συνάρτησης f(x).

Β. Το κριτήριο παρεμβολής χρησιμοποιείται συνήθως σε θεωρητικά θέματα (συναρτησιακές σχέσεις κλπ) και σε απροσδιόριστες μορφές ή «δύσκολα» και «περίεργα» όρια, ιδίως όταν περιέχουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημίτονο και συνημίτονο.

Γ. Σε ασκήσεις που εμφανίζονται όρια εκθετικής, χρήσιμο είναι να ανάγονται στη περίπτωση του ορίου $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$ με $0 < \alpha < 1$.

Γ. Σ Υ Ν Ε Χ Ε Ι Α ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ (ενότητα 1. 8)

1. *Μονοτονία και Συνέχεια.*
Αν φ γνησίως φθίνουσα (γν. αύξουσα) στα διαστήματα (α, β], (β, γ) και συνεχής στο β, τότε η φ είναι γν. φθίνουσα (γν. αύξουσα) στην ένωση τους (α, β] ∪ (β, γ) = (α, γ) (όπως είδαμε στη σελ.3, ΙΙ.7, αν δεν είναι συνεχής στο β δεν ισχύει).

Απόδειξη*
Έστω φ γν. φθίνουσα στα διαστήματα (α, β], (β, γ). Για να δειχθεί ότι είναι γν. φθίνουσα στο (α, γ), αρκεί να δειχθεί ότι, αν $\beta < \lambda < \gamma$ τότε $\varphi(\beta) > \varphi(\lambda)$ (για τις άλλες περιπτώσεις είναι προφανής ότι ικανοποιείται ο ορισμός). Έστω ένας σταθερός αριθμός ρ με $\beta < \rho < \lambda$.
Για κάθε κ με $\beta < \kappa < \rho < \lambda$ έχομε $\varphi(\kappa) > \varphi(\rho) > \varphi(\lambda)$ και λόγω συνέχειας στο β, $\lim\limits_{\kappa \to \beta^+} \varphi(\kappa) \geq \varphi(\rho)$ ή $\varphi(\beta) \geq \varphi(\rho) > \varphi(\lambda)$. Άρα $\varphi(\beta) > \varphi(\lambda)$ (Μάλιστα αρκεί μόνο η από δεξιά συνέχεια στο β).

2*. *Μονοτονία και 1-1.* Αν φ 1-1 και συνεχής σε διάστημα, τότε η φ (αποδεικνύεται ότι) είναι γνησίως μονότονη (χρήσιμο στην αλλαγή μεταβλητής στα ολοκληρώματα).

3. *Ιστορικά στοιχεία στο θεώρημα Bolzano.*
Ο Bernard Bolzano (1781 – 1848) ήταν Τσέχος μαθηματικός ιερωμένος και φιλόσοφος, από τους πιο βαθυστόχαστους μαθηματικούς της εποχής του. Το θεώρημα που φέρνει το όνομά του απαντά σε κάποιο βαθμό στο ερώτημα, τι κάνουμε στις περιπτώσεις που είναι αδύνατον να προσδιορίσουμε τις ρίζες μιας εξίσωσης; Αυτό το ερώτημα έγινε επιτακτικό από το 1824, όταν ο Νορβηγός μαθηματικός *Niels Abel* (1802-1829) απέδειξε ότι, δεν είναι δυνατόν να βρεθούν τύποι (που περιέχουν τις 4 πράξεις του R και ν-οστές ρίζες) που να δίνουν τις ρίζες μιας πλήρους πολυωνυμικής εξίσωσης $5^{ου}$ ή μεγαλύτερου βαθμού.

Έτσι το πρόβλημα εστιάστηκε πια στην αναζήτηση πληροφοριών, που θα φωτίζουν όσο γίνεται περισσότερο το θέμα των ριζών, οπότε τέθηκαν τα ερωτήματα:

- *Πόσες πραγματικές ρίζες έχει η εξίσωση;*
- *Που περίπου βρίσκονται αυτές οι ρίζες πάνω στον x- άξονα των πραγματικών αριθμών;*
- *Πόσες είναι θετικές και πόσες αρνητικές;*

Σε ερωτήματα τέτοιου τύπου δίνονται απαντήσεις από ορισμένα θεωρήματα της βασικής Μαθηματικής Ανάλυσης, που έχει επικρατήσει να τ' αποκαλούμε «υπαρξιακά θεωρήματα». Μεταξύ αυτών, το πρώτο μάλιστα, είναι και το γνωστό ως θεώρημα του Bolzano. Στην πορεία, και με αφετηρία τον προσεγγιστικό υπολογισμό των ριζών πολύπλοκων εξισώσεων (μέθοδος διχοτόμησης κλπ), δημιουργείται ένας νέος κλάδος των Μαθηματικών, η Αριθμητική Ανάλυση.

4. Ας έχουμε υπόψη ότι η (αυστηρή) απόδειξη του Θ. Bolzano (όπως και του Rolle) στηρίζεται στο $2^{ο}$ αξίωμα της γραμμικής διάταξης των πραγματικών αριθμών (supremum) και ξεφεύγει από τους σκοπούς του βιβλίου. Εδώ θα γίνει μόνο μια εποπτικογεωμετρική δικαιολόγηση (που δεν αποτελεί απόδειξη για την Ανάλυση).

- *Το αντίστροφο του Θ. Bolzano δεν ισχύει:* είναι δυνατόν να υπάρχει ρίζα μιας συνεχούς συνάρτησης στο διάστημα (α, β), αλλά να μην ισχύει $f(\alpha)f(\beta) < 0$, π.χ. η συνάρτηση $f(\lambda) = \lambda^2 - 1$, $\lambda \in [-2, 2]$.

Επισήμανση: η συνθήκη $f(\alpha)f(\beta) < 0$ είναι απλά *ικανή* (και *όχι αναγκαία*) για να υπάρχει ρίζα.

- Το σημαντικό σχόλιο-πόρισμα «διατήρησης προσήμου», αμέσως μετά το θ. Bolzano: αυτό ισχύει *μόνο για συνεχή σε διάστημα* και όχι σε ένωση διαστημάτων (όπως βέβαια και το θ. Bolzano) και με περασμένο πλήθος ριζών στο εσωτερικό του (αντιπαράδειγμα εύκολο) .

Γενίκευση Θ. Bolzano.
Έστω *f* συνεχής στο διάστημα (α, β) της οποίας υπάρχουν, στο $R \cup \{-\infty. +\infty\}$, τα όρια στο α και β και είναι ετερόσημα (ακόμη και άπειρα).
Τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $f(\xi) = 0$.
(Υπ. Απόδειξη με χρήση του θεωρήματος διάταξης στα όρια και Θ. Bolzano)

5. Από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών (Θ.Ε.Τ.) προκύπτει, ως μερική περίπτωση-πόρισμα, το Θ. Bolzano (Να δοθεί ως άσκηση).

6. Το συμπέρασμα του Θ.Ε.Τ. μπορεί να ισχύει και για μη συνεχή συνάρτηση.

Πράγματι, σύμφωνα με το θεώρημα του Darboux (Γάλλος, 1842-1917) η παράγωγος μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ δυο τιμών της, δηλαδή ισχύει γι' αυτήν το Θ.Ε.Τ., ενώ βέβαια δεν είναι πάντα συνεχής συνάρτηση. Άρα το συμπέρασμα του Θ.Ε.Τ, είναι (μόνο) αναγκαία συνέπεια της συνέχειας. Έτσι, αν δεν ισχύει το Θ. Ε. Τ η συνάρτηση δεν είναι συνεχής. Ένα απλούστερο παράδειγμα που μπορούμε να φτιάξουμε είναι το εξής: Έστω φ συνεχής στο [α, β]. Ορίζουμε την συνάρτηση (επέκταση της φ) Σ(χ) με $\Sigma(\chi) = \varphi(\chi)$, για $\chi \in [\alpha, \beta]$ και $\Sigma(x) = \varphi(\kappa)$ για $x \in (\beta, \gamma]$, όπου $\kappa \in (\alpha, \beta)$ σταθερός με $\varphi(\kappa) \neq \varphi(\beta)$. Τότε η Σ δεν είναι συνεχής στο [α, γ] αλλά επειδή έχει το ίδιο σύνολο τιμών με την φ, ισχύει το Θ.Ε.Τ. για την Σ ακριβώς λόγω της συνέχειας της φ στο [α, β].

7. Καταφυγή στα όρια: στην περίπτωση που θέλουμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Bolzano, αλλά αγνοούμε το διάστημα [α, β], καθώς και τα πρόσημα των τιμών f(α), f(β): υπολογίζουμε τα όρια της συνάρτησης στο $+\infty$ και $-\infty$.

π.χ. αν $f(t) = \alpha t^{2007} + \beta t^{2000} + 3t + \gamma$ με $\alpha > 0$, τότε $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$, οπότε υπάρχει $\lambda > 0$ με $f(\lambda) > 0$. Επίσης $\lim\limits_{x \to -\infty} f(t) = -\infty$, οπότε υπάρχει $\kappa < 0$ με $f(\kappa) < 0$.

Άρα στο διάστημα [κ, λ] ισχύει $f(\kappa)f(\lambda) < 0$ κλπ

8. Μετά το θεώρημα για την εικόνα διαστήματος (οποιασδήποτε μορφής) μέσω συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης (τέλος σελ.194) να αναφερθούν όλες οι δυνατές περιπτώσεις μέσω των γρ. παραστάσεων της σελ.195, από τις οποίες μόνο η τελευταία διασφαλίζεται με το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής (Θ. Μ. Ε. Τ.) και το Θ.Ε.Τ.

9. Από το Θ.Μ.Ε.Τ προκύπτει ότι η συνέχεια σε κλειστό διάστημα έχει ως αναγκαία (μόνο) συνέπεια την ύπαρξη μέγιστης και ελάχιστης τιμής. Αυτό γιατί μέγιστη και

ελάχιστη τιμή μπορεί να υπάρχει και όταν η συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα ή όταν η συνάρτηση είναι συνεχής σε ανοικτό. Για παράδειγμα η συνάρτηση
$\varphi(x) = x + 1$ για $0 < x \leq 1$ και $\varphi(x) = x^2$ για $-1 \leq x \leq 0$ δεν είναι συνεχής στο κλειστό $[-1, 1]$ αλλά έχει μέγιστη τιμή 2 και ελάχιστη τιμή 0. Επίσης η συνάρτηση $\Sigma(x) =$ ημx είναι συνεχής στο ανοικτό $(0, 2\pi)$ αλλά έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή .

10. Ως συνέπεια του Θ.Μ.Ε.Τ. σε συνδυασμό και με το σχόλιο, έχομε τις ειδικές περιπτώσεις:
Αν f γν. αύξουσα στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ τότε $f([\alpha, \beta]) = [f(\alpha), f(\beta)]$, ενώ αν f γν. φθίνουσα τότε $f([\alpha, \beta]) = [f(\beta)], f(\alpha)]$ (να γίνουν και οι σχετικές γρ. παραστάσεις). Στις περιπτώσεις αυτές προκύπτουν άμεσα και τα (ολικά) ακρότατα της συνάρτησης.

11. Στο σχετικό θεώρημα *συνέχειας και μονοτονίας* του βιβλίου (σελ.196) για την αναλυτική (δηλ. με μεθόδους της Ανάλυσης) εύρεση του συνόλου τιμών συνάρτησης, ας έχουμε υπόψη ότι αν f συνεχής και γνησίως μονότονη στο διάστημα (α, β), με $\alpha, \beta \in R \cup \{-\infty. +\infty\}$, *τότε αποδεικνύεται ότι υπάρχουν* τα όρια (στο $R \cup \{-\infty, +\infty\}$) $A = \lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x)$, $B = \lim\limits_{x \to \beta^-} f(x)$ κλπ. Στο θεώρημα αυτό άξιο σημείωσης είναι ότι η εικόνα ανοικτού διαστήματος μέσω συνεχούς και γνησίως μονότονης συνάρτησης είναι (πάντα) ανοικτό διάστημα, κάτι που δεν ισχύει όταν η συνάρτηση δεν είναι γν. μονότονη.

12. Ως συνέπεια του θεωρήματος συνέχειας και μονοτονίας έχομε τις περιπτώσεις:
Αν f γν. αύξουσα στο διάστημα $[\alpha, \beta)$ τότε $f([\alpha, \beta)) = [f(\alpha), B)$, ενώ αν f γν. φθίνουσα τότε $f([\alpha, \beta)) = (B, f(\alpha)]$ και ανάλογα για το $(\alpha, \beta]$.

13. Για την εύρεση του συνόλου τιμών συνάρτησης φ ορισμένης σε ένωση διαστημάτων $(\alpha, \beta) \cup (\gamma, \delta)$, ισχύει

$$\varphi((\alpha, \beta) \cup (\gamma, \delta)) = \varphi((\alpha, \beta)) \cup \varphi((\gamma, \delta)).$$

που μπορεί να εφαρμόζεται χωρίς απόδειξη (ως προφανής)

14. Οι ερωτήσεις κατανόησης (σελ.201-203) είναι πολύ ενδιαφέρουσες και πρέπει να δοθούν όλες, σταδιακά ή με την επανάληψη του κεφαλαίου.

15. Προβλήματα εύρεσης συνεχών συναρτήσεων

Στα προβλήματα αυτά χρησιμοποιούμε συνήθως το γνωστό πόρισμα του Θ. Bolzano: αν μια συνεχής συνάρτηση δεν μηδενίζεται σε ένα διάστημα, τότε διατηρεί πρόσημο σ' αυτό (αυτό το πόρισμα είναι χρήσιμο παρακάτω και για την εύρεση του προσήμου της παραγώγου συνάρτησης). Επίσης μερικές φορές μπορεί να χρησιμοποιηθεί και το Θ.Ε.Τ. Δίνουμε δυο παραδείγματα.

Α. Βιβλίου 7(ii) σελ.200 : Να βρεθούν οι συνεχείς συναρτήσεις με την ιδιότητα
$f^2(x) = x^2$ για κάθε $x \in R$.
(το πρόβλημα αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί βοηθητικά και σε πιο σύνθετα προβλήματα)

Λύση
Είναι $f(x) = \pm x$, $x \in R$ (απλή αλγεβρική έκφραση της f).

- Έστω $x > 0$. Επειδή $f(x) \neq 0$ για $x \in (0, +\infty)$ θα έχουμε (Πόρισμα Θ. Bolzano) $f(x) = x$ για κάθε $x > 0$ είτε $f(x) = -x$ για κάθε $x > 0$.
- Έστω $x < 0$. Επειδή $f(x) \neq 0$ για $x \in (-\infty, 0)$ (Πόρισμα Θ. Bolzano) θα έχουμε $f(x) = x$ για κάθε $x < 0$ είτε $f(x) = -x$ για κάθε $x < 0$.
- Για $x = 0$ έχουμε $f(x) = 0$.

Τελικά έχουμε 4 συνεχείς συναρτήσεις:

• $f(x) = x, x \in R$ • $f(x) = -x, x \in R$ • $f(x) = |x|, x \in R$ • $f(x) = -|x|, x \in R$

Β. Να βρεθούν οι συναρτήσεις φ που είναι συνεχείς στο R και έχουν την ιδιότητα $\varphi^2(x) = e^x\varphi(x)$ για κάθε $x \in R$.

Λύση

Για κάθε $x \in R$, ισοδύναμα έχομε, $\varphi(x)(\varphi(x) - e^x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = 0$ ή $\varphi(x) = e^x$ (1)

- Αν $\varphi(x) = 0$ για κάθε $x \in R$, τότε η φ είναι συνεχής και είναι μια από τις ζητούμενες.
- Έστω ότι υπάρχει $\xi \in R$ με $\varphi(\xi) \neq 0$, οπότε από (1) προκύπτει $\varphi(\xi) = e^\xi$. Θα δείξουμε ότι $\varphi(x) = e^x$ για κάθε $x \in R$. Έστω ότι υπάρχει $\kappa \neq \xi$ με $\varphi(\kappa) \neq e^\kappa$, οπότε $\varphi(\kappa) = 0$. Χωρίς βλάβη έστω $\kappa < \xi$.

  Είναι $\varphi(\kappa) = 0 < e^\kappa < e^\xi = \varphi(\xi)$, οπότε από Θ.Ε.Τ για τον αριθμό $\eta = e^\kappa$ υπάρχει $\lambda \in (\kappa, \xi)$ με $e^\kappa = \varphi(\lambda)$. Αλλά τότε από (1) πρέπει $\varphi(\lambda) = e^\lambda$, οπότε $\kappa = \lambda$ άτοπο. Όμοια αν $\kappa > \xi$. Άρα $\varphi(x) = e^x$ για κάθε $x \in R$.

Επομένως υπάρχουν δυο ακριβώς συνεχείς συναρτήσεις, η $\varphi = 0$ και $\varphi(x) = e^x$, $x \in R$. (Άλλος τρόπος : η δοθείσα γράφεται $(\varphi(x) - e^x/2)^2 = (e^x/2)^2$, $\lambda(x)=(\varphi(x) - e^x/2) \neq 0$,κλπ)

Γενίκευση: η παραπάνω περίπτωση εύρεσης συνάρτησης γενικεύεται ως εξής:
Έστω φ, θ συνεχείς συναρτήσεις στο R (ή σ' ένα διάστημα Δ) ώστε
$\varphi(x)(\varphi(x) - \theta(x) = 0$ για κάθε $x \in R$.Αν $\theta(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$, τότε ισχύει $\varphi = 0$ ή $\varphi = \theta$.
(Υπόδειξη : $\varphi(x)(\varphi(x) - \theta(x) = 0 \Leftrightarrow (\varphi(x)- \theta(x)/2)^2= (\theta(x)/2)^2$, οπότε η $\varphi(x)- \theta(x)/2$ διατηρεί πρόσημο, όπως και η θ κλπ)

Χρήσιμες Υποδείξεις για τις Ασκήσεις

1. Αν στα άκρα ενός διαστήματος διαπιστώσουμε ομόσημες τιμές, τότε θεωρούμε και το μέσο του διαστήματος αυτού και αν πάλι συμβεί το ίδιο χωρίζουμε το διάστημα σε 3 ίσα διαστήματα κλπ.
2. Συχνά μπορεί να συμβεί ένα άθροισμα μερικών τιμών μιας συνάρτησης να είναι ίσο με μηδέν, οπότε υπάρχουν δυο ετερόσημες τιμές κλπ (βλ. άσκηση 28).
3. Καταφυγή στα όρια (βλ. παραπάνω σημείωση Β.7).
4. Η μοναδικότητα της ρίζας μιας συνάρτησης εξασφαλίζεται συνήθως με την μονοτονία ή το 1-1 της συνάρτησης.

Αναφέρουμε στην συνέχεια μερικές ερωτήσεις αντικειμενικού τύπου καθώς και ασκήσεις και θέματα για την επανάληψη του 1ου κεφαλαίου της Ανάλυσης και των μιγαδικών. Δεν σημαίνει ότι πρέπει να γίνουν όλες. Ο διδάσκων θα κρίνει ποιες θα προτείνει στους μαθητές του ή θα διδάξει ανάλογα με τον διαθέσιμο χρόνο, το επίπεδο των μαθητών του και τους στόχους που έχει βάλει.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ : ΟΡΙΑ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ

1. Α. Αν $\lim\limits_{t\to 0} t^2 f(t) = 2005$, τότε $\lim\limits_{t\to 0} f(2t) =$

Α. 0 Β. 2005 Γ. $+\infty$ Δ.$-\infty$ Ε. δεν υπάρχει

Β. Αν $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{f^2(x)} = 0$ τότε $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{e}{3}\right)^{\ln|f(x)|} =$

Α. 0 Β. $+\infty$ Γ. $-\infty$ Δ. Άλλο

Γ. Αν $\lim\limits_{t\to \xi} f(t) < \lim\limits_{t\to \xi} g(t)$ τότε $f(x) < g(x)$ «κοντά στο x» : Σ - Λ .

2. Αν f συνεχής στο διάστημα [α, β] και m, M η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της αντίστοιχα, τότε

i) Η σχέση $[\mu, M] \subseteq f(([\alpha, \beta]$ προκύπτει από το θεώρημα

Α.Ενδ. τιμών Β. Bolzano Γ.Μέγ. και Ελαχ. τιμής Δ. Δεν ισχύει

ii) Η σχέση $f(([\alpha, \beta]) \subseteq [\mu, M]$ προκύπτει από το θεώρημα

Α.Ενδ. τιμών Β.Bolzano Γ.Μέγ. και Ελαχ. τιμής Δ. Άλλο

3. Η συνάρτηση $\Sigma(\lambda) = 5\lambda^{2008} - 6\lambda^{1453} + 1$, $0 \le \lambda \le 1$, δεν μπορεί να πάρει την τιμή 1/2008

Α. Σωστό Β. Λάθος Γ. Εξαρτάται από το λ

4. Αν f συνεχής στο (α, β) και A < B όπου $A = \lim\limits_{x\to \alpha^+} f(x)$, $B = \lim\limits_{x\to \beta^-} f(x)$ τότε η f είναι

Α. γν. αύξουσα Β. Γν. φθίνουσα Γ. όχι μονότονη Δ. Άγνωστο

5. Αν φ συνεχής στο (α, β) και έχει σύνολο τιμών το [γ, δ], τότε η φ είναι:

Α. Συνεχής Β. Ασυνεχής Γ. Γν. Μονότονη Δ. 'Όχι γν. μονότονη

6. Αν φ ορισμένη στο (α, β) και έχει σύνολο τιμών το $(\gamma, \delta) \cup (\kappa, \lambda)$ τότε η φ είναι

Α. Συνεχής Β. Ασυνεχής Γ. Γν. Μονότονη Δ. 'Όχι μονότονη

7. Αν Σ(x) ορισμένη στο [0, 1] και ισχύει $\Sigma(0) \le \Sigma(x) \le \Sigma(1)$ για κάθε $x \in [0, 1]$ τότε

Α. $\Sigma([0, 1]) \subseteq [\Sigma(0), \Sigma(1)]$ Β. $\Sigma([0, 1]) = [\Sigma(0), \Sigma(1)]$ Γ.$[\Sigma(0), \Sigma(1)] \subseteq \Sigma([0, 1])$

8. Αν $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{6x^5 + \alpha x^2 - \beta x + \gamma}{2x^n - \gamma x + 2007} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{7\cdot e^x - 3\cdot 2^x}{2\cdot 5^x + 1}$, $n \in N$, τότε

Α. n < 5 Β. n > 5 Γ. n = 5 Δ. n = 3

9. Να βρεθεί ο αριθμός με τον οποίο μπορούμε να προσεγγίσουμε την παράσταση

$A = \dfrac{\varepsilon\varphi(t-2)}{\sqrt{t+2} - 2}$ για t = 2,00001010. (Απ.4)

10. Έστω η συνάρτηση $H(x) = -x + \sqrt{1+x^2}$.
α) Να δειχθεί ότι είναι 1-1, β) Να βρεθεί τη αντίστροφή της,
γ) Να βρεθεί το όριο της H(x) και της αντίστροφή της στο $+\infty$.

11. Έστω η συνάρτηση $\varphi(y)=\sqrt{y^2-8y+12}$, $y \geq 6$.
α) να βρεθούν το σύνολο τιμών και τα ακρότατά της (αν υπάρχουν)
β) να δειχθεί ότι είναι 1-1 και να λυθεί η εξίσωση $\varphi^{-1}(x) = x$,
γ) να βρεθούν τα όρια της συνάρτησης $f(y) = \varphi(y)/\varphi^{-1}(y)$ στο 0 και στο $+\infty$.
(Απ.(γ) δ.ο., 1)

12. Έστω η συνάρτηση φ με τύπο $\varphi(t) = 2\sqrt{t}\left(\sqrt{t+5}-\sqrt{t}\right)$.
α) Να την μετασχηματίσετε στην μορφή $\dfrac{10}{1+\sqrt{\alpha}}$,
β) Να δείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε την αντίστροφή της,
γ) Να βρείτε το όριό της στο $+\infty$.

13. Αν $z \in C$ και η συνάρτηση t με $t(x) = \dfrac{\eta\mu\,|zx|}{x}$ για $x > 0$ και
$t(x) = \left|(\bar{z}-2i)(x^3-|z|\cdot x^2+1)\right|$ για $x \leq 0$, είναι συνεχής, να δειχθεί ότι ο z ανήκει σε ευθεία της οποίας να βρεθεί η εξίσωση.

14. Α. Να βρεθεί ο $\alpha \in R$ ώστε $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-\alpha x-3}{x-3} = 2$. (Απ. Δεν υπάρχει)

Β. Ποια τιμή πρέπει να έχει η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{3x-6}{2-\sqrt{2x}}$ στο 2 ώστε να είναι συνεχής στο διάστημα $[0, +\infty)$; (Απ. -6)

15. Α. Αν $\lim\limits_{x\to 1}(f^3(x)+2f^2(x)+f(x)+2) = 0$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. (Απ.-2)

Β.Να βρεθεί μια συνάρτηση f συνεχής στο R τέτοια ώστε
$t^3 + 2 + tf(t) = 2f(t) + 5t$ για κάθε $t \in R$.

