

ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΝΕΣΤΟΡΙΟΥ

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ



Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : ΓΕΩΡΓΙΟΣ Ε. ΚΑΡΑΦΕΡΗΣ
ΠΕ03 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

[1]

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΘΕΩΡΙΑ:

Πείραμα Τύχης

Κάθε πείραμα κατά στο οποίο η γνώση των συνθηκών κάτω από τις οποίες εκτελείται καθορίζει πλήρως το αποτέλεσμα λέγεται **αιτιοκρατικό** (deterministic) πείραμα.

Ένα πείραμα ονομάζεται **πείραμα τύχης** (random experiment) όταν δεν μπορούμε να προβλέψουμε με ακρίβεια το αποτέλεσμά του, δηλαδή ένα πείραμα με αβέβαιο αποτέλεσμα.

Δειγματικός Χώρος

Όλα τα αποτελέσματα που μπορούν να εμφανιστούν σε ένα πείραμα τύχης λέγονται δυνατά αποτελέσματα ή δυνατές περιπτώσεις του πειράματος. Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων λέγεται **δειγματικός χώρος** (sample space) και συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα Ω . Αν δηλαδή $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ είναι τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος θα είναι το σύνολο: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$.

Ενδεχόμενα

Το σύνολο που έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης λέγεται **ενδεχόμενο** (event) ή γεγονός.

Είναι φανερό ότι ένα ενδεχόμενο είναι υποσύνολο του δειγματικού χώρου.

Ένα ενδεχόμενο λέγεται **απλό** όταν έχει ένα μόνο στοιχείο και **σύνθετο** αν έχει περισσότερα στοιχεία.

Όταν το αποτέλεσμα ενός πειράματος, σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του είναι στοιχείο ενός ενδεχομένου, τότε λέμε ότι το ενδεχόμενο αυτό **πραγματοποιείται** ή **συμβαίνει**. Γι'αυτό τα στοιχεία ενός ενδεχομένου λέγονται και **ευνοϊκές περιπτώσεις** για την πραγματοποίησή του.

Ο ίδιος ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος θεωρείται ότι είναι ενδεχόμενο, το οποίο μάλιστα πραγματοποιείται πάντοτε, αφού όποιο και αν είναι το αποτέλεσμα του πειράματος θα ανήκει στο Ω . Γι'αυτό το Ω λέγεται **βέβαιο ενδεχόμενο**.

Δεχόμαστε ακόμα ως ενδεχόμενο και το κενό σύνολο \emptyset που δεν

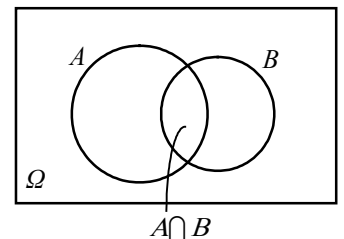
[2]

πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος τύχης. Γι' αυτό λέμε ότι το \emptyset είναι το **αδύνατο ενδεχόμενο**.

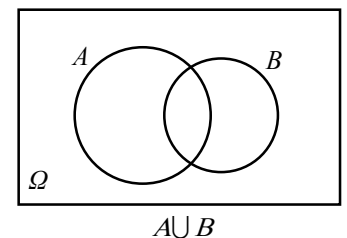
Το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου A θα το συμβολίζουμε με $N(A)$.

Πράξεις με Ενδεχόμενα

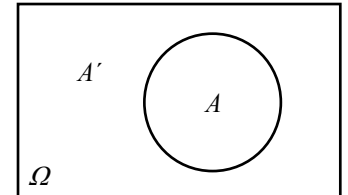
- Το ενδεχόμενο $A \cap B$, που διαβάζεται "Α τομή Β" ή "Α και Β" και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A και B .



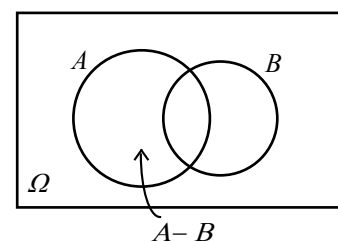
- Το ενδεχόμενο $A \cup B$, που διαβάζεται "Α ένωση Β" ή "Α ή Β" και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A , B .



- Το ενδεχόμενο A' , που διαβάζεται "όχι Α" ή "συμπληρωματικό του Α" και πραγματοποιείται, όταν δεν πραγματοποιείται το A . Το A' λέγεται και "αντίθετο του Α".