16. α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = x - e^{-x}$ είναι γνησίως αύξουσα,
β) να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in R$ για τις οποίες η εξίσωση $xe^x = 1+\lambda e^x$ έχει λύση,
γ) να βρεθούν τα σημεία τομής της γ. π. της συνάρτησης $\varphi^{-1}(x)$ με τον x- άξονα.

17. Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z(x) = 1+ (1 - x)i$, $x \geq 1$ και την συνάρτηση
$\Sigma(x) = |z(x)|^2$, $x \geq 1$.
α) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της Σ(x).
β) Να δειχθεί ότι η Σ είναι 1-1 και να βρεθεί η αντίστροφή της .
γ) Από τους μιγαδικούς z(x), $x \geq 1$, να βρεθεί αυτός που απέχει λιγότερο από την αρχή των αξόνων.
δ) Να βρεθούν οι μιγαδικοί οι οποίοι έχουν εικόνες τα κοινά σημεία των Σ , Σ^{-1}.

18. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\alpha e^x + \beta x^{1897} + 1 = 0$, όπου α, β θετικοί αριθμοί έχει μοναδική λύση.

19. Ένας τουρίστας θέλει να περάσει το φαράγγι της Σαμαριάς (ένα από τα θαύματα της φύσης, μην τυχόν και δεν πάτε!...). Ξεκινά μια μέρα στις 8 το πρωί από τον Ομαλό και φτάνει στις 5 το απόγευμα. (της ίδιας μέρας) στην Αγία Ρουμέλη.
Την επαύριον επιστρέφει, ξεκινώντας στις 8 το πρωί από την Αγία Ρουμέλη και φτάνοντας στις 5 το απόγευμα στον Ομαλό. Να δείξετε ότι, υπάρχει κάποιο σημείο της διαδρομής αυτής από το οποίο πέρασε την ίδια χρονική στιγμή και στις δυο πορείες του.

20. Να αποδείξετε ότι: Α. Η εξίσωση $x^3 = 2008$ έχει μοναδική θετική λύση,
Β*. Η εξίσωση $x^\nu = \theta$, $\theta > 0$, $\nu \in N^*$, έχει μοναδική θετική λύση (θεώρημα ύπαρξης ν-οστής ρίζας θετικού αριθμού).

21. Να βρεθούν (όλες) οι συνεχείς συναρτήσεις $y = f(x)$ που ικανοποιούν την σχέση $4x^2 - y^2 = 4$ για κάθε x σε κατάλληλα επιλεγμένο διάστημα.
Τι παριστάνουν γραφικά οι συναρτήσεις αυτές;

22. Φάρμακο χορηγείται σε ασθενή για πρώτη φορά. Έστω $f(t) = 8\ln(t + 1) - 2t + c$ η συνάρτηση που περιγράφει τη συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενούς μετά από χρόνο t από τη χορήγησή του, όπου $t \geq 0$, $c \in R$ σταθερά.
α) Να βρείτε τη συνάρτηση $f(t)$.
β) Να δείξετε ότι κατά τη χρονική στιγμή $t = 8$ υπάρχει ακόμα επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό, ενώ πριν τη χρονική στιγμή $t = 10$ η επίδρασή του στον οργανισμό έχει μηδενιστεί. (Δίνεται $\ln 11 \cong 2{,}4$).

(Πανελλήνιες εξ. 2000)

23*.α) Να αποδειχθεί ότι κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα. β) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $h(t) = t^{2007} - 1707t + 1913$ έχει σύνολο τιμών το R

24.Να εξετάσετε ως προς την συνέχεια την συνάρτηση g με

$$g(x) = \lim_{\nu \to +\infty} \frac{x^{2\nu+1} + x^2}{x^{2\nu} + 1}, \; x \geq 0.$$

25.α) Να δείξετε ότι η παράσταση $\Pi = \dfrac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha^2+\beta^2}$, $\alpha, \beta \in R^*$ έχει μέγιστη τιμή 2. Πότε συμβαίνει αυτό;
β) Έστω f, g συναρτήσεις ορισμένες στο R με $\lim\limits_{x \to \xi}((f(x) + g(x)) = +\infty$, $\xi \in R \cup \{+\infty, -\infty\}$. Να αποδείξετε ότι α) $\lim\limits_{x \to \xi}((f^2(x) + g^2(x)) = +\infty$, β) $\lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{f(x) + g(x)}{f^2(x) + g^2(x)} = 0$.

26. Έστω Σ(x) συνάρτηση συνεχής στο R με την ιδιότητα

$$\Sigma(0) + \Sigma(1) + \Sigma(2) + \Sigma(3) = 2010.$$

α) Να εξετάσετε αν είναι δυνατόν όλοι οι αριθμοί Σ(0), Σ(1), Σ(2), Σ(3) να είναι μικρότεροι του 502,5 .
β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 502,5 είναι τιμή της συνάρτησης Σ.
γ) Να φτιάξετε μια παρόμοια δική σας άσκηση!.

27. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $\kappa, \lambda \in [\alpha, \beta]$. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $(7f(\kappa) + 3f(\lambda))/10$ είναι τιμή της συνάρτησης f. Με ποια επιπλέον (ελάχιστη) υπόθεση η f θα παίρνει την τιμή αυτή μόνο μια φορά;

28*. Έστω φ συνάρτηση ορισμένη στο R. Αν ισχύει $|\varphi(\alpha + 1)| \le \alpha^2$ για κάθε $\alpha \in R$, να βρείτε την τιμή φ(1) και να δείξετε ότι η φ είναι συνεχής στο 1.

Να βρείτε ακόμη το $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\varphi(x)}{x-1}$.

29*. Έστω Σ συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα [0, 1] με Σ(0) = Σ(1).
Να αποδειχθεί ότι

α) η εξίσωση $\Sigma(x) = \Sigma(x + \frac{1}{3})$ έχει λύση στο διάστημα $[0, \frac{2}{3}]$,

β) η εξίσωση $\Sigma(x) = \Sigma(x + \frac{1}{4})$ έχει λύση στο διάστημα $[0, \frac{3}{4}]$.

30*. Να βρεθούν οι συνεχείς στο R συναρτήσεις f με την ιδιότητα $f^2(t) = 2tf(t)$ για κάθε $t \in R$. (Υπόδειξη:σελ.13, 15.Α/ Απ. 0, 2t, t+|t|, t-|t|)

31. Έστω α >1 και φ συνεχής R στο ώστε $\varphi(\chi) \ne \alpha\chi$ για κάθε $\chi \in R$ και $\varphi(1) = \alpha^2$.
α) Να δειχθεί ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης $\varphi(\chi)/\chi$, χ > 0, είναι υποσύνολο του (α, ∞), β) Να βρεθεί το όριο της φ στο +∞.

32*.α) Αν φ συνεχής συνάρτηση στο ξ και $\varphi(\xi) \ne 0$ να δειχθεί ότι $\varphi(x) \ne 0$ κοντά στο ξ.
β) Έστω h συνεχής συνάρτηση στο R τέτοια ώστε h(x)συνx = 0 για κάθε $x \in R$. Να δειχθεί ότι η h είναι η μηδενική συνάρτηση.

33*. Έστω Σ(x) συνάρτηση συνεχής στο R με την ιδιότητα Σ(x)Σ(-x) < 0 για κάθε $x \ne 0$. Τότε Σ(0) = 0. (Υπόδειξη: άτοπος απαγωγή)

34*.Έστω φ συνεχής στο R ώστε $(\varphi(\chi) - e^{\chi})(\varphi(\chi) -1- e^{\chi}) = 0$ για κάθε $\chi \in R$.
Να αποδειχθεί ότι $\varphi(\chi) = e^{\chi}$ για κάθε $\chi \in R$ ή $\varphi(\chi) = 1+ e^{\chi}$ για κάθε $\chi \in R$.
(Υπ. σελ. 14, γενίκευση)

35*. Έστω φ συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [α, β] και 1-1 με φ(α) < φ(β). Να αποδειχθεί ότι για κάθε α < x < β ισχύει φ(α) < φ(x) < φ(β). Ποιο είναι το σύνολο τιμών της φ; (Υπόδειξη: άτοπος απαγωγή, Θ.Ε.Τ.)

36*. Έστω Τ συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [α, β] με Τ(α) = Τ(β). Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν δυο αριθμοί κ, λ∈ [α, β] σε απόσταση ίση με (β - α)/2 τέτοιοι ώστε Τ(κ) = Τ(λ). (Υπ. θεωρούμε το μέσο του [α, β] και μια «καλή» συνάρτηση)

37*.Έστω φ συνεχής συνάρτηση στο R ώστε $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{\varphi(x)}{x^{1913}} = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \frac{\varphi(x)}{x^{1913}} = 0$.
Να δειχθεί ότι η εξίσωση $\varphi(x) + x^{1913} = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση.

38*.Έστω f συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο R και η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ με $\alpha > 0$. Να αποδείξετε ότι α) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \alpha x - \beta) = -\infty$,

β) η C_f έχει μοναδικό σημείο τομής με την ευθεία αυτή. -

* * * *

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ,
ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ
ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

Κοιν.: Προϊστάμενο Επιστημονικής &
Παιδαγωγικής Καθοδήγησης
Δ/θμιας Εκπ/σης Κρήτης.

ΘΕΜΑ: «ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ Μ. Κ.: ΔΙΑΦ. ΛΟΓ. Α΄ ΜΕΡΟΣ»

Συνάδελφοι,

Το διδακτικό αυτό υλικό είναι συνέχεια των δυο προηγουμένων- βελτιωμένων- αρχείων στα Μαθηματικά κατεύθυνσης, που σας έχω ήδη στείλει, και αναφέρεται στο Α΄ μέρος του διαφορικού λογισμού, μέχρι και τα ακρότατα (ενότητες 2.1 - 2.7).Το Β΄ μέρος θα περιλαμβάνει το υπόλοιπο μέρος του διαφορικού λογισμού.

Κοινή σχεδόν είναι η πεποίθηση ότι το σχολικό βιβλίο δεν επαρκεί για να βοηθήσει ουσιαστικά τον καθηγητή που διδάσκει στην Γ΄ Λυκείου και απαιτείται ένα συμπλήρωμα, την στιγμή μάλιστα που δεν υπάρχει αντίστοιχο βιβλίο καθηγητή. Αυτό ακριβώς το συμπλήρωμα προσπαθώ με τις σημειώσεις αυτές να υλοποιήσω, έχοντα κατά νου και την σύσταση του G. Polya, ο οποίος στο περίφημο βιβλίο του «Πώς να το λύσω» γράφει:

«Ο πρώτος κανόνας διδασκαλίας είναι να γνωρίζετε αυτό που πρόκειται να διδάξετε. Ο δεύτερος κανόνας διδασκαλίας είναι να γνωρίζετε λίγο περισσότερα από αυτά που πρόκειται να διδάξετε…»

Υπενθυμίζω ότι οι σημειώσεις αυτές απευθύνονται *μόνο* στους διδάσκοντες το μάθημα. Ευπρόσδεκτες είναι και δικές σας σχετικές παρατηρήσεις και σχόλια που θα μπορούσαν να ενσωματωθούν σε αυτές. Ένα αντίγραφο του αρχείου αυτού να μείνει στο σχετικό φάκελο (υλικό και ηλεκτρονικό) του σχολείου.

Παρατηρήσεις, Συμπληρώσεις, Επισημάνσεις και Ασκήσεις στο πρώτο μέρος του 2ου κεφαλαίου της Ανάλυσης (ενότητες 2.1 - 2.7)

Α. ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ (§ 2.1 - § 2.4)

1. Α.Η παράγωγος μιας συνάρτησης Σ(x) σε ένα σημείο ξ, έχει δυο εκφράσεις-σημασίες (που αντιστοιχούν στις ανάγκες που την γέννησαν) :
α) την *Γεωμετρική*, εκφράζοντας το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης στην γραφική παράσταση της Σ σε μια θέση x = ξ, και
β) την *Φυσική,* εκφράζοντας τον ρυθμό μεταβολής, δηλαδή την «ταχύτητα» του μεγέθους Σ(x) στη θέση ξ.

Ιστορική νύξη: Η παράγωγος και η χρήση της, όπως υπάρχει στα σύγχρονα βιβλία και όχι μόνο (ορισμός κ.λ.π. και μετά εφαρμογές) δεν έχει καμία σχέση με την ιστορική της εξέλιξη, που είναι ακριβώς αντίθετη.
Συνοπτικά μπορούμε να πούμε ότι, σε ένα διάστημα περισσοτέρων των 200 ετών, από τον P. Fermat (1601-1665), ως τον Weierstrass (1815 - 1897), η παράγωγος ακολούθησε την εξής πορεία:
Ο Fermat τη χρησιμοποίησε (ακρότατα κλπ), οι Newton (: κινηματική προσέγγιση) και Leibniz (: γεωμετρική προσέγγιση) την «ανακάλυψαν», οι Taylor, Euler, Maclaurin την ανέπτυξαν, ο Lagrange την ονόμασε και τη χαρακτήρισε και τέλος οι Cauchy και Weierstrass την όρισαν αυστηρά (βλ. περισσότερα στο σχετικό άρθρο του Ευκλείδη Γ΄, τεύχος 67, 2007)

Β. Σχετικά με την πρόταση, ότι κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση είναι και συνεχής, καλό είναι να επισημάνουμε ότι, όχι μόνο δεν ισχύει το αντίστροφο, με το παράδειγμα του βιβλίου, αλλά ακόμη:
α) Η συνέχεια είναι *αναγκαία* (μόνο, όχι ικανή) συνθήκη για την παραγωγισιμότητα.
β) Αν δεν είναι συνεχής στο ξ, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο ξ.
γ) Υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις που ενώ είναι συνεχείς, δεν είναι παραγωγίσιμες, π.χ. $\varphi(\chi) = \alpha + |x - \beta|$, $\alpha, \beta \in R$, $x \in R$.
δ) Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους, αλλά πουθενά παραγωγίσιμες (π.χ. η περίφημη συνάρτηση του K. Weierstrass: «πολύπλοκη», που δίνεται μέσω δυναμοσειράς)
ε) Σε προβλήματα όπου ζητείται να βρεθούν κάποιες παράμετροι ώστε να είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη, εκμεταλλευόμαστε *πρώτα* την συνέχεια και μετά την παραγωγισιμότητα της συνάρτησης.

2. Εφαπτομένη γραφικής παράστασης συνάρτησης.

Α. Το γεωμετρικό χαρακτηριστικό της γραφικής παράστασης (γ. π.) μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης είναι ότι υπάρχει (πλάγια) εφαπτομένη σε κάθε σημείο της γραφικής της παράστασης. Όταν τα πλευρικά όρια του λόγου μεταβολής στο ξ ($(f(x) - f(\xi))/(x - \xi)$), είναι πραγματικοί αριθμοί αλλά όχι ίσοι, αυτό σημαίνει ότι στο σημείο (ξ, f(ξ)) άγονται δυο ημιεφαπτόμενες που δεν είναι αντικείμενες. Αν όμως τα όρια αυτά είναι ίσα, τότε και μόνο, οι ημιεφαπτόμενες είναι αντικείμενες και ορίζουν πλέον την εφαπτομένη της γ. π. στο σημείο αυτό.
Ένα άλλο σημείο που πρέπει να επισημανθεί είναι ότι, για μια συνεχή συνάρτηση σε ένα διάστημα, οι εφαπτόμενες είναι δυο ειδών. Αυτές που έχουν συντελεστή διεύθυνσης

- όταν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη - και τέμνουν τον ψ - άξονα και αυτές που είναι παράλληλες στον ψ-άξονα (κατακόρυφες). Αυτές δεν έχουν συντελεστή διεύθυνσης – σε ελεύθερη γλώσσα έχουν $\pm\infty$, δηλαδή η παράγωγος είναι ίση με $\pm\infty$ - και έχουν παραλειφθεί από την διδακτέα ύλη. Το παράδειγμα με την $\sqrt{x}$ στο 0 είναι καλό να γίνει για να φανεί η σημασία των παραπάνω, προκειμένου να γίνει σαφέστερο το θέμα της εφαπτομένης. Αυτό θα βοηθήσει και παρακάτω στην κατανόηση του σημείου καμπής συνάρτησης.

Β. Καλό είναι να υπενθυμίσουμε και την σχέση (κλίση της f στο ξ) $\lambda = f'(\xi) = \varepsilon\varphi\omega$, όπου ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη στη θέση ξ με τον χ- άξονα, $0 \le \omega < 180^o$, $\omega \ne 90^o$. Περιπτώσεις:
$\omega = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = 0$, $f'(\xi) > 0 \Leftrightarrow 0 < \omega < 90^o$, $f'(\xi) < 0 \Leftrightarrow 90^o < \omega < 180^o$.
Για $\omega = 90^o$ («$\varepsilon\varphi 90^o = \pm\infty$») έχομε «άπειρο» συντελεστή, δηλαδή κατακόρυφη εφαπτομένη (εκτός ύλης).

Γ*. Η εφαπτομένη στην γραφική παράσταση (γ. π.) μιας συνάρτησης σε μια θέση ξ, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την προσέγγιση των τιμών της συνάρτησης αυτής κοντά στο ξ, ιδίως όταν η συνάρτηση είναι πολύπλοκη.
Πράγματι, αν f παραγωγίσιμη στο ξ και $y = f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi)$ η εξίσωση της εφαπτομένης της στο ξ τότε $\lim\limits_{x\to\xi}(f(x) - (f'(\xi)(x-\xi) + f(\xi)) = 0$, οπότε για τιμές του x κοντά στο ξ μπορούμε να λάβουμε κατά προσέγγιση $f(x) \approx f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi)$.
Για παράδειγμα, αν θέλουμε να βρούμε την $\sqrt[3]{8,5}$, θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x}$ και την εφαπτομένη της στη θέση ξ = 8. Έτσι μπορούμε, για x = 8,5 να πάρουμε την προσέγγιση $\sqrt[3]{8,5} \approx \dfrac{1}{2\sqrt[3]{8^2}}(8,5-8) + 2 = \dfrac{1}{24} + 2 = 2,041$.
Όσο αφορά πολύ μεγάλες η μικρές τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής, η προσέγγιση μπορεί να γίνει, όπως θα δούμε, με την ασύμπτωτη. Η παρατήρηση αυτή ζωντανεύει ένα από τους ρόλους της εφαπτομένης καμπύλης.

Δ. Ευθεία εφαπτομένη στην γ. π. μιας συνάρτησης f(x).
Μια ευθεία $y = \alpha x + \beta$ είναι εφαπτόμενη στην γ. π. της συνάρτησης f(x), αν και μόνο υπάρχει σημείο (ξ, f (ξ)) της γ. π. της f τέτοιο ώστε $f(\xi) = \alpha\xi + \beta$ και $\alpha = f'(\xi)$. Η λύση του συστήματος αυτού (ανάλογα με το ζητούμενο) δίνει συνήθως την απάντηση σε πολλά (μη τετριμμένα) σχετικά προβλήματα με εφαπτόμενες.

3. Οι τύποι παραγώγισης μπορεί να χρησιμοποιηθούν (στις ασκήσεις) και για τον υπολογισμό ορίων:
π.χ. το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^{2008} - 1}{h}$ είναι η παράγωγος της συνάρτησης $\varphi(\lambda) = \lambda^{2008}$ στο 1, δηλαδή $\varphi'(1) = 2008\cdot 1^{2007} = 2008$.

4. Να χρησιμοποιούμε και συναρτήσεις με ανεξάρτητο μεταβλητή διάφορη από το x, ιδιαίτερα στις παραγωγίσεις, π.χ. να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης
$\varphi(y) = x\eta\mu 2y - ye^{xy}$, $y\in R$, στη θέση y = 0, $x\in R$, να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων $\Sigma(t) = 2\alpha^3t^2 + \ln(t - 2\alpha)$, $T(\alpha) = 2\alpha^3t^2 + \ln(t - 2\alpha)$, $f(y) = 2e^{2y}\eta\mu(xy) + xy^3$, $Q(P) = 3P^3 - 2P^2 + xP - y$ κλπ.
Αυτό θα βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα την παραγώγιση (και όχι μόνο) και θα τους προετοιμάσει ώστε στις μετέπειτα Μαθηματικές τους σπουδές να

περάσουν ομαλά στις μερικές παραγώγους των συναρτήσεων δυο ή περισσοτέρων μεταβλητών.

Εδώ πρέπει να επισημάνουμε ότι οι κανόνες παραγώγισης εφαρμόζονται κάθε φορά *ως προς το γράμμα που δηλώνει την ανεξάρτητη μεταβλητή στην συγκεκριμένη συνάρτηση* (οπότε τα άλλα παριστάνουν σταθερές), που στη περίπτωση του σχ. βιβλίου είναι πάντα – κακώς- το x (και εννοείται!).

5. Συνέχεια της Παραγώγου

Α. Η παράγωγος μιας συνάρτησης δεν είναι πάντα συνεχής συνάρτηση.

π.χ. η παράγωγος της συνάρτησης (βλ. σχ. βιβλίο σελ. 292, άσκ. 10)

$\Sigma(x) = x^2 \eta\mu \frac{1}{x}$, για $x \neq 0$ και $\Sigma(0) = 0$ είναι η $\Sigma'(x) = 2x\eta\mu \frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}$, για $x \neq 0$ και

$\Sigma'(0) = 0$, η οποία δεν είναι συνεχής (ο μειωτέος έχει όριο 0, ενώ δεν υπάρχει για τον αφαιρετέο στο 0).

Β.Μια περίπτωση συνέχειας της παραγώγου σε σημείο, που είναι χρήσιμο να έχουμε υπόψη: αν f συνεχής στο (α, β) και παραγωγίσιμη στο $(\alpha, \xi)\cup(\xi, \beta)$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to\xi} f'(x) = \kappa \in R$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο ξ (η απόδειξη γίνεται με τη βοήθεια του Θ.Μ.Τ. αλλά μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ο κανόνας De L' Hospital).

6*. Για την παράγωγο μιας συνάρτησης σ' ένα διάστημα ισχύει το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών (Θεώρημα Darboux, βλ. ασκ.42(γ)) αν και η παράγωγος δεν είναι πάντα συνεχής συνάρτηση.

Μια συνέπεια του θεωρήματος αυτού είναι ότι, μεταξύ δυο ετεροσήμων τιμών της παραγώγου, η παράγωγος μηδενίζεται σ' ένα τουλάχιστον σημείο. Επίσης, αν η παράγωγος σ' ένα διάστημα δεν μηδενίζεται, τότε διατηρεί πρόσημο, δηλαδή η συνάρτηση είναι γν. μονότονη.

Μια άλλη συνέπεια του θεωρήματος αυτού, είναι ότι η παράγωγος μιας συνάρτησης, αν δεν είναι συνεχής, δεν παρουσιάζει «απλές» ασυνέχειες (που μπορούν να αρθούν), αλλά «ουσιώδεις», π.χ. το όριο του λόγου μεταβολής δεν υπάρχει.

7. Αν θ γωνία σε μοίρες τότε $(\eta\mu\theta)' = \frac{\pi}{180}\sigma\upsilon\nu\theta$, $(\sigma\upsilon\nu\theta)' = -\frac{\pi}{180}\eta\mu\theta$.

(βλ. σελίδα 156 οδηγιών Π.Ι. 2003-2004)

Η παρατήρηση αυτή είναι χρήσιμο να αναφερθεί στους μαθητές: θα τους αποτρέψει π.χ. σε προβλήματα με ρυθμό μεταβολής γωνιών να χρησιμοποιούν μοίρες πριν παραγωγίζουν.

8*. Παράγωγος εκθετικής και λογαριθμικής.

Η συνέχεια και η παραγωγισιμότητα των συναρτήσεων e^x, lnx, δεν αποδεικνύονται στο σχ. βιβλίο. Ο αυστηρός ορισμός και η μελέτη των συναρτήσεων αυτών είναι θέμα ανωτέρων Μαθηματικών, αλλά λόγω των εφαρμογών τους υπάρχουν στη σχολική ύλη. Πάντως η επόμενη άσκηση υποδεικνύει ένα τρόπο για την απόδειξη αυτών των ιδιοτήτων, ο οποίος στηρίζεται σε μια πολύ καλή ανισότητα (η οποία προκύπτει γεωμετρικά αν οριστεί ο λογάριθμος με ένα ορισμένο τρόπο, διαφορετικό από τον γνωστό) την οποία βέβαια θα θεωρήσουμε εδώ δεδομένη.

Άσκηση: Δεδομένου ότι $1-\frac{1}{x} < \ln x < x - 1$ με $0 < x \neq 1$ ισχύουν

α) $1+ x < e^x < 1+ xe^x$, $x\in (-1, 0) \cup(0, 1)$

β) Η lnx, $x > 0$ είναι συνεχής στο 1 και η e^x συνεχής στο 0,

γ) Η $\ln x$, $x > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο 1 και η e^x στο 0,

δ) Οι συναρτήσεις $\ln x$, $x > 0$, e^x, $x \in R$ είναι παραγωγίσιμες και ισχύουν

$$(\ln x)' = \frac{1}{x},\ x > 0,\ (e^x)' = e^x,\ x \in R.$$

9. Ισχυρισμός: *μια εφαπτομένη της γ. π. μιας συνάρτησης μπορεί να έχει περισσότερα του ενός κοινά σημεία με αυτήν.*

Είναι αληθής: ο αναλυτικός ορισμός της εφαπτομένης δεν επαληθεύει πάντα την γνωστή μας γεωμετρική εικόνα που έχουμε για τις εφαπτομένης γνωστών αλγεβρικών κυρίως καμπυλών (π.χ. κύκλου, παραβολής, έλλειψης κλπ) να έχουν δηλαδή μοναδικό κοινό σημείο με την καμπύλη, το σημείο επαφής.

Έτσι π.χ. η γ. π. της συνάρτηση $g(t) = \eta\mu t$, $t \in R$, έχει στη θέση $\pi/2$ εφαπτομένη την ευθεία $y = 1$, η οποία έχει άπειρα κοινά σημεία με την γ. π.($\eta\mu t = 1$). Αυτό μπορεί να συμβεί και οσοδήποτε κοντά της θέσης που υπάρχει εφαπτομένη, π.χ. η συνάρτηση (βλ. σχ. βιβλίο, σελ.292, ασκ.10)

$\Sigma(x) = x^2 \eta\mu \frac{1}{x}$, για $x \neq 0$ και $\Sigma(0) = 0$ έχει εφαπτομένη στη θέση 0, την $y = 0$ η οποία έχει άπειρα κοινά σημεία ($1/\kappa\pi$) κοντά στο 0 με την γ. π. της Σ.

Πάντως μια ικανή συνθήκη για να μην έχει η εφαπτομένη δεύτερο κοινό σημείο με την γ. π. είναι η συνάρτηση να είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο 1-1 (π.χ. σε κυρτή ή κοίλη συνάρτηση) (βλ. άσκηση 22) .

10. *Σχετικά με το ρυθμό μεταβολής:* είναι χρήσιμο να υπενθυμίσουμε προκαταβολικά στους μαθητές, τους τύπους τους σχετικούς με μεγέθη στο τρίγωνο, ορθογώνιο, κύβο, παραλληλεπίπεδο, κύκλο, σφαίρα, κύλινδρο, κώνο, καθώς και ότι μπορεί να απαιτηθεί το πυθαγόρειο θεώρημα αλλά και ομοιότητα τριγώνων.

Επίσης στα σχετικά προβλήματα το πρώτο βήμα πρέπει να είναι η αναγραφή των δεδομένων και των ζητούμενων σε Μαθηματική γλώσσα (εξισώσεις).

Σχετικά με τα προβλήματα ταχύτητας και επιτάχυνσης, παρόλο που δεν συνηθίζονται – κακώς- πολύ στα σχολικά Μαθηματικά, ας έχουμε υπόψη τα εξής:

Έστω ένα κινητό που κινείται σε ένα άξονα και $x = x(t)$ η θέση του την χρονική στιγμή t, $\upsilon = \upsilon(t) = x'(t)$ η ταχύτητά του και $\alpha = \alpha(t) = \upsilon'(t)$ η επιτάχυνσή του. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i. Η ταχύτητα $\upsilon > 0$ (δηλαδή η απομάκρυνση $x(t)$, από την αρχή $x(0)$, αυξάνει) τότε:

Αν $\alpha > 0$ (δηλαδή το μέτρο $|\upsilon(t)|$ της ταχύτητας υ αυξάνει) η κίνηση είναι *επιταχυνόμενη,* ενώ αν $\alpha < 0$ (δηλαδή το μέτρο της ταχύτητας ελαττώνεται) η κίνηση είναι *επιβραδυνόμενη*.

ii. Αν $\upsilon < 0$ (δηλαδή η απομάκρυνση $x(t)$ ελαττώνεται) τότε, αν $\alpha > 0$ η ταχύτητα αυξάνει, αλλά λόγω $\upsilon < 0$ το μέτρο της $(-\upsilon)$ ελαττώνεται, δηλ. η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη, ενώ αν $\alpha < 0$ η κίνηση είναι επιταχυνόμενη.

Τελικά αν $\alpha\upsilon > 0$ έχομε επιταχυνόμενη κίνηση και αν $\alpha\upsilon < 0$ επιβραδυνόμενη.

Έτσι, π.χ. στην κατακόρυφη βολή σώματος προς τα άνω (αρχή το σημείο βολής και φορά προς τα άνω) η ταχύτητα $\upsilon(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα, αφού $\upsilon'(t) = \alpha(t) = -g < 0$.

Επομένως: Όταν το σώμα ανέρχεται, επειδή $\upsilon(t)>0$ είναι *$\alpha\upsilon < 0$*, οπότε η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη, ενώ όταν το σώμα κατέρχεται, επειδή $\upsilon(t) < 0$ και η (προσημασμένη) ταχύτητα φθίνει, το μέτρο $|\upsilon(t)| = -\upsilon(t)$ αυξάνει, δηλ. η κίνηση είναι επιταχυνόμενη (*$\alpha\upsilon$* >0).

Β. ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΤΟΥ Δ. Λ. (§ 2.5 - § 2.6)

11. Θεώρημα Rolle (Michel Rolle (1652-1719), Γάλλος. Το Θεώρημα δημοσιεύτηκε το 1691 για πολυωνυμικές συναρτήσεις).

11.α. Λόγω της παραγωγισιμότητας της συνάρτησης στο εσωτερικό του (α, β) η υπόθεση της συνέχειας της συνάρτησης στο [α, β] θα μπορούσε να αντικατασταθεί με την συνέχεια μόνο στα α, β. Παραδοσιακά όμως το θεώρημα διατυπώνεται με τον τρόπο αυτό.

11.β. Η συνθήκη f(α) = f(β) εξασφαλίζεται πολλές φορές όταν α, β ρίζες της f, ιδίως σε πολυώνυμα. Ειδικότερα προκύπτει ότι, αν ένα πολυώνυμο (με συντελεστές πραγματικούς), έχει $\kappa \geq 2$ διαδοχικές (διαφορετικές) πραγματικές ρίζες $\rho_1 < \rho_2 < \ldots < \rho_\kappa$ τότε η παράγωγός του έχει τουλάχιστον κ-1 διαφορετικές ρίζες (αν υπάρχει πολλαπλή ρίζα τότε αυτή είναι και ρίζα της παραγώγου) οι οποίες βρίσκονται μεταξύ των παραπάνω ριζών του πολυωνύμου (Άσκηση).

11.γ*. Η απόδειξη του Θ. Rolle στηρίζεται στην παρατήρηση ότι, η f ως συνεχής στο [α, β] έχει ολικό μέγιστο ή ελάχιστο και λόγω f(α) = f(β), αν δεν είναι σταθερή, ένα από τα δυο ακρότατα αυτά, είναι σε σημείο του (α, β). Άρα (Θ. Fermat) είναι ρίζα της παραγώγου στο (α, β). Μ' άλλα λόγια το συμπέρασμα του Θ. Rolle θα μπορούσε να διατυπωθεί: «υπάρχει σημείο του (α, β) όπου μηδενίζεται η παράγωγος και το οποίο είναι συγχρόνως θέση ολικού ακρότατου»

11.δ. Όλες οι υποθέσεις του Θ. Rolle είναι εντελώς απαραίτητες, για να ισχύει το συμπέρασμά του. Αυτό αναδεικνύεται με κατάλληλα παραδείγματα. Έτσι, π.χ. η συνέχεια στα άκρα δεν μπορεί να παραλειφθεί: π. χ. η συνάρτηση

$\varphi(\chi) = \chi^3$, αν $\chi \in (0, 1)$ και $\varphi(0) = \varphi(1) = 2009$,

είναι ορισμένη στο διάστημα [0, 1], παραγωγίσιμη στο (0, 1), όχι συνεχής στα σημεία 0, 1 και ισχύει φ(0) = φ(1).

Αν υπήρχε $\xi \in (0, 1)$ με $\varphi'(\xi) = 0$ τότε $3\xi^2 = 0$ ή $\xi = 0 \notin (0, 1)$, άτοπο (στο 0 δεν παραγωγίζεται).

11.ε. Το αντίστροφο του Θ. Rolle γενικά δεν ισχύει. Έτσι οι υποθέσεις του Θ. Rolle είναι *ικανές* αλλά όχι *αναγκαίες* για να ισχύει το συμπέρασμά του. Ας δούμε δυο περιπτώσεις

- Αν η είναι f συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) και μηδενίζεται η παράγωγος σε εσωτερικό του (α, β), τότε δεν ισχύει (πάντα) f(α) = f (β).
  Τέτοιο αντιπαράδειγμα μας παρέχει π.χ. η συνάρτηση $\varphi(\chi) = \chi^2$, $\chi \in [-1, 2]$.

- Επίσης, μπορεί να μηδενίζεται η παράγωγος μιας συνάρτησης f σε εσωτερικό του (α, β) και παρόλο που είναι συνεχής στο [α, β] και ισχύει f(α) = f(β), να μην παραγωγίζεται στο (α, β).
  Αυτό συμβαίνει π.χ. με την συνάρτηση
  $\Sigma(\chi) = 2 - (\chi - 1)^2$ για $\chi \geq 0$ και $\Sigma(\chi) = 2 - (\chi + 1)^2$ για $\chi < 0$, στο διάστημα [-2, 2].
  Είναι συνεχής στο διάστημα [-2, 2] με Σ(-2) = Σ(2) = 1. Η παράγωγος μηδενίζεται στο σημείο 1 (και -1) όμως δεν παραγωγίζεται στο 0 .

11.στ. Πόρισμα του Θ. Rolle.

Αν η f ′ δεν μηδενίζεται στο (α, β) τότε η f είναι 1-1 (Άσκηση). (Σίγουρα είναι και γν. μονότονη, αλλά αυτό το θεώρημα δεν υπάρχει στο σχ. βιβλίο (βλ. παρακάτω παρ. 29 (β)).

11.ζ. Γενίκευση Θ. Rolle : Αν f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο (α, β) και

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = \lim_{x\to\beta^-} f(x) = k \in R \cup \{-\infty, +\infty\}, \text{ τότε υπάρχει } \xi\in(\alpha, \beta) \text{ με } f'(\xi) = 0.$$

(Υπ.Αν $k\in R$, θέτουμε $f(\alpha) = \lim_{x\to\alpha^+} f(x)$, $f(\beta) = \lim_{x\to\beta^-} f(x)$ οπότε η f είναι συνεχής στο [α, β] κλπ. Αν $k=+\infty$, τότε θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x) = e^{-f(x)}$, $\alpha \le x \le \beta$ με $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$ κλπ, ενώ αν $k= -\infty$, την $\Sigma(x) = e^{f(x)}$ με $\Sigma(\alpha) = \Sigma(\beta) = 0$, $\alpha \le x \le \beta$ κλπ)

Δυνατότητες του Θ. Rolle:

i) Εξασφαλίζει ρίζα για μια συνάρτηση (που είναι παράγωγος μιας άλλης) σε θεωρητικά και μη θέματα.
ii) Εξασφαλίζει ρίζες για την παράγωγο μιας συνάρτησης οι οποίες βρίσκονται μεταξύ των ριζών της συνάρτησης αυτής.
iii) Μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε προβλήματα που ζητείται να δειχθεί ότι μια συνάρτηση έχει το πολύ 2, 3,… ρίζες (αποκλείοντας να ’χει 3, 4,…αντίστοιχα).

12. Θεώρημα Μέσης τιμής του Δ. Λ (ή θεώρημα Lagrange (1736-1813)

12.α. Εκτός από την γνωστή γεωμετρική ερμηνεία, το Θ.Μ.Τ. έχει και φυσική ερμηνεία - σημασία : υπάρχει (εσωτερική) θέση ξ όπου ο ρυθμός μεταβολής του μεγέθους y = f(t) είναι ίσος με την *μέση τιμή του* μεγέθους y = f(χ) στο διάστημα [α, β], δηλαδή η παράγωγος «δεν ξεχνά» την μέση τιμή της $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ (από την οποία «προήλθε»).

Αυτό φαίνεται και στην 3 της σελίδας 248.

Β*. *Σχετικά με την ονομασία «Μέση τιμή».*

Στο ενδεχόμενο ερώτημα, αν σχετίζεται ο λόγος $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ με τον Στατιστικό ορισμό της μέσης τιμής - γεγονός που θα δικαιολογούσε και διαφορετικά την ονομασία του θεωρήματος - ισχύει ότι: Ας θεωρήσουμε την f παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β] (στις εφαρμογές αυτό είναι σχεδόν πάντα δεδομένο).

Χωρίζουμε το διάστημα [α, β] σε ν ισομήκη διαστήματα, πλάτους Δχ = (β-α)/ν. Αν επιλέξουμε τυχαία σημεία ξ_κ , κ = 1, 2,…,ν των διαστημάτων αυτών (όπως στο ολοκλήρωμα Riemann), τότε το όριο της *μέσης τιμής των αντιστοίχων τιμών της f′ (ή* κλίσεων), που μπορούμε να λέμε κατ’ επέκταση *μέση τιμή της παραγώγου στο διάστημα [α, β]* , συμβολικά $\overline{f'}$, είναι ίσο με τον παραπάνω λόγο, δηλαδή

$$\lim_{\nu\to+\infty} \frac{\sum_{\kappa=1}^{\nu} f'(\xi_\kappa)}{\nu} = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \quad \text{ή} \quad \overline{f'} = f'(\xi)$$

(βλ. σχετικό άρθρο στο περιοδικό Ευκλείδη Γ΄, τεύχος 67, 2007)

12.γ. Μια άλλη συνέπεια του Θ. Μ. Τ. για μια συνάρτηση f στο διάστημα [α, β] είναι ότι, ο αριθμός $\mu = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης f΄ στο (α, β), δηλ. $\mu \in f'((\alpha, \beta))$.

12.δ. Το Θ.Μ.Τ. είναι γενίκευση του Θ. Rolle, αφού όταν f(α) = f (β) προκύπτει το συμπέρασμα του Θ. Rolle .
Αντίστροφα: με βάση το Θ. Rolle αποδεικνύεται το Θ.Μ.Τ.
Πράγματι, αρκεί να θεωρήσουμε την συνάρτηση $g(x) = f(x) - \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}x$, $x \in [\alpha, \beta]$ (να διδαχθεί, ως άσκηση).

12.3. Ενδιαφέροντα είναι τα πορίσματα και όταν $f(\alpha) \neq f(\beta)$.Έτσι

- Αν $f(\alpha) < f(\beta)$ («η f ανέρχεται στο [α, β]») τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $f'(\xi) > 0$
- Αν $f(\alpha) > f(\beta)$ («η f κατέρχεται στο [α, β]») τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $f'(\xi) < 0$

(έχουν εφαρμογή σε πολλές ασκήσεις)

13. Το Θ.Μ.Τ είναι το βασικότερο θεώρημα του διαφορικού λογισμού. Με βάση αυτό αποδεικνύεται το σπουδαίο θεώρημα της μονοτονίας και άλλα σημαντικά θεωρήματα. Έτσι όλα τα επόμενα θεωρήματα που απορρέουν από αυτό *κληρονομούν τις υποθέσεις του Θ. Μ. Τ.: συνεχής σε διάστημα και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του*. Προφανώς μια ενδεχόμενη υπόθεση η συνάρτηση να είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα καλύπτει (με το παραπάνω) τις υποθέσεις αυτές.

14. Γενικεύσεις του Θ.Μ.Τ:
Α. Αν f παραγωγίσιμη στο (α, β) και τα όρια $A = \lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x)$, $B = \lim\limits_{x \to \beta^-} f(x)$ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $\dfrac{B-A}{\beta-\alpha} = f'(\xi)$.
(απόδειξη όπως στη γενίκευση του Θ. Rolle).

Β. Θεώρημα Μέσης τιμής του Cauchy (βλ. άσκηση 24).

15. Το Θ.Μ.Τ. χρησιμεύει και στην *παραγωγή ανισοτήτων*:

- Αν η f΄ είναι, π.χ. γν. αύξουσα στο [α, β] , τότε $f'(\alpha) < \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \leq f'(\beta)$.
- Αν η f΄ είναι συνεχής στο [α, β] τότε $f'_{\varepsilon\lambda.} \leq \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \leq f'_{\mu\varepsilon\gamma.}$.

16. Α.Μια άσκηση-λήμμα σχετική με το πόρισμα της σελίδας 251 είναι:
$\varphi = \gamma$ αν και μόνο ($\varphi' = \gamma'$ και $\varphi(\kappa) = \gamma(\kappa)$).
Η άσκηση αυτή έχει εφαρμογή σε προβλήματα εύρεσης συναρτήσεων σε «ολοκληρωτικές εξισώσεις», (βλ. σχετικά: διδακτικό υλικό Ολοκληρώματα σελ.) και καλό να επισημανθεί αυτό στους μαθητές.
Β.Το θεώρημα της σελ.251 και ιδιαίτερα το πόρισμα χρησιμοποιούνται σε προβλήματα *εύρεσης* συνάρτησης. Χρήσιμο μεθοδολογικά είναι να επισημάνουμε ακόμη εδώ ότι

$x\varphi'(x) + \varphi(x) = (x\varphi(x))'$, $(x\varphi'(x) - \varphi(x)) / x^2 = (\varphi(x)/x)'$.
Επίσης ότι ο πολλαπλασιασμός της $[\varphi'(x) + \varphi(x)]$ με e^x δίνει την παράγωγο $(e^x\varphi(x))'$, ενώ η διαίρεση της $[\varphi'(x) - \varphi(x)]$ με e^x δίνει την $(\varphi(x)/e^x)'$.

17. Η εφαρμογή της σελ.252 είναι αξιοσημείωτη και γενικεύεται ως εξής: να βρεθούν οι συναρτήσεις με την ιδιότητα $f'(x) = \lambda f(x)$ (θεμελιώδης διαφορική εξίσωση) .

$$f'(x) - \lambda f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-\lambda x} f'(x) - \lambda e^{-\lambda x} f(x) = 0 \text{ ή } (e^{-\lambda x} f(x))' = 0 \text{ κλπ.}$$

(ο $e^{-\lambda x}$ λέγεται *ολοκληρωτικός παράγοντας* και είναι χρήσιμος σε πολλά θέματα ολοκλήρωσης)

18.α. Το θεώρημα της σελίδας 251 μπορούμε να το καλούμε «θεώρημα της μονοτονίας» Το αντίστροφο του θεωρήματος θα διατυπωθεί (προφανώς) με δεδομένο ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του. Ιδιαίτερη επισήμανση στο σχόλιο της σελ.254 που συνοδεύει το θεώρημα και αναφέρεται στο αντίστροφό του. Εκτός από το αντιπαράδειγμα του σχολίου αυτού, μπορούμε να δώσουμε και την συνάρτηση $\varphi(\omega) = \omega + \eta\mu\omega$, η οποία είναι γν. αύξουσα στο R, αλλά η παράγωγός της μηδενίζεται σε άπειρα σημεία ($(2\kappa+1)\pi$, $\kappa\in Z$) (επί πλέον στις θέσεις $\kappa\pi$, $\kappa\in Z$ έχει σημεία καμπής).
β. Σχετικά ας έχουμε ακόμη υπόψη και το εξής:
Έστω Σ συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του. Αν η Σ είναι *αύξουσα* στο Δ τότε $\Sigma'(\chi) \geq 0$ για κάθε $\chi \in$ εσ(Δ) και αντιστρόφως (απόδειξη με βάση θεώρημα διάταξης στα όρια και το Θ.Μ.Τ). Αν βέβαια η Σ είναι γν. αύξουσα στο Δ, τότε και πάλι $\Sigma'(\chi) \geq 0$ για κάθε $\chi\in$εσ(Δ) (και επί πλέον δεν υπάρχει υποδιάστημα του Δ όπου η Σ είναι σταθερή, δηλαδή τα σημεία μηδενισμού της Σ΄ είναι σε διακεκριμένες θέσεις, πεπερασμένου πλήθους ή μη).

Γ. ΑΚΡΟΤΑΤΑ (§ 2.7)

19. Στον ορισμό του τοπικού ακρότατου (σχ. βιβλίο) :

«Λέμε ότι η συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού το σύνολο Α, παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο (αντίστοιχα τοπικό ελάχιστο) όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε
$f(x) \leq f(x_0)$ (αντίστοιχα $f(x) \geq f(x_0)$) για κάθε $x\in A\cap(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$».

α) Η τομή $A\cap(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ μπαίνει για καλύψει την περίπτωση τοπ. ακρότατου σε άκρο διαστήματος (ανεξαρτήτως της συνέχειας).
Έτσι π.χ. αν A = [1, 4] και ισχύει $f(x) \leq f(1)$ για κάθε $x\in A\cap(1-2, 1+2) = [1, 3)$, τότε η f παρουσιάζει στο 1 τοπικό μέγιστο.

β) Αν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο διαστήματος, τότε, επειδή υπάρχει πάντα $\varepsilon > 0$ με $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq A$, θα έχουμε $A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = (x_0 - \theta, x_0 + \theta) \subseteq A$ κλπ
(το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων μας είναι πάντα διάστημα ή ένωση διαστημάτων)
Ας σημειωθεί ότι μια σταθερή συνάρτηση σ' ένα διάστημα έχει σε κάθε σημείο τοπικό και ολικό ελάχιστο και μέγιστο (και αντίστροφα).

20. Σχετικά με τα τοπικά ακρότατα, χρήσιμο είναι να επισημαίνουμε (με απλά γραφήματα, αλλά και σε κάθε ευκαιρία όταν κάνουμε την μελέτη μιας συνάρτησης) ότι για μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα:

- κάθε ολικό μέγιστο (ελάχιστο) είναι και τοπικό μέγιστο (αντίστοιχα, ελάχιστο) και είναι μεγαλύτερο (μικρότερο) ή ίσο από τα τοπικά μέγιστα (ελάχιστα αντίστοιχα), αν υπάρχουν. Κάθε όμως τοπικό μέγιστο (ελάχιστο) δεν είναι και ολικό μέγιστο (ελάχιστο αντίστοιχα).
- Ένα τοπικό μέγιστο (ελάχιστο) μπορεί να είναι μικρότερο (μεγαλύτερο) από ένα τοπικό ελάχιστο (μέγιστο, αντίστοιχα)

Τα *ολικά ακρότατα* μιας συνεχούς συνάρτησης, ορισμένης σε ανοικτό διάστημα είναι προτιμότερο να προσδιορίζονται μέσω του συνόλου τιμών της συνάρτησης χρησιμοποιώντας το θεώρημα συνέχειας και μονοτονίας, είτε εργαζόμενοι αλγεβρικά (ορισμένες φορές είναι προτιμότερο αυτό). Αν η συνάρτηση είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα τότε ακολουθούμε το σχόλιο της σελίδας 264.

21. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνεχούς συνάρτησης σ' ένα *ανοικτό* διάστημα δεν είναι (ολικό) μέγιστο. Όμοια, το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μιας (συνεχούς) συνάρτησης σ' ένα ανοικτό διάστημα δεν είναι (ολικό) ελάχιστο.
Για παράδειγμα η συνάρτηση

$$\Sigma(\chi) = \frac{1}{\chi} \text{ αν } 0 < \chi < 1,\ \Sigma(\chi) = \chi \text{ αν } 1 \le \chi \le 2 \text{ και } \Sigma(\chi) = \frac{4}{\chi} \text{ αν } \chi > 2.$$

Έχει τοπικό μέγιστο στο 2 ίσο με 2 αλλά δεν έχει ολικό. Επίσης έχει τοπικό ελάχιστο για $\chi = 1$ ίσο με 1 αλλά δεν είναι ολικό. Αυτά συμβαίνουν επειδή η Σ έχει σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$. Αν όμως μια συνάρτηση είναι συνεχής σε *κλειστό* διάστημα, τότε το μεγαλύτερο (αντίστοιχα μικρότερο) από τα τοπικά μέγιστα (ελάχιστα) είναι μέγιστο (ελάχιστο), επειδή τότε σίγουρα έχει μέγιστο και ελάχιστο.

22. θεώρημα του Fermat (Pierre de Fermat (1601-1665), Γάλλος).
Το θεώρημα του Fermat είναι ένα πολύ σπουδαίο θεώρημα της Ανάλυσης, γιατί ρίχνει ένα, έστω αμυδρό, φως στο «σκοτάδι» των τοπικών ακροτάτων. Και λέμε αμυδρό, για τους εξής λόγους, που πρέπει να επισημάνουμε ιδιαίτερα.
α) Αναφέρεται μόνο σε εσωτερικά σημεία και όχι άκρα διαστήματος,
β) Αφορά μόνο σε σημεία που η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη,
γ) δίνει μια αναγκαία μόνο συνθήκη για την ύπαρξη ακρότατου. Η συνθήκη $f'(x_0) = 0$ είναι *αναγκαία, όχι ικανή για τοπικό ακρότατο* (εδώ φαίνεται η ανάγκη ενός ακόμη σχετικού θεωρήματος εξασφάλισης ακροτάτων).
Π.χ. η συνάρτηση $\varphi(x) = x^3$, $x \in (-\infty, +\infty)$, έχει $\varphi'(0) = 0$, $0 \in (-\infty, +\infty)$, που δεν είναι θέση τοπ. ακρότατου.
Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στα σχόλια του θεωρήματος (σελ. 261).