- Το ενδεχόμενο $A - B$, που διαβάζεται "διαφορά του Β από το Α" και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B . Είναι εύκολο να δούμε ότι $A - B = A \cap B'$.



Στον παρακάτω πίνακα τα A και B συμβολίζουν ενδεχόμενα ενός πειράματος και το ω ένα αποτέλεσμα του πειράματος αυτού. Στην αριστερή στήλη του πίνακα αναγράφονται διάφορες σχέσεις για τα A και B διατυπωμένες στην κοινή γλώσσα, και στη δεξιά στήλη αναγράφονται οι ίδιες σχέσεις αλλά διατυπωμένες στη γλώσσα των συνόλων.

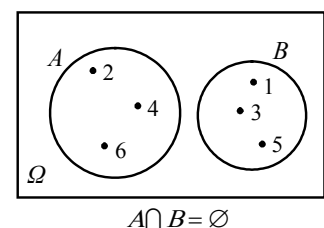
[3]

Το ενδεχόμενο A πραγματοποιείται	$\omega \in A$
Το ενδεχόμενο A δεν πραγματοποιείται	$\omega \in A'$ (ή $\omega \notin A$)
Ένα τουλάχιστον από τα A και B πραγματοποιείται	$\omega \in A \cup B$
Πραγματοποιούνται αμφότερα τα A και B	$\omega \in A \cap B$
Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B	$\omega \in (A \cup B)'$
Πραγματοποιείται μόνο το A	$\omega \in A - B$ (ή $\omega \in A \cap B'$)
Η πραγματοποίηση του A συνεπάγεται την πραγματοποίηση του B	$A \subseteq B$

Ασυμβίβαστα Ενδεχόμενα

Δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται **ασυμβίβαστα**, όταν $A \cap B = \emptyset$.

Δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα λέγονται επίσης **ξένα μεταξύ τους** ή **αμοιβαίως αποκλειόμενα**.



Δυο ακόμη χρήσιμες φράσεις:

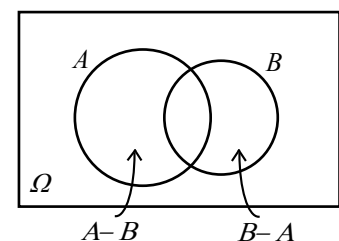
i) **Πραγματοποιείται μόνο ένα από τα A και B .**

Επειδή θέλουμε να πραγματοποιείται μόνο το A ή μόνο το B , γραμμοσκιάζουμε τις επιφάνειες των A και B με εξαίρεση την τομή τους, δηλαδή την κοινή επιφάνειά τους.

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή

πραγματοποιείται ένα μόνο από τα $A - B$ και $B - A$.

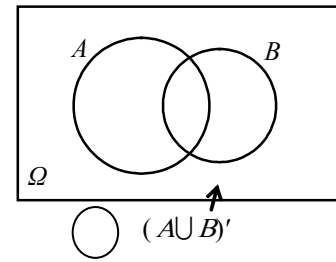
Άρα, το ζητούμενο ενδεχόμενο είναι το $(A - B) \cup (B - A)$ ή ισοδύναμα το $(A \cap B') \cup (A' \cap B)$.



[4]

ii) **Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B.**

ii) Επειδή θέλουμε να μην πραγματοποιείται κανένα από τα A και B, γραμμοσκιάζουμε την επιφάνεια του Ω που είναι εκτός της ένωσης των A και B. Στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι το ζητούμενο σύνολο είναι συμπληρωματικό του $A \cup B$, δηλαδή το $(A \cup B)'$.



Έννοια και Ιδιότητες Σχετικής Συχνότητας

Αν σε n εκτελέσεις ενός πειράματος ένα ενδεχόμενο A

πραγματοποιείται k φορές, τότε ο λόγος $\frac{k}{n}$ ονομάζεται *σχετική*

συχνότητα του A και συμβολίζεται με f_A . Ιδιαίτερα αν ο δειγματικός

χώρος ενός πειράματος είναι το πεπερασμένο σύνολο

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\lambda\}$ και σε n εκτελέσεις του πειράματος αυτού τα απλά

ενδεχόμενα $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots, \{\omega_\lambda\}$ πραγματοποιούνται $k_1, k_2, \dots, k_\lambda$ φορές