- Αν το τοπικό ακρότατο είναι σε άκρο του διαστήματος [α, β] και η f είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, τότε: αν π.χ. α θέση τ. μεγίστου ισχύει $f'(\alpha) \le 0$, ενώ αν α θέση τ. ελαχίστου τότε $f'(\alpha) \ge 0$. Ανάλογα και για το β. (επαληθεύονται και γεωμετρικά).
  (απόδειξη: εργαζόμαστε όπως στην απόδειξη του Θ.Fermat).
  Η παρατήρηση αυτή οδηγεί σε ένα τρόπο απόδειξης του Θ.Darboux (βλ. άσκ. 40 (γ))

23. Το θεώρημα της σελίδας 262 είναι βολικό να το καλούμε ως *«κριτήριο ακροτάτων»* και να γίνει η απόδειξη του (i) ή του (ii) χάριν ασκήσεως (κανονικά αυτό είναι το 1° κριτήριο ακροτάτων, αλλά το 2° κριτήριο ως γνωστό έχει παραλειφθεί). Ιδιαίτερη βαρύτητα όμως πρέπει να δοθεί και στο μέρος (iii) του θεωρήματος και να υπογραμμιστεί από τους μαθητές στο βιβλίο τους. Είναι χρησιμότατη πρόταση.
Ας σημειωθεί ότι, όπως διατυπώνεται το θεώρημα αυτό, το τοπικό μέγιστο και ελάχιστο είναι και ολικό στο (α, β). Γενικά βέβαια θα είναι τοπικό, αφού μπορεί να υπάρχει και άλλο διάστημα στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, οπότε ενδέχεται να είναι άλλο ολικό ή να μην υπάρχει ολικό ακρότατο.

24. Να επισημανθεί ότι η ανισότητα $\ln x \le x - 1$, $x > 0$, με ισότητα μόνο για $x = 1$, της εφαρμογής 2 (σελ. 266) μπορεί να χρησιμοποιείται στις ασκήσεις (ως γνωστό αυτό ισχύει για όλες τις εφαρμογές του βιβλίου και να υπενθυμιστεί στους μαθητές). Από αυτήν θέτοντας όπου x το 1/x προκύπτει και η $1 - \frac{1}{x} \le \ln x$, $x > 0$, (με ισότητα μόνο για $x = 1$). Επίσης εύκολα προκύπτει και η χρήσιμη ανισοταυτότητα $e^x \ge 1+ x$, $x \in R$ (για $1 + x < 0$ είναι προφανής). Αυτές τις ανισοτικές σχέσεις, μαζί με την αλγεβρική $\theta + \frac{1}{\theta} \ge 2$, $\theta > 0$, είναι πολύ χρήσιμο να τις ξέρουν οι μαθητές (παρά το κόστος να αποδείξουν τις $1 - \frac{1}{x} \le \ln x$, $e^x \ge 1+ x$, αν τις χρησιμοποιήσουν!).

25. Σχετικά με την άσκηση 6 σελ.270 (παρουσιάζει ενδιαφέρον). Καλύτερα να μην ακολουθήσουμε την υπόδειξη του βιβλίου. Η παραγώγιση δίνει
$f'(x) = 2(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)Q(x)$, όπου
$Q(x) = (x - \beta)(x - \gamma) + (x - \alpha)(x - \gamma) + (x - \alpha)(x - \beta)$, $\alpha < \beta < \gamma$.
Έτσι φανερά η $f'(x)$ έχει τις ρίζες α, β, γ και το τριώνυμο Q(x), λόγω
$Q(\alpha) = (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) > 0$, $Q(\beta) = (\beta - \alpha)(\beta - \gamma) < 0$ $Q(\gamma) = (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) > 0$, έχει (Θ. Bolzano) δυο ρίζες, ανά μια στα διαστήματα (α, β), (β, γ) (ακριβώς, λόγω τριωνύμου, χωρίς μονοτονία).
Άρα η $f'(x)$ ακριβώς 5 ρίζες. Όσο αφορά το πρόσημο της $f'(x)$ φτιάχνουμε ένα πίνακα με τις 5 ρίζες της και με δυο γραμμές, όπου στην μια υπάρχει το πρόσημο του παράγοντα $2(x - \alpha)(x - \beta)(x - \beta$ (εύκολο) και στην άλλη το πρόσημο του Q(x) (με βάση τα γνωστά για το πρόσημο τριωνύμου) και έτσι εύκολα συνάγουμε ότι την μονοτονία και τα ακρότατα της f(x) (στα α, β, γ τ. ελάχιστα και στις ρίζες του Q(x) τ. μέγιστα). Προφανώς τα τοπικά ελάχιστα είναι και ολικά ($f(x) \ge 0 = f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma)$) και ίσα με 0, ενώ τα τοπικά μέγιστα δεν είναι ολικά, αφού λόγω $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$ δεν έχει ολικό μέγιστο.

26. Ισχυρισμός: *Αν μια συνάρτηση παρουσιάζει π.χ. τοπικό ελάχιστο στο ξ, τότε είναι (πάντα) γν. φθίνουσα αριστερά κοντά του ξ και γν. αύξουσα δεξιά κοντά του ξ:*

Δεν είναι αληθής. Π.χ. μια μη συνεχής είναι η συνάρτηση Dirichlet
$\varphi(\alpha) = 0$, αν α ρητός και $\varphi(\alpha) = 1$, αν α άρρητος.
Αυτή παρουσιάζει τοπ. ελάχιστο στο 0 (και σε κάθε ρητό) αλλά οσοδήποτε κοντά στο 0, δεξιά και αριστερά, υπάρχουν ρητοί και άρρητοι, άρα τιμές 0, 1 οπότε δεν είναι μονότονη.

❖ Μια συνεχής : η συνάρτηση $\varphi(x) = |x\eta\mu\frac{1}{x}|$, για $x \ne 0$ και $\varphi(0) = 0$

έχει ολικό (και τοπικό) ελάχιστο στο $x = 0$, αλλά δεν είναι μονότονη-αύξουσα δεξιά κοντά στο 0.
Πράγματι*: Έστω $\varepsilon > 0$ και $(0, \varepsilon)$ μια δεξιά περιοχή του 0. Υπάρχει (διαισθητικά, αλλά αυστηρά εφαρμόζεται το θεώρημα (αξίωμα) Αρχιμήδη-Ευδόξου) $\nu \in N^*$ με $2\nu\pi + \pi > \frac{1}{\varepsilon}$,

οπότε $0 < x_1 = \frac{1}{2\nu\pi + 2\pi} < x_2 = \frac{1}{2\nu\pi + \pi} < \varepsilon$.

Είναι $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$ και $\varphi(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\kappa\pi}$, $\kappa \in Z$. Έτσι οι αριθμοί

$\frac{1}{(2\nu+2)\pi}$, $\frac{1}{(2\nu+1)\pi}$ είναι διαδοχικές ρίζες της $\varphi(x)$, οπότε αν $0 < x_1 < x < x_2 < \varepsilon$
ισχύουν $\varphi(x_1) = 0 < \varphi(x)$ και $\varphi(x) > 0 = \varphi(x_2)$.
Άρα η φ στο $(0, \varepsilon)$ δεν είναι ούτε γν. αύξουσα ούτε φθίνουσα.

Ισχύει όμως: αν μια συνάρτηση παρουσιάζει *μεμονωμένο* τοπικό ελάχιστο (μέγιστο) σ' ένα διάστημα (α, β), έστω στο $\xi \in (\alpha, \beta)$, (δηλ. δεν έχει άλλο τ. ακρότατο στο (α, β)), τότε, στο διάστημα $(\alpha, \xi]$ είναι γν. φθίνουσα (αύξουσα) ενώ στο $[\xi, \beta)$ είναι γν. αύξουσα (φθίνουσα) (μεμομωμένα ακρότατα έχουμε π.χ. στις πολυωνυμικές, ρητές συναρτήσεις).

Σημείωση: επειδή $0 \le \varphi(x) \le |x|$ η γ. π. ης φ ταλαντεύεται ημιτονοειδώς μεταξύ του χ-άξονα και της $|x|$. Να γίνει μια πρόχειρη γ. π. για να καταρριφτεί κάπως η σχετική (ισχυρή γεωμετρική) πλάνη.

27. Ισχυρισμός: *Αν μια συνεχής συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε δεν έχει τοπικά ακρότατα.*
Αυτό ισχύει σε *ανοικτό* διάστημα (απόδειξη απλή), δεν ισχύει σε κλειστό (αντιπαράδειγμα εύκολο).

28. Ισχυρισμός: *Μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β) πρέπει να έχει στη θέση α τοπικό ελάχιστο ή τοπικό μέγιστο.*
Δεν είναι αληθής: η συνάρτηση $\Sigma(x) = x\eta\mu\frac{1}{x}$ για $x \neq 0$ και $\Sigma(0) = 0$, είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1/2\pi)$.
Αν είχε τοπ. ακρότατο στο 0, έπρεπε «κοντά στο 0» (και δεξιά του) να είναι θετική ή αρνητική.
Έστω $0 < \varepsilon < 1/2\pi$ (οσοδήποτε μικρός) και $(0, \varepsilon)$ μια δεξιά περιοχή του 0.
Υπάρχει $\nu \in N^*$ με

$$2\nu\pi + \frac{\pi}{2} > \frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{οπότε και} \quad \kappa = 2\nu\pi + \frac{3\pi}{2} > \lambda = 2\nu\pi + \frac{\pi}{2} > \frac{1}{\varepsilon},$$

Είναι $\frac{1}{\kappa}, \frac{1}{\lambda} \in (0, \varepsilon)$ και $\Sigma(\frac{1}{\kappa}) = -\frac{1}{\kappa} < 0$ και $\Sigma(\frac{1}{\lambda}) = \frac{1}{\lambda} > 0$
Δηλαδή, οσοδήποτε κοντά (και δεξιά) του μηδενός η συνάρτηση Σ έχει θετικές και αρνητικές τιμές. Άρα δεν μπορεί να παρουσιάζει τοπ. ακρότατο στο 0.

29. Ισχυρισμός: *Αν μια συνεχής συνάρτηση δεν έχει τοπικά ακρότατα, τότε είναι γνησίως μονότονη.*
α) Αν είναι συνεχής σε ένωση διαστημάτων, δεν αληθεύει ο ισχυρισμός αυτός, π.χ. η συνάρτηση $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

β) Αν είναι συνεχής σε ανοικτό διάστημα (α, β) τότε αληθεύει.

Απόδειξη*
Έστω ότι δεν είναι γν. μονότονη. Τότε υπάρχουν κ, λ, μ, $\alpha < \kappa < \lambda < \mu < \beta$ για τους οποίους δεν ισχύει $\varphi(\kappa) < \varphi(\lambda) < \varphi(\mu)$, ούτε $\varphi(\kappa) > \varphi(\lambda) > \varphi(\mu)$. Έστω ότι δεν είναι δυο από τους φ(κ), φ(λ), φ(μ), ίσοι μεταξύ τους. Τότε ο φ(λ) είτε είναι ο μεγαλύτερος, είτε είναι ο μικρότερος των φ(λ), φ(κ), φ(μ). Έστω ότι ο φ(λ) είναι ο μεγαλύτερος, δηλ. $\varphi(\kappa) < \varphi(\lambda)$ και $\varphi(\mu) < \varphi(\lambda)$ (κάνετε ένα σχήμα). Αν $\varphi(\kappa) < \varphi(\mu)$ (όμοια αν $\varphi(\kappa) > \varphi(\mu)$) τότε, θεωρούμε ένα $\varphi(\mu) < \eta < \varphi(\lambda)$, οπότε και $\varphi(\kappa) < \eta < \varphi(\lambda)$. Άρα από το θεώρημα Ενδ. Τιμών υπάρχει $\rho \in (\lambda, \mu)$ και $\xi \in (\kappa, \lambda)$ με $\eta = \varphi(\rho) = \varphi(\xi)$, με $\alpha < \rho < \xi < \beta$.
Όμοια εργαζόμαστε αν φ(λ) είναι ο μικρότερος των φ(κ), φ(λ), φ(μ). Η φ, ως συνεχής στο [ρ, ξ], έχει μια μέγιστη τιμή Μ και μια ελάχιστη m και ισχύει $m \le \varphi(x) \le M$.
Αν οι τιμές των Μ, m ήταν στα ρ, ξ τότε λόγω $\varphi(\rho) = \varphi(\xi)$ η φ θα 'ταν σταθερή, άτοπο (αφού θα είχε τότε τ. ακρότατα). Άρα μια από τις τιμές Μ, m είναι σε εσωτερικό σημείο του [ρ, ξ], άρα εκεί έχει τοπικό ακρότατο, άτοπο.
Όμοια σκεπτόμαστε αν δυο από τους φ(κ), φ(λ), φ(μ), ίσοι μεταξύ τους. Άρα η φ είναι γν. μονότονη (ουσιαστικά δείξαμε και ότι αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε διάστημα και δεν είναι γν. μονότονη, τότε δεν είναι 1-1, δηλαδή αν είναι 1-1 τότε είναι γν. μονότονη)

30*. Ισχυρισμός: *Αν f συνεχής σε ανοικτό διάστημα και έχει μοναδικό τοπικό ακρότατο, τότε είναι ολικό;* Αληθεύει (παραλείπουμε την απόδειξη).
Όταν η f δεν είναι συνεχής, δεν ισχύει, π.χ.

$$f(t) = (t - 1)^2 \text{ για } t \ge 0 \text{ και } f(t) = \frac{1}{t} \text{ για } t < 0.$$

Έχει τοπικό ελάχιστο στο 1, που δεν είναι ολικό. Επίσης δεν ισχύει όταν η συνάρτηση είναι συνεχής σε ένωση διαστημάτων (αντιπαράδειγμα: από την προηγούμενη συνάρτηση εξαιρούμε το 0).

31. Χρήσιμες Υποδείξεις για τις ασκήσεις με μονοτονία – ακρότατα.

1. Το θεώρημα της μονοτονίας, εκτός από την εύρεση της μονοτονίας μιας συνάρτησης χρησιμοποιείται: στην εύρεση των ακροτάτων, στην εύρεση του προσήμου συνάρτησης, καθώς στην παραγωγή ανισοτήτων.

2. Ελέγχουμε την πορεία εύρεσης της παραγώγου μιας συνάρτησης 2-3 φορές και αν είναι δυνατόν με διαφορετικούς τρόπους.

3. Γράφουμε την παράγωγο ως ένα κλάσμα (αν αποτελείται από πολλά κλάσματα) με παρανομαστή θετικό.

4. Πριν προχωρήσουμε στην εύρεση των ριζών του αριθμητή της παραγώγου, έστω Α(x), προσέχουμε μήπως το πρόσημό του προκύπτει άμεσα ή εύκολα.

5. Σε περίπτωση που δεν μπορεί να λυθεί αλγεβρικά η εξίσωση $A(x) = 0$ (ή η ανίσωση $A(x) > 0$), εξετάζουμε μήπως έχει προφανή ρίζα (ή ρίζες) και στη συνέχεια την μονοτονία της αντίστοιχης συνάρτησης $f(\chi) = A(x)$ και το πρόσημό της.

6. Το πρόσημο μιας συνάρτησης βρίσκεται πολλές φορές με την βοήθεια της μονοτονίας της και τη γνώση μιας ή περισσοτέρων ριζών της.

7. Σε ασκήσεις του τύπου «να βρεθούν οι α, β ώστε η συνάρτηση να έχει ακρότατα σε δοσμένες θέσεις κ, λ» μετά την εύρεση των α, β (συνήθως πρέπει να) *επαληθεύουμε* αν πράγματι έχει ακρότατα στις θέσεις αυτές (αυτό στη περίπτωση που οι α, β έχουν βρεθεί μόνο από μηδενισμό της παραγώγου (θ. Fermat), συνθήκη που ως γνωστό είναι μόνο αναγκαία και όχι ικανή)

32. Χρήσιμες Υποδείξεις για τις Εξισώσεις.

Ι. Για την ύπαρξη ρίζας συνάρτησης ή την εύρεση του πλήθους ριζών εξίσωσης, εφαρμόζουμε το θ. Bolzano (ή Rolle) και για την μοναδικότητα εξετάζουμε αν είναι 1-1 ή συνήθως την μονοτονία της. Όμως, πολλές φορές αν έχει προηγηθεί η μονοτονία μάλλον είναι προτιμότερο να βρούμε την εικόνα κάθε διαστήματος του πεδίου ορισμού της συνάρτησης στο οποίο είναι γν. μονότονη (με το θεώρημα μονοτονίας και συνέχειας) και να ελέγξουμε σε ποιες εικόνες ανήκει το μηδέν.

ΙΙ. Αν διαπιστωθεί ότι η συνάρτηση $\varphi(\chi)$ έχει (ολικό) ελάχιστο θετικό ή μέγιστο αρνητικό τότε (προφανώς) η εξίσωση $\varphi(\chi) = 0$ δεν έχει λύση.

ΙΙΙ. Στην Ανάλυση όταν η εξίσωση $\varphi(\chi) = 0$ είναι πολυωνυμική, την έκφραση «η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα ρ» την θεωρούμε συνήθως ισοδύναμη με την έκφραση «η εξίσωση $\varphi(\chi) = 0$ δεν έχει άλλη ρίζα *διαφορετική* από την ρ». Δηλαδή, αν η ρ είναι πολλαπλή ρίζα, π.χ. πολλαπλότητας $\lambda \geq 2$, πάλι την θεωρούμε ως μοναδική ρίζα (ενώ ως γνωστό από την Άλγεβρα έχουμε λ το πλήθος ρίζες ίσες με ρ). Αυτό γίνεται αφ 'ενός γιατί δεν υπάρχει η έννοια της πολλαπλότητας στην σχολική ύλη, αφ' ετέρου χάριν απλότητας και ενιαίας έκφρασης στα σχετικά θέματα της Ανάλυσης.

33. Χρήσιμοι Μέθοδοι Απόδειξης Ανισοταυτοτήτων.

1. Με κλασικό Αλγεβρικό τρόπο .

Υπόψη και οι χρησιμότατες ανισοταυτότητες: $\theta+1/\theta \geq 2$ με $\theta>0$, $\alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta$ κλπ.

Γενικά την Άλγεβρα δεν πρέπει να την παραμελούμε χάριν της Ανάλυσης (Διδάσκοντας Ανάλυση χρήσιμο είναι : «*να έχουμε από τα δεξιά μας την Άλγεβρα και από τ' αριστερά τη Γεωμετρία, ενώ στους Μιγαδικούς το αντίστροφο*»).
Να τονίζουμε βέβαια τη δύναμη της Ανάλυσης στη μονοτονία, ακρότατα, ανισότητες, κ.ά. αλλά όπου είναι εύκολο να λυθεί αλγεβρικά ένα θέμα (π.χ. σύνολο τιμών, μονοτονία, ανισοταυτότητες κλπ) να το προτιμούμε (μας διευκολύνει συχνά, δεν χρειάζονται τότε παραγωγίσεις) αλλά και για γενικότερους λόγους μαθηματικής καλλιέργειας.

2. Με την βοήθεια του Θ.Μ.Τ. του Δ.Λ.

3. Με Μονοτονία.

4. Με ακρότατα.

5. Με την βοήθεια του σχολίου της σελίδας 274 (εφαπτομένη κάτω (πάνω) από την γ. π. μιας κυρτής (κοίλης) συνάρτησης).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

(Παράγωγος - Θ. Μ. Τ.- Ακρότατα)

Α. Παράγωγος

1. Α. Αν f παραγωγίσιμη στο 2 τότε $(f(2))' = f'(2)$ Σ - Λ

Β. i.Η παράγωγος της συνάρτησης $\varphi(t) = e^3$ είναι ίση με Α.$3e^2$ Β. e^3 Γ. 0 Δ. 3e.
ii. Η παράγωγος της συνάρτησης $\varphi(x) = e^t$ είναι ίση με Α.te^{t-1} Β. e^x Γ. e^t Δ.0 .
Γ. Η παράγωγος της συνάρτησης $\varphi(\psi) = 2\chi^3\psi + \chi e^{2\psi}$ είναι ίση με
Α. $6\chi^2 + e^{2\psi}$ Β. $2\chi^3 + 2\chi e^{2\psi}$ Γ. $6\chi^2 + 2\chi e^{2\psi}$ Δ. $2\chi^3 + 2e^{2\psi}$

Δ. Μια πολυωνυμική συνάρτηση είναι $7^{ου}$ βαθμού. Η τέταρτη παράγωγός της είναι βαθμού
Α.0 Β.1 Γ.2 Δ.3 Β. 4 Γ.5

Ε. $\left(\alpha^\chi \ln\alpha\right)'_\chi = (\alpha^\chi)'\ln\alpha + \alpha^\chi(\ln\alpha)' = \alpha^\chi\ln\alpha + \alpha^\chi\frac{1}{\alpha}$, $\alpha > 0$, $\chi\in R$, Σ - Λ

Στ. Αν $\alpha > 0$, $\chi\in R$, $\left(\alpha^\chi - \chi\right)'_\chi =$ Α. $\chi\alpha^{\chi-1}-1$ Β. $(\ln\alpha)\alpha^\chi$ Γ. $\alpha^\chi - 1$ **Δ.** $(\ln\alpha)\alpha^\chi - 1$

2. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα ανοικτό διάστημα Δ. Να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\xi\in\Delta$, αν και μόνο αν υπάρχει μια συνάρτηση φ συνεχής στο ξ τέτοια ώστε $f(x) - f(\xi) = \varphi(x)(x - \xi)$ κοντά στο ξ. Ποια η σχέση των $\varphi(\xi)$ και $f'(\xi)$;
(Παρατήρηση του *Κ. Καραθεοδωρή* (1873-1950)).

3. Έστω η συνάρτηση $f(z) = z^4$, $z\in C$. Να αποδειχθεί ότι : α) $|z| < 1 \Leftrightarrow |f(\bar{z})| < 1$,
β) Αν $z = x + iy$ και $g(x) = Re(f(z)) = g(y)$, $h(x) = Im(f(z)) = h(y)$ τότε
$g'(x) = h'(y)$, $g'(y) = -h'(x)$, $x, y\in R$.

4. Έστω φ συνεχής στο $\xi\in R$. Να δειχθεί ότι η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ είναι εφαπτομένη στην γ. π. της φ στο σημείο $(\xi, \varphi(\xi))$ αν και μόνο αν ισχύει $\lim\limits_{x\to\xi}\frac{\varphi(x) - (\alpha x + \beta)}{x - \xi} = 0$.

5. Έστω η συνάρτηση $\Sigma(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ της οποίας η γραφική της παράσταση τέμνει τον x-άξονα σε δυο σημεία. Να βρεθεί η ικανή και αναγκαία συνθήκη (μεταξύ των α, β, γ) ώστε οι εφαπτόμενες στην γραφική της παράσταση στα σημεία αυτά να είναι κάθετες.

6. Έστω η παραβολή $\varphi(x) = x^2$ και $A(\alpha, \varphi(\alpha))$, $B(\beta, \varphi(\beta))$ δυο διαφορετικά σημεία της. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο, έστω $\Gamma(\xi, \varphi(\xi))$, της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ΑΒ και ότι ισχύει $2\xi = \alpha + \beta$.

7. Έστω η παραβολή $y^2 = 4px$ και μια χορδή της με (σταθερό) συντελεστή διεύθυνσης $\lambda \neq 0$. Να δειχθεί ότι α) το μέσο της χορδής ανήκει σε σταθερή ευθεία (ε),
β) η εφαπτομένη στο σημείο που η ευθεία (ε) αυτή τέμνει την παραβολή είναι παράλληλη στην χορδή αυτή.

8. Α. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $y= f(x)$, $x\in R$, που ικανοποιεί την σχέση $x^2 - xy + y^3 = 3$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στην γ. π. της f στο σημείο (-1, 1).

(Απ.$3x-4y+7=0$)

Β. Η εφαπτομένη στην γ. π. της συνάρτησης $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, στο σημείο $M(\xi, \varphi(\xi))$ τέμνει τον x-άξονα στο σημείο Α. Να δειχθεί ότι η προβολή του ΑΜ στον x -άξονα έχει σταθερό μήκος. (Απ.$1/|\ln\alpha|$)

9. Έστω το πολυώνυμο $Q(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$, $\alpha < \beta < \gamma$ και $P(x)$ ένα πολυώνυμο βαθμού μικρότερου του 3. Αν υπάρχουν κ, λ, $\mu \in R$ ώστε $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\kappa}{x-\alpha} + \frac{\lambda}{x-\beta} + \frac{\mu}{x-\gamma}$ για $x \neq \alpha, \beta, \gamma$ να δειχθεί ότι $Q'(\alpha)Q'(\beta)Q'(\beta) \neq 0$ και ότι $\kappa = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$, $\lambda = \frac{P(\beta)}{Q'(\beta)}$, $\mu = \frac{P(\gamma)}{Q'(\gamma)}$.

10.α) Έστω το πολυώνυμο $P(\chi) = \alpha + \beta(\chi - \xi) + \gamma(\chi - \xi)^2 + \delta(\chi - \xi)^3$, $\chi \in R$,όπου α, β, γ, $\delta \in R$.
Να δειχθεί ότι $\alpha = P(\xi)$, $\beta = P'(\xi)$, $\gamma = \frac{P''(\xi)}{2}$, $\delta = \frac{P'''(\xi)}{6}$.
β) να βρεθούν οι α, β, γ, $\delta \in R$ ώστε $\chi^3 - 2\chi^2 + \chi + 3 = \alpha + \beta(\chi - 1) + \gamma(\chi - 1)^2 + \delta(\chi - 1)^3$, $\chi \in R$
γ) να προσδιοριστούν οι α, β, γ, δ, $\varepsilon \in R$ ώστε
$\chi^4 + 2\chi^3 - 3\chi^2 + 4\chi + 5 = \alpha + \beta(\chi - 1) + \gamma(\chi - 1)^2 + \delta(\chi - 1)^3 + \varepsilon(\chi - 1)^4$, $\chi \in R$.

11. Αντλία γεμίζει λάδι μια δεξαμενή σε σχήμα (ανεστραμμένου) κώνου με ρυθμό 4π lt/min. Η ακτίνα βάσης του κώνου είναι ίση με το ύψος του. Να βρεθεί ο ρυθμός με τον οποίο αυξάνεται το ύψος του λαδιού στην δεξαμενή την χρονική στιγμή που το ύψος του είναι 10cm. (Όγκος κώνου $V=\pi\rho^2\upsilon/3$, Απ. 40cm/min)

12. Να βρεθεί (συναρτήσει του α) η ευθεία η οποία είναι εφαπτόμενη στην γ. π. της συνάρτησης $\varphi(x) = \alpha^x$, $\alpha > 1$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Να βρεθεί και το σημείο επαφής.

13*. Α. Έστω φ συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα (α, β) και συνεχής στο $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε η $|\varphi(\chi)|$ να είναι παραγωγίσιμη στο ξ. Αν $\varphi(\xi) \neq 0$, τότε η φ είναι παραγωγίσιμη στο ξ. Δείξετε ότι και όταν $\varphi(\xi) = 0$, η φ είναι παραγωγίσιμη στο ξ με $\varphi'(\xi) = 0$.
Β. Έστω Σ συνεχής συνάρτηση με $\Sigma(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$. Αν η συνάρτηση $f(x) = \Sigma^2(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο R να δειχθεί ότι η συνάρτηση $\Sigma(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $\Sigma'(x) = \frac{f'(x)}{2\Sigma(x)}$, $x \in R$.

Β. Θ. Μ. Τ. - Μονοτονία

14. Α. Αν Σ παραγωγίσιμη στο R, τότε ο αριθμός $\Sigma(2010) - \Sigma(2009) \in \Sigma'(R)$ Σ – Λ

Β. Αν φ συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β) και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $\varphi'(\xi) = 0$, τότε $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$.
Α. Σωστό Β. Λάθος Γ. Σωστό αν φ συνεχής στα α, β.

Γ. Αν φ γν. αύξουσα το (α, β] και στο (β, γ) τότε είναι γν. αύξουσα στο (α, γ) Σ - Λ

Δ. Αν η $\varphi'(\chi)$ είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται σε ένα διάστημα, τότε η φ είναι
Α.γν. αύξουσα Β. γν. φθίνουσα Γ. αύξουσα Δ. φθίνουσα Ε. Γν. μονότονη

Ε. Αν $\varphi'(\chi) = f'(\chi) + \chi + \frac{1}{\chi} - 2$ για κάθε $\chi > 0$, τότε η συνάρτηση $f(\chi) - \varphi(\chi)$, $\chi > 0$, είναι
Α.γν. αύξουσα Β. γν. φθίνουσα Γ. αύξουσα Δ. φθίνουσα

15. α) Αν $x, y \in R$ τότε ισχύει $|\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu y| \le |x - y|$.

β) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} |\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu\sqrt{1+x^2}|$. (Απ.0)

16. Α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha^4 + \alpha + 2 = 2\alpha^3 - 30\alpha^2$ έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες.

Β. Αν $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$, τότε ισχύει $\alpha + \varepsilon\varphi\beta < \beta + \varepsilon\varphi\alpha$..

17. α) Έστω h συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί m, M ώστε

$$m(x - y) \le h(x) - h(y) \le M(x - y) \text{ για κάθε } \alpha \le y < x \le \beta.$$

β) Για την προηγούμενη συνάρτηση h, αν $\alpha = 0$ και $h(0) = 0$ να δειχθεί ότι υπάρχουν πραγματικοί m , M με $mx \le h(x) \le Mx$ για κάθε $x \in [0, \beta]$.

γ) Να αποδειχθεί ότι $7 + \frac{1}{7,2} < \sqrt{51} < 7 + \frac{1}{7}$.

18. Έστω φ συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$. Να αποδειχθεί ότι:

α) Για κάθε $\gamma \in R$ υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $\varphi'(\xi) = \gamma\varphi(\xi)$

β) Υπάρχουν $\kappa, \lambda \in (\alpha, \beta)$, $2\kappa < \alpha + \beta < 2\lambda$, με $\varphi'(\kappa) + \varphi'(\lambda) = 0$.

γ) Υπάρχουν $\mu, \nu, \rho \in (\alpha, \beta)$ με $\varphi'(\mu) + \varphi'(\nu) + \varphi'(\rho) = 0$.

19. Έστω Σ συνεχής συνάρτηση στο διάστημα (α, β) και παραγωγίσιμη στα διαστήματα (α, ξ), (ξ, β), όπου $\xi \in (\alpha, \beta)$.Αν ισχύει $\Sigma'(x) = 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \xi) \cup (\xi, \beta)$ τότε η Σ είναι σταθερή στο (α, β).

20. Δεδομένου ότι $1 - \frac{1}{x} \le \ln x \le x - 1$ για $x > 0$ (με ισότητες μόνο με x=1) να εξετάσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις $\alpha(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, $\varphi(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$, $x > 0$.

21. α) Αν $\nu \in N^*$, $\alpha \in R$, να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (\nu, \nu+1)$ με $(\nu + 1)^\alpha - \nu^\alpha = \alpha\xi^{\alpha-1}$.

β) Να λυθεί η εξίσωση $2006^x + 2007^x = 2005^x + 2008^x$.

22.α) Έστω Σ συνάρτηση παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ με $\Sigma'(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in \Delta$. Αν η αντίστροφη της Σ, έστω Τ , είναι παραγωγίσιμη, να αποδειχθεί ότι

$$T'(y) = \frac{1}{\Sigma'(\chi)},\ y = \Sigma(\chi),\ \chi \in \Delta.$$

β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $\Sigma(\chi) = \eta\mu\chi$, $\chi \in (0, \pi/2)$ και με δεδομένο ότι η αντίστροφή της, έστω Τ, είναι παραγωγίσιμη να δειχθεί ότι $T'(\chi) = \frac{1}{\sqrt{1-\chi^2}}$, $\chi \in (0, 1)$.

23*. Α. Έστω μια συνάρτηση Σ παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) της οποίας η παράγωγος είναι 1-1. Να δειχθεί ότι η εφαπτομένη σε κάθε σημείο της γραφικής της παράστασης έχει μόνο ένα κοινό σημείο με αυτήν. Τι συμπεραίνετε αν μια εφαπτομένη στην γ. π. μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης σ' ένα διάστημα έχει δυο κοινά σημεία με αυτήν;

Β. Να δείξετε ότι κάθε εφαπτομένη στην γ. π. της συνάρτησης $\Sigma(x) = x + x^{2008}$, $x \in R$ έχει μόνο ένα κοινό σημείο με αυτήν.

24*. Έστω μια συνάρτηση Τ παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα. Τότε ισχύουν, α) υπάρχει $\xi > 0$ με $T'(\xi) > 0$, β) αν η παράγωγος της Τ είναι γνησίως αύξουσα να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} T(x) = +\infty$.

25. Έστω f, g συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο διάστημα (α, β) και συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ με $g'(\chi) \neq 0$, $\chi\in(\alpha, \beta)$. Τότε α) $g(\alpha) \neq g(\beta)$, β) υπάρχει $\xi\in(\alpha, \beta)$ με $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.
(Γενίκευση του Θ.Μ.Τ.: Cauchy).

26*. Έστω Σ παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R, μη σταθερή, με την ιδιότητα
$\Sigma(x + y) = \Sigma(x)\,\Sigma(y)$ για κάθε $x, y \in R$.
α) Να αποδειχθεί ότι $\Sigma'(x) = \lambda\Sigma(x)$, $x\in R$, όπου $\lambda = \Sigma'(0)$, β) Ισχύει $\Sigma(x) = e^{\lambda x}$, $x\in R$, $\lambda \neq 0$.

Γ. ΑΚΡΟΤΑΤΑ

27. i. Αν $\varphi'(\chi) = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$, $\alpha \neq 0$, $\alpha\gamma < 0$, τότε η φ έχει
Α. ένα μόνο τ. ακρότατο Β. 2 ακριβώς τ. ακρότατα Δ. το πολύ 2 τ. ακρότατα

ii. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνεχούς συνάρτησης σ' ένα ανοικτό διάστημα είναι πάντα (ολικό) μέγιστο.
Α. Σωστό Β. Λάθος Γ. Σωστό αν υπάρχει μέγιστο.
iii. Το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μιας συνεχούς συνάρτησης σ' ένα κλειστό διάστημα είναι πάντα (ολικό) ελάχιστο. Α. Σωστό Β. Λάθος

iv. Αν $\Sigma'(\chi) = \chi^{2005}(\chi - 1)^{2006}(\chi - 2)^{2007}(\chi - 3)^{2008}$ τότε η συνάρτηση Σ έχει ακρότατα στις θέσεις Α.0, 1 Β.0,1,2,3 Γ.0, 2 Δ. 0, 2, 3

v. Αν $\Sigma''(\chi) = (\chi - 1)^{\nu}(\chi - 2)^{\nu+1}(\chi - 3)^{\nu+2}$, $\nu\in N^*$, και η $\Sigma'(\chi)$ έχει δυο μόνο τοπικά ακρότατα τότε ο ν είναι : Α. άρτιος Β. περιττός Γ. πολλαπλάσιο του 3

vi. Να εξεταστεί η μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = \alpha^x - x$, $0 < \alpha < 1$, $x\in R$.
Να βαθμολογηθεί (με άριστα τα 10 μόρια), η παρακάτω απάντηση μαθητή (σε πανελλήνιες εξετάσεις).
«Έχομε $f'(x) = \alpha^x\ln\alpha - 1$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha^x\ln\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha^x = \dfrac{1}{\ln\alpha} \Leftrightarrow x = \ln\left(\dfrac{1}{\ln\alpha}\right)$,
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \ln\left(\dfrac{1}{\ln\alpha}\right)$, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \ln\left(\dfrac{1}{\ln\alpha}\right)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(\ln\left(\dfrac{1}{\ln\alpha}\right), +\infty\right)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, \ln\left(\dfrac{1}{\ln\alpha}\right)\right)$».

28. Αν το σημείο (x, y) κινείται στον κύκλο $x^2+y^2 = 9$, να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της παράστασης $P = \dfrac{x^3 + xy^2}{3} + xy^2$. (Απ. 16 , -16)

29. Αν $\alpha, \beta, \gamma\in R$ και η εξίσωση $t^2 - 2\alpha t + 3\beta = 0$ έχει μιγαδικές ρίζες, να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

30. Να βρεθεί σημείο Μ της παραβολής $y^2 = 4\alpha x$ το οποίο απέχει λιγότερο από το σημείο $\Sigma(\kappa, 0)$, όπου $\kappa > 2\alpha > 0$. Στην συνέχεια να δειχθεί ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο Μ είναι κάθετη στην ευθεία ΣΜ.

31. Να αποδειχθεί ότι: α) η εξίσωση $1 + 2x + 2\ln x = 0$ έχει μοναδική λύση, έστω θ.
β) η εφαπτομένη στην γ. π. της συνάρτησης $y = -1/x$, $x > 0$, στη θέση θ, είναι εφαπτομένη και στην γ. π. της $y = e^x$, και να βρεθεί το σημείο επαφής (συναρτήσει του θ).

32*. i) Αν η γ. π. της συνάρτηση $\varphi(\chi) = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$, $\alpha \neq 0$, τέμνει τον χ- άξονα και ισχύει $\varphi(\chi) \geq 0$ για κάθε $\chi \in R$, να δειχθεί ότι $\beta^2 = 4\alpha\gamma$.
ii) Να βρεθούν οι θετικοί αριθμοί α, β ώστε η μέγιστη τιμή της συνάρτησης
$\psi = \dfrac{\alpha x + \beta}{x^2 + 2x + 3}$ να είναι 1 και η ελάχιστη –2. Για ποιες τιμές έχει τα ακρότατα αυτά;

(Απ.(4, 2), 1, -2)

33. Σ' ένα αμπέλι, στην περιοχή των Αρχανών, η παραγόμενη ποσότητα σταφυλιών Τ(Ε) (σε εκατοντάδες κιλά) δίνεται από την σχέση $T(E) = \dfrac{3}{4}E^2 - \dfrac{\alpha E^3}{6}$, όπου Ε ο αριθμός των απασχολούμενων εργατών και α παράμετρος, $\dfrac{1}{6} \leq \alpha < 2$, εξαρτώμενη από διάφορους παράγοντες (π.χ. ποιότητα εδάφους, λίπανση κλπ). Να βρεθεί :
α) μέχρι πόσοι εργάτες πρέπει να εργάζονται στην καλλιέργεια ώστε να έχομε αύξηση του παραγόμενου προϊόντος,
β) μέχρι πόσοι εργάτες πρέπει να εργάζονται ώστε η παραγόμενη ποσότητα να αυξάνει με αύξοντα ρυθμό,
γ) η μέγιστη ποσότητα παραγόμενων σταφυλιών, έστω Σ(α). Για ποια τιμή του α η Σ(α) γίνεται μέγιστη; (Απ.(γ) 1/6, 8100 Kg)

34.α) Να δειχθεί ότι η εξίσωση $2x^3 + x = \alpha$, $\alpha > 0$, έχει μοναδική λύση η οποία ανήκει στο διάστημα (0, α).
β) Έστω η παραβολή $y = x^2$ και το σημείο Α(α, 0), $\alpha > 0$. Να δειχθεί ότι απ' όλα τα σημεία που ανήκουν στην παραβολή αυτή υπάρχει ένα ακριβώς, έστω Ε(κ, κ^2), με την ελάχιστη απόσταση από το Α. γ) Να δειχθεί ότι η εφαπτομένη στην παραβολή στο σημείο Ε είναι κάθετη στην ευθεία ΕΑ. (το (γ) γενικεύεται για μια οποιαδήποτε παραγωγίσιμη συνάρτηση, όταν υπάρχει η ελάχιστη απόσταση).

35. Έστω $\alpha > 1$. α) Να εξεταστεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση
$x(t) = \alpha^t + \alpha^{1-t}$, $0 \leq t \leq 1$.
β) Να δειχθεί ότι $\alpha^t + \alpha^{1-t} \geq 2\sqrt{\alpha}$, $0 \leq t \leq 1$.
γ) Να λυθεί η εξίσωση $\left(\dfrac{9}{4}\right)^{\eta\mu^2 x} + \left(\dfrac{9}{4}\right)^{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 3$, $x \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$. (Απ. π/4)

36*. Αν a, b > 0 και ισχύει $a^x + 2b^x \leq 3$ για κάθε $x \in R$, να δειχθεί ότι $ab^2 = 1$ και στην συνέχεια ότι a = b = 1.

37*. Έστω α, β $\in C$, ώστε $|\alpha z + \beta| = 1$ για κάθε $z \in C$ με $|z| = 1$. Τότε ισχύουν
α) $|\alpha + \bar{z}\cdot\beta| = 1$ για κάθε $z \in C$ με $|z| = 1$,
β) $|\alpha|^\nu + |\beta|^\nu = 1$ για κάθε $\nu = 1,2,\ldots$.

38*. Έστω η ευθεία ψ = x και η συνάρτηση $\psi = \alpha^x$, $\alpha > 1$. Να αποδειχθεί ότι
α) Αν η ευθεία είναι εφαπτομένη στην γραφική παράσταση της συνάρτησης,
τότε $\alpha = e^{1/e}$. Να βρεθεί το σημείο επαφής. (Απ. (e, e))
β) Αν $\alpha > e^{1/e}$ τότε η ευθεία ψ = x δεν έχει κοινά σημεία, ενώ αν $1 < \alpha < e^{1/e}$ τότε έχει ακριβώς δυο κοινά σημεία με την γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

39*. Έστω α, β, κ, λ∈R με α < β , κ, λ θετικοί αριθμοί και συνάρτηση Σ(χ) διπλά παραγωγίσιμη στο R τέτοια ώστε $(\kappa + \lambda)\Sigma(\chi) \le \kappa\Sigma(\alpha) + \lambda\Sigma(\beta)$ για κάθε χ∈R.
Να αποδειχθεί ότι : α) Σ(α) = Σ(β), β) Σ΄ (α) = Σ΄ (β),
γ) Υπάρχει ξ∈(α, β) τέτοιος ώστε Σ΄΄(ξ) = 0.

40*. Έστω φ μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $\alpha \le \varphi(x) \le \beta$ για κάθε x∈[α, β] και $\varphi'(x) \ne 1$ για κάθε x∈(α, β). Τότε ισχύουν
α) υπάρχει μοναδικός ξ∈[α, β] με φ(ξ) = ξ, β) οι εξισώσεις συνx = x, συν(συνx) = x έχουν μοναδική και κοινή λύση στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$.

41.Α.Έστω φ(t) συνάρτηση παραγωγίσιμη στο διάστημα (0, +∞) με φ(t) > 0 και
$\varphi^2(t) + t\varphi'(t) < \varphi(t)$ για κάθε t > 0. Να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις
$f(t) = \frac{\varphi(t)}{t}$, $g(t)= (\varphi(t))^t$, t > 0 είναι γνησίως φθίνουσες.
Β. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^{x-1} +(x +1)^{x-1} = (x +2)^{x-1}$, x>0, έχει μοναδική λύση την x=3.

42.Έστω φ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο R με τις ιδιότητες φ(x) ≠ x και
$2\varphi'(x) = 2 + \varphi(x) - x - \frac{1}{\varphi(x) - x}$ για κάθε x∈R και $\varphi(0) = \sqrt{2}$. Να αποδειχθεί ότι:
α) Η εφαπτομένη στην γ. π. της φ στο σημείο με τετμημένη 0 σχηματίζει με τον x-άξονα γωνία μικρότερη των 60° και μεγαλύτερη των 45°.
β) Η γ. π. της φ δεν έχει κοινά σημεία με την διχοτόμο της α΄ και γ΄ γωνίας των αξόνων.
γ) Η συνάρτηση $\gamma(x) = (\varphi(x) - x)^2 - e^x$, x∈R είναι σταθερή και ίση με 1.
δ) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης φ.

43. Τρεις πόλεις Α, Β, Γ βρίσκονται κατά μήκος ενός αυτοκινητοδρόμου με αποστάσεις ΑΒ = 200 km, ΒΓ= 400 km (και ΑΓ= 600 km). Ένα αυτοκίνητο κινούμενο συνεχώς ξεκινά από την πόλη Α, περνάει από την πόλη Β μετά από 3 ώρες και φθάνει στην πόλη Γ σε 6 ώρες. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον χρονικές στιγμές που διαφέρουν κατά 3 ώρες, έτσι ώστε το αυτοκίνητο τη μία χρονική στιγμή είχε διπλάσια ταχύτητα απ' ό,τι την άλλη (η συνάρτηση που εκφράζει το διάστημα συναρτήσει του χρόνου είναι συνεχής και παραγωγίσιμη). (ΑΣΕΠ 2009)

44*. Έστω Σ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β].
α) Αν το Σ(α) είναι η μέγιστη (ελάχιστη) τιμή της Σ τότε Σ΄ (α) ≤ 0 (αντίστοιχα Σ΄(α) ≥ 0), ενώ αν Σ(β) είναι η μέγιστη (ελάχιστη) τιμή τότε Σ΄(β) ≥ 0 (αντίστοιχα Σ΄(β) ≤ 0),.
β) Έστω Σ΄(β) < 0 < Σ΄(α). Να δειχθεί ότι η μέγιστη τιμή της Σ δεν μπορεί να είναι στο α ή στο β και ότι υπάρχει ξ∈(α, β) με Σ΄(ξ) = 0.
γ) Αν Σ΄(α) < η < Σ΄(β) τότε υπάρχει λ∈(α, β) με Σ΄(λ) = η (Θεώρημα Darboux).

45*. α) Έστω συνάρτηση y = φ(λ) ορισμένη στο διάστημα (0, +∞) με την ιδιότητα, όταν οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής λ βρίσκονται σε γεωμετρική πρόοδο (με λόγο οποιοδήποτε θετικό), οι αντίστοιχες τιμές του y να βρίσκονται σε αριθμητική πρόοδο και φ(1) = 0. Να αποδειχθεί ότι φ(αβ) = φ(α) + φ(β) για κάθε α, β > 0.
β) Για μια τέτοια συνάρτηση φ δείξετε ότι, αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο 1 τότε είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞) και ισχύει $\varphi'(\lambda) = \frac{\varphi'(1)}{\lambda}$, λ > 0. -

* * *

4. Σχόλιο σελ. 74

Ειδική επισήμανση και υπογράμμιση του πρώτου σχολίου της σελ. 74, το οποίο είναι χρησιμότατο: βοηθά στην απόδειξη ανισοταυτοτήτων και στον υπολογισμό εμβαδών.
Να τονιστεί στους μαθητές ότι μπορούν να το χρησιμοποιούν στις ασκήσεις, χωρίς απόδειξη. Η απόδειξή του καλό είναι να δοθεί ως άσκηση:

- Αν $T(x)$ κυρτή στο (α, β) και $\xi \in (\alpha, \beta)$ τότε $T(x) \geq T(\xi) + (x - \xi)T'(\xi)$, $x \in (\alpha, \beta)$
- Αν $L(x)$ κοίλη στο (α, β) και $\xi \in (\alpha, \beta)$ τότε $L(x) \leq L(\xi) + (x - \xi)L'(\xi))$, $x \in (\alpha, \beta)$, με ισότητες μόνο για $x = \xi$.

- Άλλο γεωμετρικό χαρακτηριστικό μιας κυρτής (κοίλης) συνάρτησης: μια οποιαδήποτε χορδή της ΑΒ βρίσκεται πάνω (κάτω) από την γ. π. με άκρα τα Α, Β. (βλ. άσκηση 23(β))

5. Στο θεώρημα της σελ. 274.

Το αντίστροφό του δεν ισχύει, όπως αναφέρεται και στο σχόλιο του βιβλίου. Είναι εντελώς όμοιο με το θεώρημα μονοτονίας. Αυτό που ισχύει και εδώ είναι ότι: αν f κυρτή στο διάστημα (α, β) και διπλά παραγωγίσιμη, τότε $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.
Το συχνό λάθος των μαθητών, *«για να είναι η f κυρτή **πρέπει** $f''(x)>0$...»* είναι καλό ευθύς εξ αρχής να το επισημάνουμε. Επ' ευκαιρία πρέπει να έχουμε υπόψη ότι, με το *« πρέπει να ισχύει...»* εκφράζεται μια αναγκαία συνθήκη (και όχι ικανή). Να τονιστεί η σημασία του αυτή και σε άλλες περιπτώσεις στα Μαθηματικά, ώστε να χρησιμοποιείται όσο το δυνατόν *λιγότερο και σωστά*.

6. i) Στον ορισμό του σημείου καμπής, σελίδα 275.

Ο ορισμός του βιβλίου διατυπώνεται για να καλύψει και την περίπτωση της κατακόρυφης εφαπτομένης που υπάρχει στο βιβλίο. Εφόσον όμως έχει παραλειφθεί από την εξεταστέα ύλη η κατακόρυφη εφαπτομένη και πολύ περισσότερο εφόσον ισχύει η «υπόθεση Δ», η εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι μόνο πλάγια (ή οριζόντια), δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Έτσι δεν πρέπει να λάβουμε υπόψη την εξαίρεση της παραγωγισιμότητας της f στο σημείο x_0 , δηλαδή ο ορισμός πρέπει να διατυπωθεί τελικά με την f *παραγωγίσιμη* στο (α, β).

ii) Επισημαίνουμε τέλος ότι τα σημεία καμπής είναι μόνο σε εσωτερικά σημεία των διαστημάτων του πεδίου ορισμού, ενώ τα τοπικά ακρότατα μπορεί να είναι και σε άκρα.

iii) Με δεδομένο ότι ένα σημείο $(\kappa, f(\kappa))$ είναι σημείο καμπής μιας συνάρτησης, εξυπακούεται (από τον ορισμό) ότι η f *παραγωγίζεται* σε ένα ανοικτό διάστημα που περιέχει το κ και η f' διατηρεί διαφορετικό είδος μονοτονίας εκατέρωθεν του κ στο διάστημα αυτό. Κάτι ανάλογο δεν συμβαίνει στην περίπτωση ακρότατου σε θέση ξ: δεν διατηρείται η μονοτονία της f εκατέρωθεν του ξ, όπως έχουμε ήδη επισημάνει στις παρατηρήσεις του Α΄ μέρους.

iv) Να επισημάνουμε και την συχνή χρήση στη καθημερινή ζωή εκφράσεων που περιέχουν τις λέξεις «σημείο καμπής», π.χ. λέει κάποιος: «ο γάμος μου ήταν ένα σημείο καμπής για την ζωή μου» κλπ.

ν) Η μοναδικότητα του σημείου καμπής μιας συνάρτησης σ' ένα διάστημα, συχνά εξασφαλίζεται από την (γνήσια) μονοτονία της δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης στο διάστημα αυτό. Μια ειδική περίπτωση έχουμε στη περίπτωση πολυωνυμικής συνάρτησης που αρκεί η τρίτη παράγωγός της να μην μηδενίζεται στο διάστημα αυτό (;).

7. Σχετικά με το θεώρημα της σελ. 275.

α) Υποθέτει την συνάρτηση διπλά παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) που περιέχει το x_0, αλλά αρκεί να είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και διπλά παραγωγίσιμη (μόνο) στο x_0. Το θεώρημα εκφράζει μια *αναγκαία* (μόνο) συνθήκη για να είναι το σημείο $(x_0, f(x_0))$ σημείο καμπής. Ουσιαστικά είναι ένα πόρισμα του θ. Fermat, αφού στην περίπτωση αυτή η f' είναι συνεχής στο x_0 και αλλάζει μονοτονία, οπότε έχει ακρότατο στη θέση x_0 κλπ.

β) Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει: κάθε ρίζα της δεύτερης παραγώγου δεν είναι θέση σημείου καμπής, κατ' αναλογία με το ότι κάθε ρίζα της πρώτης παραγώγου δεν είναι θέση τοπ. ακρότατου. Απαιτείται και η αλλαγή της μονοτονίας της f' εκατέρωθεν του x_0 (θεώρημα της σελ. 276). Έτσι οι ρίζες της δεύτερης παραγώγου είναι οι μόνες *πιθανές* θέσεις σημείων καμπής, λαμβάνοντας υπόψη και την «υπόθεση Δ» (διαφορετικά έχομε και τα σημεία που δεν υπάρχει η δεύτερη παράγωγος ως πιθανά σημεία καμπής).

8. Σχετικά με το θεώρημα της σελ. 276.

i) Μας δίνει μια *ικανή* συνθήκη σημείου καμπής. Το αντίστροφό του δεν ισχύει, ακόμη και με την f διπλά παραγωγίσιμη στο (α, β). Αυτό συμβαίνει γιατί αν η f' είναι π.χ. γν. αύξουσα αριστερά κοντά του x_0, δεν συνεπάγεται ότι η f'' είναι θετική, μπορεί ως γνωστό και να μηδενίζεται.

ii) Στη θέση x_0 η συνάρτηση για μας παραγωγίζεται, όπως έχουμε επισημάνει και στον ορισμό του σημείο καμπής. Βέβαια γενικά η συνάρτηση θα μπορούσε να μην έχει πρώτη παράγωγο στο x_0, αλλά να έχει κατακόρυφη εφαπτομένη (άπειρο παράγωγο).
iii) Το θεώρημα αυτό συνδυάζεται στην πράξη με το προηγούμενο: εντοπίζονται πρώτα οι ρίζες της δεύτερης παραγώγου (πιθανά σ. κ.) και στην συνέχεια το πρόσημο της f'' εκατέρωθεν κάθε μιας.
iv) Η υπόθεση στο θεώρημα, να υπάρχει εφαπτομένη στο $A(x_0, f(x_0))$, είναι απαραίτητη, έστω και αν είναι συνεχής και αλλάζει κυρτότητα εκατέρωθεν του x_0:

Η συνάρτηση $\Sigma(x) = \begin{cases} x^2, x < 0 \\ \sqrt{x}, x \geq 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ και έχει

$\Sigma''(x) = \begin{cases} 2, x < 0 \\ -1/4x\sqrt{x}, x > 0 \end{cases}$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Αλλάζει κυρτότητα εκατέρωθεν του 0, αλλά δεν έχει εφαπτομένη στη θέση 0. Έτσι δεν έχει σημείο καμπής στη θέση 0.

9. *Ισχυρισμός: ένα σημείο καμπής (κ, f(κ)) της f είναι πάντα ακρότατο για την f΄.*
Αυτό ισχύει με την προϋπόθεση ότι η f' είναι συνεχής στο σημείο κ. Άρα δεδομένης της «υπόθεσης Δ» αυτό είναι αληθές.

10. *Ισχυρισμός: Ένα τοπικό ακρότατο δεν μπορεί να είναι και σημείο καμπής.*
Εποπτικά φαίνεται αληθής. Ας δούμε αν είναι πραγματικά αληθής. Αν το ακρότατο είναι σε άκρο διαστήματος, τότε προφανώς δεν μπορεί να είναι σημείο καμπής. Έστω τώρα ότι η θέση του τοπικού ακροτάτου είναι σε εσωτερικό σημείο $\xi\in(\alpha, \beta)$ και συγχρόνως είναι θέση σημείου καμπής. Ας πάρουμε και την φ διπλά παραγωγίσιμη στο (α, β).
Λόγω ακροτάτου έχομε $\varphi'(\xi) = 0$. Έστω στο (κ, ξ) κυρτή και στο (ξ, λ) κοίλη,
$\alpha < \kappa < \xi < \lambda < \beta$. Τότε επειδή φ′ συνεχής στο ξ, η φ′ είναι γν. αύξουσα στο (κ, ξ], οπότε $\varphi'(\chi) < \varphi'(\xi) = 0$ για $\chi\in(\kappa, \xi)$, ενώ $\varphi'(\chi) < \varphi'(\xi) = 0$ για $\chi\in(\xi, \lambda)$. Άρα η φ ′ διατηρεί πρόσημο στο $(\kappa, \xi) \cup(\xi, \lambda)$ οπότε η φ δεν έχει ακρότατο στη θέση ξ, άτοπο. Παρατηρείστε ότι από την υπόθεση «φ διπλά παραγωγίσιμη στο (α, β)», χρησιμοποιήθηκε μόνο η συνέχεια της φ′ στο ξ.

11.Ερώτηση συναδέλφου: Στην άσκηση 5, σελ.279, αναφέρεται ως διάστημα ορισμού της f το (-2, 2), το οποίο όμως δεν χρησιμοποιείται στην απόδειξη. Ποιος είναι ο ρόλος του εκεί;

- Η y = f(x) από την δοσμένη σχέση δίνεται ως λύση της εξίσωσης $y^2-2y+x^2-3 = 0$. Έτσι για να υπάρχουν $y\in R$ πρέπει και αρκεί η διακρίνουσα να είναι μη αρνητική, ισοδύναμα $x\in[-2, 2]$. Αν x = -2, 2 τότε y=1, ενώ αν $x\in(-2, 2)$ υπάρχουν $y\in R$ (και είναι συνάρτηση του x).

Αυτή η άσκηση μπορεί να συμπληρωθεί με ένα ενδιαφέρον ερώτημα: να βρεθούν οι (συνεχείς τουλάχιστον) συναρτήσεις f(x), $x\in(-2, 2)$ (ή [-2, 2]) που έχουν αυτή τη ιδιότητα (υπ. $(f(x) - 1)^2 = 4 - x^2$, διατήρηση προσήμου κλπ)

Β. § 2.9 ΚΑΝΟΝΕΣ DE L' HOSPITAL

Ιστορικά στοιχεία: Ο Γάλλος Μαθηματικός *De L' Hospital* (1661-1704) ήταν μαθητής του Johann Bernoulli και έχει εκφραστεί η υποψία ότι μάλλον σ' αυτόν να οφείλονται οι κανόνες αυτοί. Πάντως οι κανόνες διατυπώθηκαν πρώτα γεωμετρικά και όχι αυστηρά, ενώ η αυστηρή διατύπωση και απόδειξή τους έγινε πολύ αργότερα, τον $19^{ο}$ αιώνα.

12. Οι κανόνες De L' Hospital (D - L) είναι προτιμότερο να διδαχθούν πριν τις ασύμπτωτες, ώστε να υπάρχει μεγαλύτερη ευχέρεια στην αντιμετώπιση δύσκολων ορίων.

13. Α. Στα θεωρήματα 1 και 2 είναι επιβεβλημένο να επισημάνουμε την *αυστηρή τήρηση* όλων των υποθέσεων των θεωρημάτων, ειδάλλως μπορεί να οδηγηθούμε σε λάθη και παράδοξα. Βέβαια, πριν απ' όλα πρέπει να ελέγχουμε αν τα όρια που θέλουμε να βρούμε έχουν έννοια. Στα θεωρήματα αυτά υποτίθεται ότι οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες κοντά στο x_0 με $g'(x) \neq 0$, αλλά στο x_0 (όταν $x_0\in R$) μπορεί και να μην παραγωγίζονται ή να μην ορίζονται καν.

Β. Ιδιαίτερα επισημαίνουμε το συμπέρασμα των κανόνων D - L : αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to\xi} f'(x)/g'(x)$, **τότε υπάρχει και** το όριο $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)/g(x)$ (και είναι ίσα) και όχι το αντίστροφο.
Αν δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to\xi} f'(x)/g'(x)$, ο κανόνας δεν λέει τίποτα: το όριο $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)/g(x)$ μπορεί να υπάρχει ή όχι, εξαρτάται από τις συγκεκριμένες συναρτήσεις. Για τον υπολογισμό του χρησιμοποιούμε άλλες γνωστές μεθόδους ή το κριτήριο παρεμβολής.
Για παράδειγμα :

Αν $f(x) = x^2 ημ\frac{1}{x}$ για $x \neq 0$ και $g(x) = x$, $x \in R$, τότε (με Κ. Π.) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

Το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\left(2xημ\frac{1}{x} - συν\frac{1}{x}\right)$ δεν υπάρχει (ο μειωτέος έχει όριο 0 -με Κ. Π.-, ενώ ο αφαιρετός οδηγεί στο όριο του συνx στο $+\infty$ ή $-\infty$, που όπως έχουμε αναφέρει στις συμπληρώσεις των ορίων-συνέχειας δεν υπάρχει).

Το όριο όμως $\lim_{x\mapsto 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} xημ\frac{1}{x} = 0$, δηλαδή υπάρχει.

- Άρα το αντίστροφο του κανόνα D-L δεν ισχύει: δηλ. αν $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$ και υπάρχει το $\lim_{x\mapsto 0}\frac{f(x)}{g(x)}$, δεν συνεπάγεται ότι υπάρχει το $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

- Αν το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ δεν υπάρχει, θα μπορούσε το όριο $\lim_{x\mapsto x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ και να μην υπάρχει:

π.χ. αν $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, τότε $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$ και το όριο

$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{3x}$ δεν υπάρχει.

Δεν υπάρχει όμως και το όριο $\lim_{x\mapsto 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\mapsto 0}\frac{x^2}{x^3} = \lim_{x\mapsto 0}\frac{1}{x}$ (βλ. και ασκήσεις 9, 17.Β).

Γ. Να επισημάνουμε (για αποφυγή λαθών) ότι δεν ισχύει (πάντα)

$\lim_{x\mapsto x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\mapsto x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$, π.χ. αν $f(x) = 1$, $g(x) = x$, $x_0 = 1$ δεν ισχύει.

Δ. Οι κανόνες D - L μπορούν να χρησιμοποιηθούν πολλές φορές διαδοχικά σε ένα όριο, αν βέβαια οδηγούν σε απλούστερα όρια, και με την προϋπόθεση ότι ισχύουν όλες οι υποθέσεις των θεωρημάτων και προπάντων ότι το τελευταίο όριο υπάρχει (πεπερασμένο ή άπειρο). Στην διαδικασία αυτή, συνήθως, είναι συχνά δυο λάθη:

i) Να μην προσεχθεί ότι έχουμε απροσδιόριστη μορφή (0/0 ή $\pm\infty/\pm\infty$) και όμως να εφαρμοστεί κανόνας D-L π.χ. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x^2-2x} = \lim_{x\to 2}\frac{2x-7}{2x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2}{2} = 1$ (σωστό όριο -3/2)

Το λάθος αυτό μπορούμε να το αποφύγουμε αν κάθε φορά που εφαρμόζουμε κανόνα D – L γράφομε το είδος της απροσδιόριστης μορφής πάνω από το ίσον.

ii) Να έχουμε οδηγηθεί με τις παραγωγίσεις σε πολύπλοκο κλάσμα που μας απογοητεύει και να μην προσέξουμε ότι *ένας μέρος* (παράγοντας ή κλάσμα) έχει «αθώο» όριο, δηλαδή όριο που προσδιορίζεται χωρίς κανόνες D-L. Έτσι ασχολούμαστε με το άλλο μέρος που είναι η καθαυτό (ανηγμένη) απροσδιόριστη μορφή.

π.χ. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{εφx - x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x - \frac{1}{1-x}}{\frac{1}{συν^2x} - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x(1-x)-1}{ημ^2x}\cdot\frac{συν^2x}{1-x}$ (με $0<|x|<1$)

απομονώνοντας το δεύτερο κλάσμα ($συν^2x/(1-x)$) βλέπομε άμεσα ότι έχει όριο 1, οπότε μένει το άλλο κλάσμα ασφαλώς απλούστερο, για να χρησιμοποιηθεί κανόνας D - L (τελικό όριο -1/2).

14. Για να πάρουν οι μαθητές μια ιδέα για την απόδειξη των κανόνων D - L μπορούμε να δώσουμε τη εξής απλή περίπτωση του κανόνα 1 ως άσκηση:
Αν f, g παραγωγίσιμες στο διάστημα (α, β), $g(x) \neq 0$ κοντά στο $\xi \in (\alpha, \beta)$ και
$f(\xi) = g(\xi) = 0$ με $g'(\xi) \neq 0$ τότε ισχύει $\lim\limits_{x \mapsto \xi} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

15. Ειδική επισήμανση των σχολίων της σελίδας 283, για τις άλλες απροσδιόριστες μορφές και την ισχύ των κανόνων και για τα πλευρικά όρια.
Επίσης να σημειώσουμε ότι πολλές άλλες απροσδιόριστες μορφές π.χ. $0(\pm\infty)$, $+\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, μπορούν να οδηγηθούν στις μορφές $\dfrac{0}{0}$ ή $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ και να αντιμετωπιστούν με τα θεωρήματα 1, 2. Αυτό γίνεται συνήθως μέσω στοιχειωδών αλγεβρικών πράξεων ή ιδιοτήτων, π.χ.

$$f(x)g(x) = \frac{g(x)}{1/f(x)}, \quad f(x) - g(x) = f(x)\left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right), \; f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)} \text{ κ.ά.}$$

(με τους κατάλληλους περιορισμούς)
π.χ. αν $\lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$, τότε έχουμε την απροσδιόριστη μορφή $\mathbf{1}^\infty$ αλλά λόγω

$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1} = e^{(x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ οδηγούμαστε στην απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)0$, αλλά :

$\lim\limits_{x \mapsto +\infty}(x+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x+1}}$ δηλαδή τελικά στην μορφή 0/0 και με εφαρμογή

του $1^{ου}$ κανόνα βρίσκουμε όριο ίσο με 1 και τελικά $\lim\limits_{x \mapsto +\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1} = e$.

16. Το όριο $\lim\limits_{x \mapsto 0}\dfrac{ημx}{x}$ δεν νομιμοποιείται να υπολογιστεί με την βοήθεια του κανόνα D- L αφού για την εφαρμογή του απαιτείται η παραγωγισιμότητα της συνάρτησης ημx, η οποία αποδείχθηκε με την βοήθεια του ορίου αυτού (βλ. σελ. 225) (κυκλικός συλλογισμός). Αν όμως η παραγωγισιμότητα της ημx δεν στηριχθεί στο όριο αυτό, τότε αυτό είναι Μαθηματικά νόμιμα και αυτό γίνεται σε μερικά βιβλία ανώτερων Μαθηματικών, όπου το ημx δεν ορίζεται με τον γνωστό στοιχειώδη τρόπο.

17. Να επισημανθεί τέλος ότι τους κανόνες De L' Hospital τους χρησιμοποιούμε μόνο σε όρια με απροσδιόριστες μορφές 0/0 ή $\pm\infty/\pm\infty$ και αφού προηγουμένως έχουμε δοκιμάσει γνωστές ιδιότητες ορίων ή αλγεβρικά τεχνάσματα που δεν απαιτούν παραγωγίσεις και βέβαια αν οδηγούν σε απλούστερα όρια. Τέλος ότι δεν πρέπει να ξεχνάμε το *κριτήριο παρεμβολής, ιδίως σε δύσκολα όρια, όταν μάλιστα περιέχουν ημίτονο ή συνημίτονο.*

Γ. § 2.9 ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

18. Τι εξυπηρετούν οι ασύμπτωτες;

Α. Χρησιμεύουν στην χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης, αφού αυτή «περιχαρακώνεται» μεταξύ αυτών.
Β. Με τις πλάγιες ή οριζόντιες ασύμπτωτες μπορούμε να βρούμε κατά προσέγγιση την τιμή μιας συνάρτησης, όταν μάλιστα ο απ' ευθείας υπολογισμός της είναι δύσκολος ή επίπονος.
Έτσι π.χ. αν μια συνάρτηση έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 3x-1$, τότε για μεγάλες τιμές του x μπορούμε να πάρουμε $f(x) \approx 3x - 1$.

19. Στον ορισμό της ασύμπτωτης που έχει συντελεστή διεύθυνσης (μη κατακόρυφης): πριν δοθεί ο ορισμός, ας παρατηρηθεί ότι η διαφορά $f(x) - (\lambda x + \beta)$ (ή $(\lambda x + \beta)- f(x)$)) εκφράζει την κατακόρυφη απόσταση στη θέση x των συναρτήσεων $f(x)$, $y = \lambda x + \beta$. Ο οριακός μηδενισμός της, συνεπάγεται και τον μηδενισμό της αντίστοιχης (κάθετης) απόστασης της γ. π, από την ευθεία που εκφράζει την γεωμετρική εικόνα ότι η ευθεία «πλησιάζει όσο θέλουμε κοντά» την γ. π. της συνάρτησης.

20. Η οριζόντια ασύμπτωτη είναι ειδική περίπτωση ($\lambda = 0$) της ασύμπτωτης $\psi = \lambda\chi + \beta$ την οποία το βιβλίο λέει πλάγια αν $\lambda \neq 0$.
Ας σημειωθεί ότι, αν η ευθεία $\psi = \lambda\chi + \beta$ είναι ασύμπτωτη της συνάρτησης φ στο $+\infty$, τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης «την συνοδεύει» στο άπειρο, δηλαδή $\lim\limits_{\chi\to+\infty} \varphi(\chi) = +\infty$ αν $\lambda > 0$ και $-\infty$ αν $\lambda < 0$ και ανάλογα για ασύμπτωτη στο $-\infty$.
($\varphi(\chi) = (\varphi(\chi)/\chi)\chi$ κλπ). Αν $\lambda = 0$ τότε $\lim\limits_{\chi\to+\infty} \varphi(\chi) = \beta$.
Δηλαδή, αναγκαία συνθήκη για να υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ ($-\infty$) για μια συνάρτηση είναι το όριό της στο $+\infty$ (αντίστοιχα $-\infty$) να είναι άπειρο. Δεν είναι ικανή η συνθήκη: π.χ. η συνάρτηση $f(x) = e^x$ έχει όριο $+\infty$, στο $+\infty$, αλλά δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ (ενώ π.χ. η $f(x) = x + 1/x$, έχει και άπειρο όριο και πλάγια ασύμπτωτη). Ανάλογη συνθήκη ισχύει και για την περίπτωση της κατακόρυφης ασύμπτωτης (εξ ορισμού). Εν τέλει, αν το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων με άκρα πραγματικούς αριθμούς τότε η συνάρτηση δεν έχει ασύμπτωτες.

21. Σχετικά με το θεώρημα της σελ. 280.

Α. Μια καλή άσκηση στα όρια είναι να δειχθεί το πρώτο μέρος του θεωρήματος (το $\beta = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - \lambda x)$, προφανές, ενώ $\frac{f(x)}{x} - \lambda = (f(x) - \lambda x)\frac{1}{x}$ κλπ)

Β. Να τονιστεί ότι και τα δυο όρια πρέπει να υπάρχουν και να είναι πραγματικοί αριθμοί. (υπάρχει το όριο, κατά το σχ. βιβλίο, σημαίνει ότι είναι πραγματικός αριθμός ή άπειρο)

- Υπάρχει περίπτωση $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \in R$ και η συνάρτηση να μην έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$:

π.χ. η συνάρτηση f(x) = x+συνx έχει $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1=\lambda$ (χρησ. Το Κ.Π.)

Αλλά $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to+\infty}$ συνx , το οποίο δεν υπάρχει (: διαισθητικά από την γ. π. και αυστηρά βλ. σελ. 9, Β αρχείου, «Συναρτήσεις όρια, συνέχεια», αλλά θεωρώντας και τις ακολουθίες $\alpha_\nu=2\nu\pi$, $\beta_\nu=2\nu\pi+\pi/2$, $\nu\in N^*$, που δίνουν διαφορετικά όρια στο συνx).

Γ. Από το θεώρημα αυτό προκύπτει και η *μοναδικότητα μιας μη κατακόρυφης* ασύμπτωτης (στο +∞ ή στο -∞) μιας συνάρτησης, που οφείλεται στην μοναδικότητα των ορίων λ, β.

Δ. Σχετικά με τους τύπους του θεωρήματος για τα λ, β: ας επισημανθεί ότι, αν ένα τουλάχιστον από τα όρια δεν είναι πραγματικός ή δεν υπάρχει, τότε η συνάρτηση *δεν έχει* ασύμπτωτη (στο +∞, αντίστοιχα στο -∞) που να τέμνει τον y- άξονα.

Ε. Επίσης μια άλλη αξιοσημείωτη παρατήρηση είναι: Αν μια συνάρτηση έχει οριζόντια ασύμπτωτη (π.χ. στο +∞) τότε αυτή είναι και η μοναδική της πλάγια ασύμπτωτη στο +∞ (αφήνεται ως άσκηση: Υπ. κατ' ανάγκη λ = 0) .

22. Για την εύρεση των πλάγιων ή οριζόντιων ασύμπτωτων είναι πολλές φορές προτιμότερο να μην εφαρμόζουμε αμέσως τους γνωστούς τύπους για το λ και το β: ίσως μια «προσεκτική ματιά» μας αποκαλύψει την ασύμπτωτη, σύμφωνα με τον ορισμό.

Αν π.χ. έχουμε την συνάρτηση $f(x)=3x-1-\frac{2}{2e^x+3\ln x}$, τότε εύκολα διαπιστώνουμε ότι η f έχει ασύμπτωτη στο +∞ , *το ορατό γραμμικό μέρος της f*, δηλαδή την ευθεία y = 3x -1. Αυτό μπορεί να γίνει και σε ρητές συναρτήσεις (με διαφορά βαθμών αριθμητή και παρανομαστή 1), όπου το πηλίκο δίνει την ασύμπτωτη, π.χ. αν $\Sigma(x)=\frac{x^3-2x^2+x+2}{x^2-1}$, τότε εκτελώντας την διαίρεση βρίσκουμε πηλίκο x - 2 και εύκολα προκύπτει ως ασύμπτωτη η y = x - 2.

23. Σχετικά με το σχόλιο της σελίδας 281: ας δοθεί και με την μορφή)και ως άσκηση):

- Η μοναδική πολυωνυμική συνάρτηση που έχει πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη είναι η πρωτοβάθμια-ευθεία, της οποίας ασύμπτωτη είναι η ίδια.
- Οι μοναδικές ρητές συναρτήσεις που έχουν πλάγιες ή οριζόντιες ασύμπτωτες είναι όσες έχουν *βαθμό αριθμητή μικρότερο ή ίσο του βαθμού του παρανομαστή αυξημένου κατά 1* (που αντιστοιχεί στο πηλίκο της διαίρεσης). Όταν ισχύει η ισότητα έχουμε πλάγια, ενώ στις άλλες περιπτώσεις οριζόντια ασύμπτωτη.
- Επί πλέον οι ρίζες του παρανομαστή μιας ρητής συνάρτησης, αν υπάρχουν, δίνουν τις κατακόρυφες ασύμπτωτες (με την προϋπόθεση ότι δεν είναι και ρίζες του αριθμητή).

24. Για μια συνάρτηση (ορισμένη σε διάστημα ή ένωση διαστημάτων):

Κατακόρυφες ασύμπτωτες αναζητούμε:

- Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η συνάρτηση δεν ορίζεται,

- Στα σημεία του πεδίου ορισμού όπου η συνάρτηση δεν είναι συνεχής. Στα σημεία συνέχειας προφανώς το όριο είναι πραγματικός και όχι άπειρο και δεν δίνουν κατακόρυφες ασύμπτωτες. Έτσι οι συνεχείς συναρτήσεις σε κλειστό διάστημα ή στο R δεν έχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Μη κατακόρυφες, δηλαδή *πλάγιες ή οριζόντιες* ασύμπτωτες, έχει έννοια να αναζητούμε μόνο όταν η συνάρτηση είναι ορισμένη κοντά στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, δηλαδή σε διαστήματα της μορφής $(\alpha, +\infty)$, $(-\infty, \beta)$ αντίστοιχα.
Ας σημειωθεί ότι μια συνάρτηση μπορεί να έχει πολλές κατακόρυφες ασύμπτωτες, αλλά μη κατακόρυφες το πολύ δυο (στο $+\infty$ ή στο $-\infty$) .

25. Με την βοήθεια της θεωρίας των ασύμπτωτων μπορούμε να αντιμετωπίσουμε ευκολότερα μια ορισμένη κατηγορία προβλημάτων στα όρια. Για παράδειγμα :
Να βρεθούν οι λ, $\mu \in R$ ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x+x^2}-\lambda x-\mu\right)=0$. Ουσιαστικά ζητούμε την μη κατακόρυφη ασύμπτωτη $y = \lambda x + \mu$ της συνάρτησης $\varphi(x)= \sqrt{1+x^2}+\sqrt{x+x^2}$ στο $+\infty$ κλπ (Απ. $\lambda=2$, $\mu=1/2$)

26. *Ισχυρισμός*: *Η ασύμπτωτη της γ. π. μιας συνάρτησης μπορεί να έχει κοινά σημεία με αυτήν.*
Αυτό είναι αληθές, όπως και για την εφαπτομένη (βλέπε Α΄ μέρος), έστω και αν μας παραξενεύει, συνηθισμένοι στις απλές αλγεβρικές καμπύλες.
Έτσι π.χ. η συνάρτηση $\varphi(x) = e^{-x}\eta\mu x$, έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ τον x - άξονα ο οποίος έχει άπειρα κοινά σημεία με την γ. π. ($\eta\mu x = 0$).
Ένα άλλο παράδειγμα είναι η $\Sigma(\chi) = \chi + \frac{\eta\mu\chi}{\chi}$, αν $\chi\neq 0$ και $\Sigma(0) = 0$, η οποία είναι συνεχής και έχει την $\psi = \chi$ ασύμπτωτη στο $+\infty$ και $-\infty$, η οποία όμως έχει άπειρα κοινά σημεία με αυτήν. Όμοια, μια κατακόρυφη ασύμπτωτη μπορεί να έχει (το πολύ ένα) κοινό σημείο με την γ. π. της συνάρτησης, π.χ. η συνάρτηση $\varphi(\chi) = \chi$ για $\chi \le 0$ και $\varphi(\chi) =1/\chi$ για $\chi > 0$, έχει ασύμπτωτη την $\chi = 0$.

- Αν όμως μια συνεχής συνάρτηση έχει πεπερασμένο πλήθος κοινών σημείων με μια πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτή της (στο $+\infty$ ή στο $-\infty$), τότε «τελικά» δεν έχουν κοινά σημεία και μάλιστα η ασύμπτωτη βρίσκεται «τελικά» εξ' ολοκλήρου «πάνω» ή «κάτω» από την γ. π. της συνάρτησης. Βλέπε σχετικά την άσκηση 30 στο τέλος.

Δ. §2.10 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

27. Ο κύριος σκοπός του Διαφορικού Λογισμού είναι η μελέτη των συναρτήσεων μέσω των παραγώγων και η χάραξη καθώς και η ερμηνεία των γραφικών τους παραστάσεων. Τον σπουδαίο αυτό σκοπό δεν πρέπει χάριν των εξετάσεων να τον αγνοήσουμε. Γι' αυτό ανεξάρτητα αν θα τίθενται σχετικά θέματα στις εξετάσεις, πρέπει να γίνει με επιμέλεια πλήρης μελέτη και σχεδίαση των γραφικών παραστάσεων τουλάχιστον 2 συναρτήσεων μέσα στην τάξη (και μετά, αν είναι δυνατόν, να χρησιμοποιηθεί και κάποιο πρόγραμμα Η.Υ. για την καλύτερη εμφάνισή της). Ιδιαίτερα επισημαίνουμε σχετικά τις ασκήσεις του βιβλίου: 4 σελ.277, 5 σελ. 278 και την άσκηση 1 σελίδα 298.

28. Οι ερωτήσεις κατανόησης (σελ. 295-298) παρουσιάζουν αρκετό ενδιαφέρον και δεν πρέπει να λησμονηθούν. Επίσης να έχουμε υπόψη ότι προτεραιότητα πρέπει να έχουν οι

ασκήσεις του βιβλίου και μετά οι δικές μας. Μετά την ολοκλήρωση του κεφαλαίου 2 και την σχετική επανάληψή του, που πρέπει να ακολουθήσει, κρίνεται επιβεβλημένη η διεξαγωγή επαναληπτικού δίωρου ή τρίωρου διαγωνίσματος.

Ε. ΑΛΛΑ ΘΕΜΑΤΑ

29. Ερώτηση συναδέλφου:
"Ποιος είναι ο καλύτερος τρόπος για να δοθεί η άσκηση 1, σελίδα 298 της κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου καθώς και η άσκηση 14, σελίδα 53 της Γενικής παιδείας στους μαθητές, ώστε να γίνει κατανοητή από αυτούς η εύρεση της παραγώγου;"

Απάντηση
Α. Άσκηση 1, σελίδα 298 της κατεύθυνσης.

Η απάντηση στις ερωτήσεις αυτές (και στις αντίστροφες τους, δηλ. από την παράγωγο στην συνάρτηση) γίνεται συνήθως με συνδυασμό των παρακάτω 4 κριτηρίων.

1. Εφαπτομένη.
Βλέπουμε αν μπορούμε να φέρουμε εφαπτομένη σε ένα σημείο της γραφικής παράστασης (γ. π.) της φ που σημαίνει ότι **η φ′ ορίζεται** στο σημείο αυτό.
Έτσι βλέπουμε ότι μόνο στην γ. π. της (β) στο 0 δεν μπορούμε να φέρουμε (μοναδική) εφαπτομένη, άρα η (β) δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, δηλ. δεν ορίζεται η φ′(0).
Αν η εφαπτομένη σε ένα σημείο ξ είναι οριζόντια (παράλληλη στον χ-άξονα) τότε η φ′ μηδενίζεται στο ξ, δηλαδή **η φ′ τέμνει τον χ-άξονα στο ξ**. Ακόμη καλό είναι να έχουμε υπόψη ότι στο διάστημα στα σημεία του οποίου η εφαπτομένη σχηματίζει οξεία γωνία με τον χ-άξονα, η φ είναι γν. αύξουσα, ενώ αν σχηματίζει αμβλεία γωνία είναι γν. φθίνουσα.

2. Μονοτονία και πρόσημο παραγώγου.
Αν η φ είναι γν. αύξουσα (και παραγωγίσιμη: κριτήριο 1) τότε $\varphi' \geq 0$ (αυτό δεν το έχει το βιβλίο - αποδεικνύεται πάντως εύκολα με βάση τον ορισμό της παραγώγου και το θεώρημα της διάταξης στα όρια- και είναι καλό να το ξέρουν οι μαθητές- και το εξάγουμε διαισθητικά, μάλιστα σε τέτοιου είδους ασκήσεις συνηθέστερα ισχύει το $\varphi'>0$ (σε κάποιο διάστημα πάντα)). Ανάλογα αν φ είναι γν. φθίνουσα, $\varphi'<0$.

3. Ευθεία.
Αν ένα τμήμα της φ είναι ευθεία (σε ένα διάστημα) δηλ. $\varphi(\chi) = \alpha\chi + \beta$ τότε $\varphi' = \alpha$. Αυτό συμβαίνει στις γ. π. (β), (δ). Γενικά αν η φ είναι πολυωνυμική ν βαθμού, η παράγωγος είναι ν-1 βαθμού.

4. Κυρτότητα και μονοτονία παραγώγου.
Αν φ είναι κυρτή (κοίλη) τότε η φ′ είναι γν. αύξουσα (φθίνουσα) και «αντίστροφα».

Με βάση τα παραπάνω έχουμε:
(α) Παρατηρούμε ότι η φ στο 0 έχει οριζόντια εφαπτομένη, άρα η φ′ μηδενίζεται στο 0, άρα τέμνει τον χ-άξονα στο Ο. Λόγω της μονοτονίας της φ, αριστερά του 0 η φ′ θα είναι αρνητική και δεξιά του 0 θετική (στην χειρότερη περίπτωση θα μηδενίζεται και κάπου αλλού). Από αυτά βγαίνει φανερά η απάντηση (Ε) και όχι η (Ζ). (επικουρικά: η φ είναι κυρτή, άρα η φ′ γν. αύξουσα για να αποκλεισθεί η (Ζ))

(β) στο 0 δεν ορίζεται η παράγωγος, ενώ δεξιά του η φ′ είναι σταθερή και θετική (κλίση α>0) και αριστερά του 0 είναι σταθερός αρνητικός αριθμός (κριτήριο1, 3). Φανερή απάντηση η (Α).

(γ) Για το (γ) (η πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση):
Η φ είναι μονότονη σε 4 διαστήματα, έστω (-∞, α], [α, 0], [0, θ], [θ, +∞), (α<0, θ>0) ενώ στις θέσεις α, 0, θ έχει τ. ακρότατα) άρα φ′(α) = φ′(0)= φ′(θ)=0, δηλ. η φ′ τέμνει τον χ-άξονα σε 3 σημεία (και απαντάται αμέσως (Β) αλλά ας πούμε ότι υπήρχε και άλλη με 3 σημεία τομής).
Παρατηρούμε εδώ ότι στα διαστήματα [α, 0], [0, θ] αλλάζει και κυρτότητα που σημαίνει (χονδρικά) ότι αλλάζει μονοτονία η φ′. Έτσι έχουμε:
Στο διάστημα (-∞, α) η φ είναι γν. φθίνουσα άρα η φ′ αρνητική μέχρι που μηδενίζεται στο α.
Στο διάστημα (α, 0) η φ είναι γν. αύξουσα άρα η φ′ θετική ενώ λόγω αλλαγής κυρτότητας (από κυρτή, κοίλη) η φ′ αυξάνει και μετά φθίνει (οπότε η φ′έχει μέγιστο μεταξύ α, 0) , παραμένουσα θετική, μέχρι να μηδενιστεί το 0.
Στο διάστημα [0, θ) η φ είναι γν. φθίνουσα άρα η φ′ αρνητική, ενώ λόγω αλλαγής κυρτότητας (από κοίλη σε κυρτή κοίλη) η φ′ φθίνει και μετά αυξάνει (οπότε η φ′έχει ελάχιστο μεταξύ 0, θ), παραμένουσα αρνητική, μέχρι να μηδενιστεί το θ .
Στο διάστημα [θ, +∞) η φ είναι γν. αύξουσα άρα η φ′ είναι θετική.
Φανερή ήδη απάντηση η (Β).

(δ) Προφανώς (κριτήριο 3) η φ′ είναι σταθερή (και θετική αφού έχει θετική κλίση) (Δ).
Για καλύτερη άσκηση σε τέτοια θέματα μπορούμε να μην κοιτάξουμε τις (Α),(Β), (Γ), (Δ), (Ε) αλλά να προσπαθήσουμε να χαράξουμε πρώτα τις γ. π. των παραγώγων των (α),(β),(γ), (δ) και μετά να ελέγξουμε.
Επίσης καλή σχετική άσκηση είναι από την γ. π. της φ′ να χαράξουμε την γ. π. της φ (βλ. άσκηση 4, σελ. 277).

Β. Άσκηση 14, σελίδα 53 Γενικής Παιδείας.

Εδώ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο τα παραπάνω κριτήρια 1, 2, 3.

(1) Η φ έχει δυο οριζόντιες εφαπτόμενες, άρα η φ′ τέμνει τον χ-άξονα σε δυο σημεία. Από αυτό και μόνο βγαίνει ως απάντηση η (β). Αν υπήρχε και άλλη με δυο κοινά σημεία θα εξετάζαμε το κριτήριο 2 της μονοτονίας κλπ.
(2) Σε δυο σημεία (γωνιακά σημεία) δεν υπάρχει εφαπτομένη, άρα σε δυο σημεία δεν ορίζεται η φ′. Άρα φανερή απάντηση η (δ).
(3) Στο 0 υπάρχει οριζόντια εφαπτομένη, άρα η φ′ τέμνει τον χ-άξονα στο σημείο Ο. Επί πλέον η φ αριστερά του 0 είναι φθίνουσα και δεξιά αύξουσα, άρα η φ′ είναι αριστερά του 0 αρνητική και δεξιά θετική. Άρα απάντηση (α).
(4) Δεν προκύπτει μόνο εξ ανάγκης η απάντηση (γ), αλλά και από το ότι η φ έχει 3 οριζόντιες εφαπτόμενες, άρα η φ′ τέμνει σε 3 σημεία τον χ-άξονα.

30. Άσκηση Διδακτικής (ΑΣΕΠ 2009)

Έστω ότι διδάσκετε Μαθηματικά κατεύθυνσης στη Γ΄ Λυκείου. Μετά την απόδειξη της πρότασης *«κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0 είναι συνεχής στο x_0»* γίνεται στην τάξη ο παρακάτω διάλογος:
Καθηγητής: Ισχύει το αντίστροφο; Δηλαδή, αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο, είναι και παραγωγίσιμη σε αυτό το σημείο;
Μαθητής Α: Όχι.
Καθηγητής: Γιατί;
Μαθητής Α: Γιατί, αν η συνάρτηση είναι συνεχής, το όριο της $f(x)$ όταν το x τείνει στο x_0 είναι $f(x_0)$ και άρα το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *είναι απροσδιόριστη μορφή. Επομένως δεν υπάρχει αυτό το όριο.*
Καθηγητής (απευθυνόμενος στην υπόλοιπη τάξη): Συμφωνείτε;
Μαθητής Β: Επειδή το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *είναι απροσδιόριστη μορφή, για άλλες συναρτήσεις μπορεί να υπάρχει και για άλλες όχι. Γι' αυτό μια συνεχής συνάρτηση δεν είναι πάντοτε παραγωγίσιμη.*

Μετά τη συζήτηση των μαθητών με τον καθηγητή η τάξη διχάστηκε. Άλλοι μαθητές συμφώνησαν με το μαθητή Α και άλλοι με το μαθητή Β.
α) Εντοπίστε τις δύο πιο σημαντικές παρανοήσεις που φαίνεται να έχουν δημιουργηθεί στην τάξη και αναφέρετε πώς αναδύονται αυτές από το διάλογο.
β) Πώς θα αντιμετωπίζατε διδακτικά το πρόβλημα που δημιουργήθηκε ώστε να βοηθήσετε τους μαθητές να ξεπεράσουν τις παρανοήσεις τους;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΔΙΑΦ. ΛΟΓΙΣΜΟΥ (Β΄ ΜΕΡΟΣ)

Κυρτότητα - Ασύμπτωτες - de L' Hospital

1. Ι. Αν μια συνάρτηση είναι κυρτή στο R, τότε πάντοτε δεν έχει τοπ. ακρότατα Σ - Λ

ΙΙ. Αν μια συνάρτηση είναι γν. αύξουσα σ' ένα διάστημα, τότε πάντοτε δεν έχει σημεία καμπής Σ - Λ

ΙΙΙ. Ένα κρίσιμο σημείο μιας συνάρτησης μπορεί να είναι θέση σημείου καμπής Σ - Λ

IV. Αν μια συνάρτηση είναι κυρτή στο R τότε έχει πάντα αντίστροφη Σ Λ

V.Τα σημεία καμπής βρίσκονται πάντα σε θέσεις εσωτερικών σημείων διαστημάτων, ενώ τα ακρότατα μπορεί να είναι και σε άκρα. Σ Λ

VI. Αν $\Sigma''(\chi) = \chi(\chi - 1)^2 (\chi - 2)^3 (\chi - 3)^4$, τότε η συνάρτηση Σ έχει σημεία καμπής στις θέσεις Α.0, 1 Β.0, 1, 2 Γ.0, 1, 2, 3 Δ.0, 1, 2, 3 Ε. 0, 2

VII. Αν η συνάρτηση Σ είναι διπλά παραγωγίσιμη και κυρτή στο R τότε ισχύει πάντα
Α. $\Sigma''(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in R$ Β. $\Sigma''(\chi) \geq 0$ για κάθε $\chi \in R$ Γ. άγνωστο το πρόσημο της Σ''.

VIII. Η εφαπτομένη σ' ένα σημείο της γ.π. μιας κοίλης συνάρτησης στο R μπορεί να έχει δυο κοινά σημεία με αυτήν Σ Λ

2. Ι. Το όριο $\lim\limits_{\chi \to +\infty} \dfrac{x}{\eta\mu x}$:
Α. δεν υπάρχει Β. δεν έχει έννοια Γ. είναι ίσο 0 Δ. είναι ίσο με $+\infty$.
ΙΙ. Αν $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \Sigma(x) = +\infty$ τότε η Σ δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες Σ Λ
ΙΙΙ. Αν η συνάρτηση Σ(x) είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \Sigma(x) = \mu \in R$ τότε η Σ έχει πάντα μοναδική μη κατακόρυφη ασύμπτωτη. Σ Λ
IV. Μια συνεχής συνάρτηση στο R δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Σ Λ

V. Αν μια συνάρτηση έχει ελάχιστο και μέγιστο, τότε δεν έχει ασύμπτωτες Σ Λ

VI. Αν η συνάρτηση $\varphi(\chi) = \dfrac{\chi^2 - 2\alpha\chi + 4}{\chi^2 - 4}$ έχει μοναδική κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $\chi = 2$ τότε Α. $\alpha = 2$ Β. $\alpha = -2$ Γ. $\alpha = 4$ Δ. $\alpha = -4$.

VII. Ο βαθμός του αριθμητή μιας ρητής συνάρτησης είναι ν, ενώ του παρανομαστή μ (ν, μ $\in N^*$). Αν η συνάρτηση έχει πλάγια (όχι οριζόντια) ασύμπτωτη, τότε ισχύει
Α. $\nu = \mu$ Β. $\nu - \mu = 1$ Γ. $\nu - \mu = 2$ Δ. $\nu < \mu + 1$
VIII. Ένας μαθητής έγραψε στο πίνακα : Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο ξ τότε ισχύει $\lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{f'(x)}{1} = f'(\xi)$.
i) Είναι σωστό αυτό ή λάθος;

ii) Αν διαπιστώνετε λάθη, σε ποια σημεία είναι αυτά και με ποιες επί πλέον υποθέσεις αυτό είναι σωστό. Είναι αυτές οι υποθέσεις περιττές ή όχι για το τελικό εξαγόμενο;

3. Να μελετηθούν οι συναρτήσεις με τύπους $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$, $g(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}$ και να γίνει η γραφική τους παράσταση στο ίδιο σύστημα αξόνων. Τι σχήματα είναι οι γραφικές τους παραστάσεις;

4. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = \ln|(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)|$ είναι κοίλη σε κάθε ένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της και στην συνέχεια ότι στην γ. π. της φ υπάρχουν 3 ακριβώς σημεία στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον x-άξονα.

5. Έστω η συνάρτηση $\varphi(\lambda) = \lambda^6 + x\lambda^4 + y\lambda^3 + z\lambda^2 + 1$, όπου x, y, z θετικοί αριθμοί.
α) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.
β) Να αποδειχθεί ότι είναι κυρτή και δεν έχει πραγματικές ρίζες.

6. Έστω $\lambda > 0$ και η συνάρτηση $\varphi(x) = x + \lambda\ln(x^2 + \lambda^2)$, $x \in R$.
α) Να βρεθούν τα ακρότατα και τα σημεία καμπής της φ.
β) Να βρεθεί η τιμή του λ για την οποία η εφαπτομένη στην γ. π. της φ σ' ένα τουλάχιστον από τα σημεία καμπής της, διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
(Απ. $\lambda=\sqrt{e/2}$)

7. Να βρεθούν οι ακέραιοι κ, λ για τους οποίους η γ. π. της συνάρτησης
$\Sigma(\chi) = \dfrac{\kappa\chi^3 + \lambda\chi^2 - \chi - 2}{\chi^2 - 1}$ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Για τις τιμές αυτές των κ, λ να εξετάσετε αν έχει πλάγιες ασύμπτωτες. (Απ. $\kappa = 1$, $\lambda = 2$)

8. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της συνάρτησης $\psi = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\chi^2 - \alpha^2}$ (τμήμα υπερβολής), όπου α, β θετικοί αριθμοί. Να αποδειχθεί ότι η απόσταση ενός σημείου $M(\kappa, \lambda)$, $\kappa > \alpha$, της γ. π. της προηγούμενης συνάρτησης από την ασύμπτωτη με θετικό συντελεστή διεύθυνσης μπορεί να γίνει όσο μικρή θέλουμε.

9. Έστω $\varphi(\chi) = \chi + \eta\mu\chi$, $\gamma(\chi) = \chi$, $\chi \in R$.
α) Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{\chi\to+\infty} \varphi(\chi) = +\infty$.
β) Δεδομένου ότι το όριο $\lim\limits_{\chi\to+\infty} \sigma\upsilon\nu\chi$ δεν υπάρχει, να δειχθεί ότι δεν υπάρχει και το όριο $\lim\limits_{\chi\to+\infty} \dfrac{\varphi'(\chi)}{\gamma'(\chi)}$. γ) Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{\chi\to+\infty} \dfrac{\varphi(\chi)}{\gamma(\chi)}$.

10. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο σύνολο $A = R-\{\pm\sqrt{5}\}$ με $f'(x) = \dfrac{1}{5-x^2}$.
α) Να εξετάσετε ως προς την κυρτότητα την συνάρτηση φ,
β) Αν $f(0) = 2$ να δειχθεί ότι ο αριθμός $\alpha = 20f(1)$ δεν είναι ακέραιος.

11. Έστω οι συναρτήσεις $\varphi(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{\lambda}{2}x^2 + x$, $\gamma(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{\lambda^2}{2}x^2 - x^2$, όπου $\lambda \in R$ σταθερά.
α) Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο R,
β) Να δείξετε ότι αν η φ έχει δυο τοπικά ακρότατα, τότε η γ δεν έχει σημεία καμπής,

γ) Να δείξετε ότι, αν η γ έχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής, τότε η φ δεν έχει τοπικά ακρότατα, αλλά έχει ένα σημείο καμπής!.

12.Α. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $x(t) = \sqrt[3]{t^3 + t^2 + 1} - \sqrt[3]{t^3 - 2t^2 + 5}$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $x = 1$ και στην συνέχεια να βρεθεί κατά προσέγγιση η τιμή $x(10^4)$.

Β. Έστω φ διπλά παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση με $\varphi(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$ και η συνάρτηση γ(x) τέτοια ώστε $\gamma(x)\varphi'(x) = 2\varphi(x)$ για κάθε $\chi \in R$. Να αποδειχθεί ότι, αν η γ.π. της φ έχει σημείο καμπής το $A(\xi, \varphi(\xi))$ τότε η εφαπτομένη στην γ. π. της $\gamma(\chi)$ στο σημείο $B(\xi, \gamma(\xi))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\psi - 2x + 5 = 0$. (Δ΄ 1995)

13. Έστω $\alpha, \beta \in R$, $\alpha > 0$ και η συνάρτηση με τύπο $y = \dfrac{\alpha x + \beta}{1 + x^2}$.

α) Να βρεθεί η αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε η συνάρτηση να έχει σημείο καμπής στη θέση -1,

β) Μα δεδομένη την συνθήκη που βρήκατε προηγουμένως, να δείξετε ότι όλα τα σημεία καμπής της συνάρτησης βρίσκονται πάνω στην ευθεία $\alpha x - 4y = 3\alpha$. (Απ. $\alpha+\beta=0$)

14. Α) Έστω Σ κυρτή συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $\Sigma(\alpha) = \Sigma(\beta)$. Να δειχθεί ότι η Σ έχει μοναδικό τοπικό ελάχιστο καθώς και (ολικό) μέγιστο ίσο με $\Sigma(\alpha)$.

Β) Έστω η συνάρτηση $\Sigma(t) = t^4 - 2t^3 + 6t^2 + 1$, $t \in R$.

i) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της,

ii) να δειχθεί ότι υπάρχουν αριθμοί ρ, θ, $\rho < 0$, $\theta > 0$, ώστε $\Sigma(\rho) = \Sigma(\theta) = 2008$.

iii) Να δειχθεί ότι η Σ έχει μέγιστο στο διάστημα $[\rho, \theta]$ ίσο με 2008.

15. Έστω φ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$ και ζ, ω μιγαδικοί με $\zeta = e^{\alpha} + i\varphi(\alpha)$, $\omega = e^{\beta} + \varphi(\beta)$, όπου $0 < \alpha < \beta$. Αν οι διανυσματικές ακτίνες των μιγαδικών ζ, ω είναι παράλληλες να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $\varphi'(\xi) = \varphi(\xi)$.

16. Α. Έστω φ, γ συναρτήσεις κυρτές και γν. αύξουσες στο R με θετικές τιμές.
Να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις $\varphi \cdot \gamma$, $e^{\varphi\gamma}$ είναι γν. αύξουσες και κυρτές.

Β. Να αποδειχθεί ότι η γ. π. κάθε κοίλης συνάρτησης στο διάστημα $(0, +\infty)$ έχει με την γ. π. της συνάρτησης $\varphi(\chi) = \kappa + \dfrac{\lambda}{\chi}$, $\chi > 0$, $\lambda > 0$, $\kappa \in R$, το πολύ δυο κοινά σημεία.

17. Α.Να βρεθούν τα όρια $A = \lim\limits_{x \to +\infty} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$, $B = \lim\limits_{x \to +\infty} x\alpha^x$, $0 < \alpha < 1$,

$$\Gamma = \lim_{\chi \to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha\chi) - \sigma\upsilon\nu(\beta\chi)}{\chi^2}, \ \alpha\beta \neq 0, \quad \Delta = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x^{-2}}, \ E = \lim_{x \to 0^+} x^{\eta\mu x}.$$

Β. Αφού πρώτα δειχθεί ότι έχει έννοια το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \eta\mu x}{x - \eta\mu x}$ στην συνέχεια να βρεθεί.

(Απ. 1)

Γ. Να βρεθούν τα όρια $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\eta\mu x} - \dfrac{1}{x} \right)$, $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\eta\mu^2 x} - \dfrac{1}{x^2} \right)$ (Απ. 0,1/3)

18. Έστω Σ συνάρτηση ορισμένη στο R με θετικές τιμές ώστε η συνάρτηση $\varphi(\chi) = \ln\Sigma(\chi)$, $x\in R$ να είναι διπλά παραγωγίσιμη . Αν $(\varphi'(x))^2 + \varphi''(x) > 0$ για κάθε $\chi\in$ R να δειχθεί ότι η συνάρτηση Σ είναι διπλά παραγωγίσιμη και κυρτή.

19. Έστω f(x) συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα (α, β) με f (x) > 0 για κάθε $x\in(\alpha, \beta)$. Αν η συνάρτηση $g(x) = \ln f(x)$ είναι γν. αύξουσα και κυρτή να δειχθεί ότι
α) η f (x) είναι γν. αύξουσα και παραγωγίσιμη,
β) ισχύει $g'(x) \geq 0$, $x\in(\alpha, \beta)$,
γ) η f (x) είναι κυρτή.

20*. Έστω f, g συναρτήσεις συνεχείς στο R τέτοιες ώστε f(x) - g(x) = x - 4 για κάθε $x\in R$ και ότι η ευθεία y = 3x-7 είναι ασύμπτωτη της γ. π. της f καθώς το x τείνει στο +∞ .
α) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)+3x+\eta\mu 2x}{xf(x)-3x^2+1}$,
β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία y = 2x-3 είναι ασύμπτωτη της γ.π. της g καθώς το x τείνει στο +∞ . (Α΄ 2000)

21*. α) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία του επιπέδου μπορεί να έχει το πολύ δυο κοινά σημεία με την γ. π. μιας κυρτής (κοίλης) συνάρτησης σ' ένα διάστημα.
β) Τι συμπεραίνετε αν τρία σημεία της γραφικής παράστασης μιας κυρτής συνάρτησης είναι συνευθειακά;
γ) Να δείξετε ότι τρία διαφορετικά σημεία της γ. π. της συνάρτησης $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}}$ αποτελούν κορυφές τριγώνου.

22*. Α. Έστω Σ κυρτή συνάρτηση στο R και ξ πραγματικός αριθμός με $\Sigma'(\xi) = \Sigma(\xi) = 0$. Να αποδειχθεί ότι η Σ έχει ελάχιστο ίσο με 0.
Β. Έστω φ διπλά παραγωγίσιμη στο συνάρτηση η οποία παρουσιάζει στο ξ τοπικό ακρότατο ίσο με 0 και ισχύει $\varphi''(\chi) > 4(\varphi'(\chi) - \varphi(\chi)$ για κάθε $\chi\in R$. Να αποδειχθεί ότι
i) η συνάρτηση $\Sigma(\chi) = e^{-2\chi}\varphi(\chi)$, $\chi\in R$ είναι κυρτή, ii) ισχύει $\varphi(\chi) \geq 0$ για κάθε $\chi\in R$.

23*. Έστω Σ κυρτή συνάρτηση στο διάστημα (κ, λ) και κ < α < β < λ. Να δειχθεί ότι
α) η συνάρτηση $A(\chi) = \frac{\Sigma(\chi)-\Sigma(\alpha)}{\chi-\alpha}$ είναι γν. αύξουσα στο διάστημα (α, β],
β) ισχύει $\Sigma(\alpha) + \frac{\Sigma(\beta)-\Sigma(\alpha)}{\beta-\alpha}(\chi-\alpha) \geq \Sigma(\chi)$ για κάθε $\chi\in[\alpha, \beta]$, με ισότητα μόνο για χ = α ή χ = β. Ποια η γεωμετρική ερμηνεία της σχέσης αυτής; Διατυπώστε ανάλογη για κοίλη συνάρτηση. γ) Ισχύει $\frac{\Sigma(\alpha)+\Sigma(\beta)}{2} \geq \Sigma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

24*. Έστω α, β , α < β, ρίζες της πρώτης παραγώγου μιας πολυωνυμικής συνάρτησης P(x) με $P'''(x) \neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha, \beta)$. Να αποδειχθεί ότι:
i) η P΄΄(x) είναι γν. μονότονη στο (α, β),
ii) η P(x) έχει μοναδικό σημείο καμπής στο διάστημα (α, β),
iii) Αν στο σημείο αυτό η P(x) έχει οριζόντια εφαπτομένη, τότε η P(x) είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

25* .Έστω φ κοίλη συνάρτηση στο διάστημα [α, β].Τότε ισχύουν

α) $\varphi(\chi) + \varphi(\alpha + \beta - \chi) \le 2\varphi\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ για κάθε $\chi \in [\alpha, \beta]$.

β) Να δειχθεί ότι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $\Sigma(\chi) = \frac{\varphi(\chi)-\varphi(\alpha)}{\chi-\alpha}$ στο διάστημα (α,. β]

και η μέγιστη της $T(\chi) = \frac{\varphi(\beta)-\varphi(\chi)}{\beta-\chi}$ στο διάστημα [α, β) είναι ίσες.

γ) Να δειχθεί ότι $\varphi(\chi) > \frac{\chi(\varphi(\beta)-\varphi(\alpha))+\beta\varphi(\alpha)-\alpha\varphi(\beta)}{\beta-\alpha}$ για κάθε $\chi \in (\alpha, \beta)$.

26. α)Να εξεταστεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $\varphi(x) = \frac{\alpha^x}{x} - 1$, $\alpha > 1$, $x > 0$.

β) Να αποδειχθεί ότι η γ. π. της $y = \alpha^x$, $\alpha > 1$, έχει κοινό σημείο με την ευθεία $y = x$ αν και μόνο αν $\alpha \le e^{1/e}$.

γ) Αν $\alpha = e^{1/e}$ ($\cong$1,4446) να δειχθεί ότι η $y = x$ εφάπτεται στην γ. π. της $y = \alpha^x$ στο σημείο (e, e) και δεν έχει άλλο κοινό σημείο με αυτήν. Ποια είναι στην περίπτωση αυτή η θέση της $y = x$ ως προς την γ. π. της αντίστροφης της $y = \alpha^x$;

δ) Αν $1 < \alpha < e^{1/e}$ να δειχθεί ότι η $y = x$ τέμνει την $y = \alpha^x$, $x > 0$, σε δυο ακριβώς σημεία (κ, κ), (λ, λ) με $\kappa < e < 1/\ln\alpha < \lambda$. Να βρεθεί στη συνέχεια πόσα κοινά σημεία έχει στην περίπτωση αυτή η γ. π. της $y = \alpha^x$ με την γ. π. της αντίστροφή της.

ε) Τι συμβαίνει στην περίπτωση $\alpha > e^{1/e}$;

27*. α) Να δειχθεί ότι η εξίσωση $\alpha^x = x$, $0 < \alpha < 1$, έχει μοναδική ρίζα, έστω ρ, η οποία ανήκει στο διάστημα (0, 1).

β) Να μελετηθεί ως προς τα ακρότατα η συνάρτηση $\varphi(x) = x\alpha^x(\ln\alpha)^2 - 1$, $x > 0$, $0 < \alpha < 1$.

γ) Αν $0 < e^{-e} \le \alpha < 1$ να δειχθεί ότι η γ. π. της $y = \alpha^x$ με την γ. π. αντίστροφή της ($\log_\alpha x$) έχουν ένα μοναδικό κοινό σημείο το (ρ, ρ) με $e^{-1} \le \rho < 1$. Μάλιστα, αν $\alpha = e^{-e}$ ($\cong$0,066) τότε η ευθεία $y = x$ εφάπτεται στην γ. π. της $y = \alpha^x$**,** καθώς και της αντίστροφής της στο σημείο (1/e, 1/e).

δ) Να βρεθεί η θέση της γ. π. της $y = e^{-x}$ με την γ. π. της αντίστροφής της.

28*. α) Να δειχθεί ότι η εξίσωση $\alpha^x = x$, $0 < \alpha < 1$, έχει μοναδική ρίζα, έστω ρ, η οποία ανήκει στο διάστημα (0, 1).

β) Αν $0 < \alpha < e^{-e}$ να δειχθεί ότι $\alpha(\ln\alpha)^2 < 1$.

γ) Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x\alpha^x(\ln\alpha)^2 = 1$, με $0 < \alpha < e^{-e}$ έχει ακριβώς δυο ρίζες λ. μ με $0 < \lambda < \rho < \mu < 1$ (μάλιστα $\rho < -1/\ln\alpha < \mu$)

δ) Να εξεταστεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $\varphi(x) = \alpha^x - \frac{\ln x}{\ln\alpha}$, $x > 0$, $0 < \alpha < e^{-e}$.

ε) Αν $0 < \alpha < e^{-e}$ τότε η γ. π. της $y = \alpha^x$ και της αντίστροφή της ($\log_\alpha x = \ln x/\ln\alpha$) έχουν τρία ακριβώς κοινά σημεία με τετμημένες γ, ρ, δ με

$0 < \gamma < \lambda < \rho < \mu < \delta < 1$ και $\alpha^\gamma = \delta$, $\alpha^\delta = \gamma$, $\alpha^\rho = \rho$.

29*. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα (0, +∞) με $\lim\limits_{\chi\to+\infty} f'(\chi) = +\infty$.

Να αποδειχθεί ότι: α) Αν $\alpha > 0$ τότε $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(f(\chi+\alpha)-f(\chi)\right) = +\infty$.

β) ισχύει $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(5^{\sqrt{x+2}} - 5^{\sqrt{x}}\right) = +\infty$.

30*. Έστω Σ παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα (1, +∞) με $|\Sigma'(\chi)| \le \frac{1}{\chi}$ για κάθε χ > 1. Να δειχθεί ότι. $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\Sigma(\chi+\sqrt{\chi})-\Sigma(\chi)\right)=0$.

31*. Έστω Σ συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [α, β) και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $\lim\limits_{\chi\to\alpha^+}\Sigma'(\chi)=\kappa\in R$. Να δειχθεί ότι η Σ είναι παραγωγίσιμη στο α και ισχύει Σ′(α) = κ.

32*. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^{\alpha}$, 0 < x < 1, α >1.

i. Αποδείξετε ότι η συνάρτηση f(x) είναι κυρτή στο διάστημα (0, 1).

ii. Αποδείξτε ότι για όλα τα x, y∈(0, 1) και α >1 ισχύει $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2}$.

iii. Αποδείξτε ότι, αν x > 0, y > 0, α > 1, x + y = 1 τότε ισχύει:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{\alpha}+\left(y+\frac{1}{y}\right)^{\alpha}\ge\frac{5^{\alpha}}{2^{\alpha-1}}.$$ (ΑΣΕΠ 2009)

33*. Α. Έστω Σ συνεχής συνάρτηση στο διάστημα (α, +∞) η οποία έχει ασύμπτωτη στο +∞ την ευθεία y = λχ + μ. Αν ρ η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης Σ(χ) = λχ + μ να δειχθεί ότι η γ. π. της Σ δεν τέμνει την ασύμπτωτη στο διάστημα (ρ, +∞) και είτε είναι εξ' ολοκλήρου πάνω από αυτήν είτε εξ' ολοκλήρου κάτω από αυτήν. Συμβαίνει το ίδιο και αν η εξίσωση Σ(χ) = λχ + μ δεν έχει ρίζες στο διάστημα (α, +∞);

Β. Να εξετάσετε αν υπάρχει διάστημα της μορφής (β, +∞) όπου η ασύμπτωτη στο +∞ της συνάρτησης $\Sigma(\chi)=\frac{\eta\mu\chi}{\chi}$ έχει με την γ. π. κοινά σημεία.

34*. Α. Να δειχθεί ότι, τρία σημεία Α(α, φ(α)), Β(β, φ(β)), Γ(γ, φ(γ)) της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης φ, είναι συνευθειακά, αν και μόνο αν ισχύει

(α - β)φ(γ) + (β - γ)φ(α) + (γ - α)φ(β) = 0.

Β. Αν μια συνάρτηση φ είναι κυρτή (αντίστοιχα κοίλη) σ' ένα διάστημα Δ, τότε κάθε ευθεία του επιπέδου έχει το πολύ δυο κοινά σημεία με την γραφική παράσταση της φ .

Γ. Αν Α, Β, Γ είναι οι γωνίες ενός τριγώνου ΑΒΓ και ισχύει

(Α - Β)ημΓ + (Β - Γ)ημΑ + (Γ - Α)ημΒ = 0 τότε το τρίγωνο αυτό είναι ισοσκελές ή ισόπλευρο.

Δ. Έστω λ∈R*. α) να εξεταστεί ως προς την κυρτότητα η συνάρτηση $\varphi(x)=e^{\lambda x}$, x∈R.

β) να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$f(x)=(3-x)e^{\lambda}+(x-1)e^{3\lambda}-2e^{\lambda x}$, x∈R, με τον x–άξονα. (Βλ. και σχετικό άρθρο στο περιοδικό «φ», τ. 4° , 2007).

Τέσσερις Ιστορικές Καμπύλες*

1. Κισσοειδής του Διοκλέους

α) Η κισσοειδής του Διοκλέους ορίζεται ως γ. τ. του σημείου Μ: έστω κύκλος διαμέτρου ΟΑ = α και Β τυχόν σημείο της εφαπτομένης του στο Α. Αν η ΟΒ τέμνει τον κύκλο στο Γ, το Μ ορίζεται από την ισότητα ΜΒ = ΟΓ.
Αν Μ(x, y) τότε αποδεικνύεται ότι

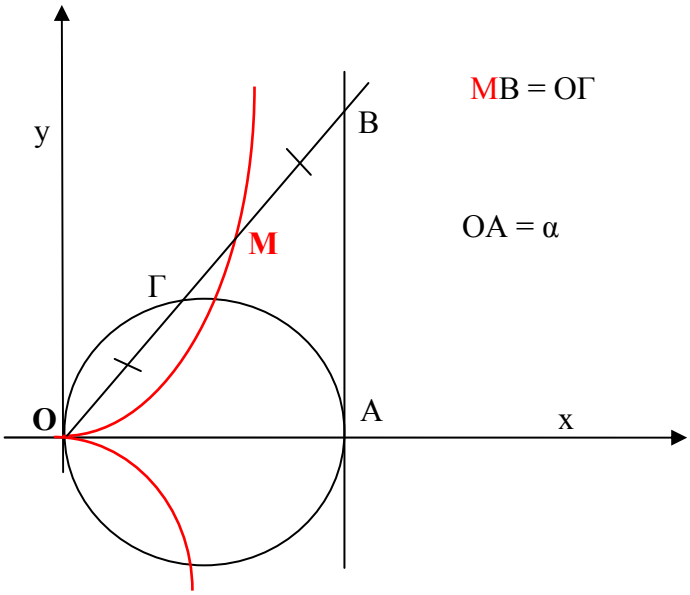
$$x^3 = y^2(\alpha - x),\ 0 \le x < \alpha,\ y > 0$$

β) Να βρεθούν οι συνεχείς συναρτήσεις y = f(x) από τις οποίες αποτελείται η καμπύλη με εξίσωση $x^3 = y^2(\alpha - x)$, $0 \le x < \alpha$, όπου α θετική σταθερά
γ) Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η μη αρνητική από αυτές τις συναρτήσεις. Στην συνέχεια να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στην γ. π. της συνάρτηση αυτής στη θέση (α/2, α/2).

Ιστορικά στοιχεία

Με την βοήθεια της *κισσοειδούς ο Διοκλής* (περίπου 180 π. Χ) «έλυσε» το «Δήλιο πρόβλημα», δηλαδή το «πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου».

Η κισσοειδής είναι και ο γεωμετρικός τόπος της προβολής της κορυφής μιας παραβολής πάνω στις διάφορες εφαπτόμενες της («ποδική» παραβολής ως προς την κορυφή της) (άσκηση).



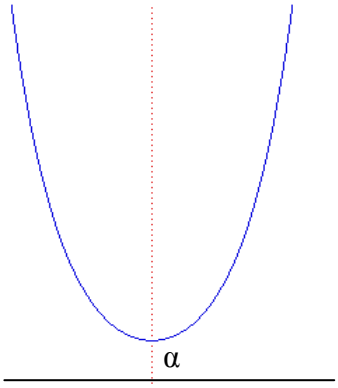
(Βλ. το σχετικό άρθρο *Κισσοειδής του Διοκλέους* στο math-her.gr - Άρθρα)

Άσκηση

Να μελετηθεί η συνάρτηση $\varphi(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{\alpha - x}}$, $0 \le x < \alpha$.

2. Αλυσοειδής καμπύλη (J. Bernoulli 1691)

Έστω η συνάρτηση $A(x) = \frac{\alpha}{2}\left(e^{\frac{x}{\alpha}} + e^{-\frac{x}{\alpha}}\right)$, $x \in R$, $\alpha > 0$.



M(x, f(x)) τυχόν σημείο της γραφικής της παράστασης και Η η προβολή του Μ στον x- άξονα. Ισχύουν:

α) Η f είναι κυρτή.

β) Το μήκος της προβολής του τμήματος ΜΗ πάνω στην κάθετη της C_f στο Μ (δηλαδή την κάθετη στην εφαπτομένη της C_f στο Μ) είναι σταθερό.

γ) Το εμβαδόν του μικτογράμμου χωρίου ΟΑΜΗ είναι ανάλογο της κλίσης της f στο x, όπου Ο η αρχή των αξόνων και Α το σημείο τομής της C_f με τον y- άξονα. (αφήνεται ως άσκηση)

Ιστορικά στοιχεία

Μια λεπτή αλυσίδα κρέμεται από δυο σημεία της, σε ύψος α > 0 από ένα οριζόντιο επίπεδο υπό την επίδραση του βάρους της. Ποια είναι η εξίσωση της καμπύλης που σχηματίζει;

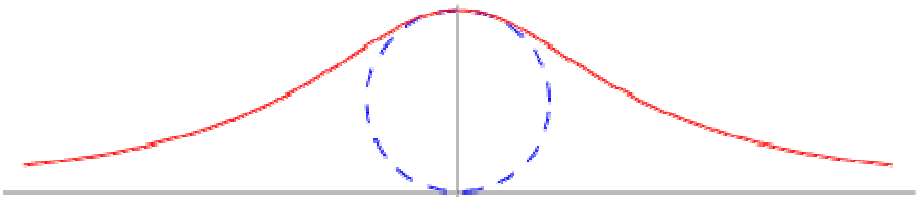
Ο *Γαλιλαίος* (1564-1642) πίστευε ότι είναι παραβολή, αλλά ο *J. Bernoulli* το 1691 απέδειξε ότι είναι μια καμπύλη με εξίσωση y = A(x). Αυτό είναι ένα «πολύ δυνατό» παράδειγμα μελέτης και έκφρασης μιας πραγματικής κατάστασης του κόσμου που ζούμε με την βοήθεια του διαφορικού λογισμού. Δεν μπορεί όμως να διδαχθεί στους μαθητές η πλήρης απόδειξη γιατί απαιτεί στοιχεία από τις διαφορικές εξισώσεις. Η καμπύλη αυτή ονομάστηκε *αλυσοειδής* (Catenary) και έχει, εκτός των (β), (γ), *πολλές άλλες* ενδιαφέρουσες ιδιότητες.

(Βλ. το σχετικό άρθρο *Αλυσοειδής – Έλκουσα*, στο math-her.gr - Άρθρα)

3. Η «Μάγισσα» ή «versiera» της Maria Agnesi (1718-1799)

Έστω κύκλος κέντρου (0, α), α > 0 και ακτίνας R = α και η εφαπτομένη του στο σημείο (0, 2α). Θεωρούμε τυχόν σημείο Σ της εφαπτομένης και την ευθεία ΟΣ η οποία τέμνει τον κύκλο στο σημείο Α. Η παράλληλη από το Α προς τον άξονα των x και η παράλληλη από το Σ προς τον άξονα των y τέμνονται στο M(x, y). Να αποδειχθεί ότι καθώς το Σ κινείται πάνω στην εφαπτομένη ο γεωμετρικός τόπος του σημείου M είναι μια καμπύλη με εξίσωση $y = \dfrac{8\alpha^3}{x^2 + 4\alpha^2}$.

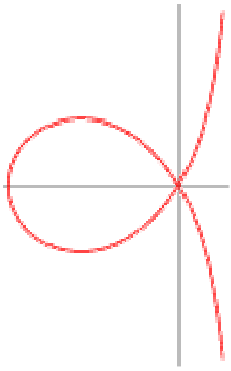
Να μελετηθεί η καμπύλη αυτή, όταν α = 1, και να γίνει η γραφική της παράσταση.



Ιστορικά στοιχεία

Η *Μαρία Ανιέζι* ήταν το πρώτο από τα 21 (!) παιδιά μιας εύπορης και μορφωμένης οικογένειας του Μιλάνου και ο πατέρας ήταν καθηγητής Μαθηματικών. Το πιο σημαντικό της έργο έχει τίτλο Analytical Institutions και προκάλεσε αίσθηση στην τότε ακαδημαϊκή κοινότητα. Είναι ένα έργο πάνω στον διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό, και αποτελούσε μια σύνθεση των μαθηματικών του Ντεκάρτ, του Νεύτωνα και του Λάϊμπνιτς. Η Agnesi είναι γνωστή από την καμπύλη με το όνομα «Witch of Agnes» (μάγισσα της Agnesi). Το όνομα «μάγισσα» προέκυψε ως εξής: Ονομάστηκε versiera από το Λατινικό ρήμα vertere που σημαίνει αναποδογυρίζω. Όμως η λέξη versiera αποτελεί σύντμηση της ιταλικής λέξης avversiera που σημαίνει «η σύζυγος του διαβόλου». Όταν το κείμενο μεταφράστηκε στα αγγλικά η λέξη versiera μπερδεύτηκε με την avversiera και μεταφράστηκε ως «μάγισσα»!.

4. Τριχοτόμος του C. Maclaurin (1698 - 1746)



Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση y = f(x) με μη αρνητικές τιμές για την οποία ισχύει

$y^2(1 + x) = x^2(3 - x)$, $-1 < x \le 3$ (γενικά $y^2(\alpha - x) = x^2(x+3\alpha)$).

Ιστορικά στοιχεία

Η καμπύλη αυτή χρησιμοποιήθηκε από τον *C. Maclaurin* το 1742 για την τριχοτόμηση μιας γωνίας (ως γνωστόν ένα από τα τρία αρχαία «άλυτα» προβλήματα των Μαθηματικών).

Αν θεωρήσουμε την προβολή της εστίας μιας παραβολής πάνω στην διευθετούσα της, τότε ο γ. τ. των προβολών του σημείου αυτού πάνω στις διάφορες εφαπτόμενες της παραβολής είναι μια *τριχοτόμος* του Maclaurin (άσκηση). –

* * * *