αντιστοίχως, τότε για τις σχετικές συχνότητες $f_1 = \frac{k_1}{n}, f_2 = \frac{k_2}{n}, \dots, f_\lambda = \frac{k_\lambda}{n}$

των απλών ενδεχομένων θα έχουμε:

$$1. 0 \leq f_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, \lambda \quad (\text{αφού } 0 \leq k_i \leq n)$$

$$2. f_1 + f_2 + \dots + f_\lambda = \frac{k_1 + k_2 + \dots + k_\lambda}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

Οι σχετικές συχνότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων ενός πειράματος σταθεροποιούνται γύρω από κάποιους αριθμούς (όχι πάντοτε ίδιους), καθώς ο αριθμός των δοκιμών του πειράματος επαναλαμβάνεται απεριόριστα. Το εμπειρικό αυτό εξαγόμενο, το οποίο επιβεβαιώνεται και θεωρητικά, ονομάζεται **στατιστική ομαλότητα ή νόμος των μεγάλων αριθμών**.

[5]

Κλασικός Ορισμός Πιθανότητας

Σε ένα πείραμα με n ισοπίθανα αποτελέσματα ορίζουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου A τον αριθμό:

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει άμεσα ότι:

$$1. P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1$$

$$2. P(\emptyset) = \frac{0}{N(\Omega)} = 0$$

3. Για κάθε ενδεχόμενο A ισχύει $0 \leq P(A) \leq 1$, αφού το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου είναι ίσο ή μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου.

ΣΧΟΛΙΟ

Όταν έχουμε ένα δειγματικό χώρο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ και χρησιμοποιούμε τη φράση “παίρνουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω ”, εννοούμε ότι όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα με

$$\text{πιθανότητα } P(\omega_i) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Κανόνες Λογισμού των Πιθανοτήτων

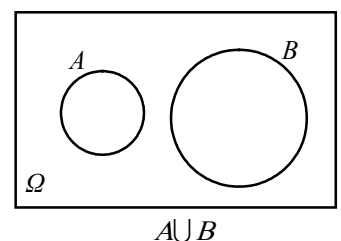
1. Για οποιαδήποτε **ασυμβίβαστα** μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $N(A) = \kappa$ και $N(B) = \lambda$, τότε το $A \cup B$ έχει $\kappa + \lambda$ στοιχεία, γιατί αλλιώς τα A και B δε θα ήταν ασυμβίβαστα. Δηλαδή, έχουμε $N(A \cup B) = \kappa + \lambda = N(A) + N(B)$.

Επομένως:



[6]

$$P(A \cup B) = \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A) + N(B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} = P(A) + P(B)$$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **απλός προσθετικός νόμος** (simply additive law) και ισχύει και για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα. Έτσι, αν τα ενδεχόμενα A , B και Γ είναι ανά δύο ασυμβίβαστα θα έχουμε $P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma)$.

2. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ισχύει:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

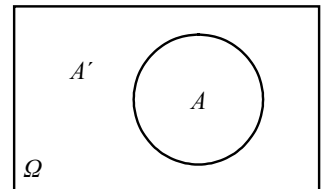
Επειδή $A \cap A' = \emptyset$, δηλαδή τα A και A' είναι ασυμβίβαστα, έχουμε διαδοχικά, σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο:

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A')$$

$$P(\Omega) = P(A) + P(A')$$

$$1 = P(A) + P(A').$$

Οπότε $P(A') = 1 - P(A)$.



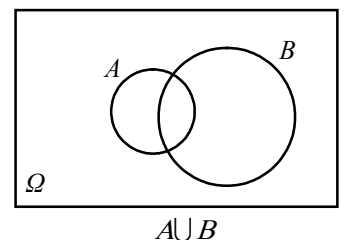
3. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για δυο ενδεχόμενα A και B έχουμε

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B), \quad (1)$$



αφού στο άθροισμα $N(A) + N(B)$ το πλήθος των στοιχείων του $A \cap B$ υπολογίζεται δυο φορές.

[7]

Αν διαιρέσουμε τα μέλη της (1) με $N(\Omega)$ έχουμε:

$$\frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} - \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} \text{ και επομένως}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **προσθετικός νόμος** (additive law).

4. Αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \leq P(B)$

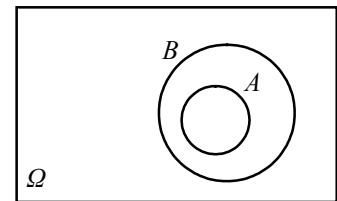
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή $A \subseteq B$ έχουμε διαδοχικά:

$$N(A) \leq N(B)$$

$$\frac{N(A)}{N(\Omega)} \leq \frac{N(B)}{N(\Omega)}$$

$$P(A) \leq P(B).$$



5. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει

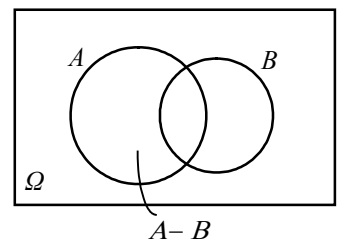
$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή τα ενδεχόμενα $A - B$ και $A \cap B$ είναι ασυμβίβαστα και $(A - B) \cup (A \cap B) = A$, έχουμε:

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B).$$

Άρα $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$



ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

1) Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω δίνονται :

$$P(A) = \frac{17}{30}, P(B) = \frac{7}{15} \text{ και } P(A \cup B) = \frac{2}{3}. \text{ Να βρεθεί η πιθανότητα}$$

$$P(A \cap B).$$

2) Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω δίνονται :

$$P(A) = \frac{3}{8}, P(B) = \frac{5}{8} \text{ και } P(A \cap B) = \frac{1}{4}. \text{ Να βρεθεί η πιθανότητα } P(A \cup B).$$

3) Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω δίνονται :

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(A \cup B) = \frac{5}{6} \text{ και } P(A \cap B) = \frac{1}{3}. \text{ Να βρεθεί η πιθανότητα}$$

$$P(B).$$

4) Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω δίνονται :

$$P(B) = 0,5, P(A \cup B) = 0,8 \text{ και } P(A \cap B) = 0,1. \text{ Να βρεθεί η πιθανότητα}$$

$$P(A).$$

5) Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω δίνονται :

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B') = \frac{2}{3} \text{ και } P(A \cap B) = \frac{1}{12}. \text{ Να βρεθεί η πιθανότητα}$$

$$P(A \cup B).$$

6) Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω δίνονται :

$$P(A') = 0,3, P(B) = 0,6 \text{ και } P(A \cup B) = 0,8. \text{ Να βρεθεί η πιθανότητα}$$

$$P(A \cap B).$$

7) Αν $\frac{P(A)}{P(A')} = \frac{3}{4}$ να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(A')$.

8) Αν $\frac{P(A)}{P(A')} = \frac{4}{5}$ να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(A')$.

9) Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω δίνονται :

$$P(A) = 0,5, P(B) = 0,4 \text{ και } P(A \cap B) = 0,2. \text{ Να βρεθεί η πιθανότητα των}$$

ενδεχομένων

i) να πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον απ τα A και B

ii) να μην πραγματοποιείται το A

iii) να πραγματοποιείται μόνο το B

iv) να μην πραγματοποιείται κανένα απ τα A και B

v) να πραγματοποιείται ένα μόνο απ τα A και B

[9]

- 10) Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω δίνονται $P(A)=0,5$, $P(B)=0,3$ και $P(A \cup B)=0,7$. Να βρεθεί η πιθανότητα των ενδεχομένων
- να πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα A και B
 - να μην πραγματοποιείται το A
 - να πραγματοποιείται μόνο το B
 - να μην πραγματοποιείται κανένα απ τα A και B
 - να πραγματοποιείται ένα μόνο απ' τα A και B
- 11) Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω δίνονται $P(A)=0,4$, $P(A \cup B)=0,8$ και $P(A \cap B)=0,3$. Να βρεθεί η πιθανότητα των ενδεχομένων
- να πραγματοποιείται το B
 - να μην πραγματοποιείται το A
 - να πραγματοποιείται μόνο το B
 - να μην πραγματοποιείται κανένα απ τα A και B
 - να πραγματοποιείται ένα μόνο απ' τα A και B
- 12) Από μια τράπουλα με 52 φύλλα παίρνουμε ένα στην τύχη. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων :
- το χαρτί είναι πέντε.
 - το χαρτί είναι καρό
 - το χαρτί είναι πέντε καρό
 - το χαρτί είναι πέντε ή καρό
- 13) Ένα κουτί περιέχει 10 Άσπρες 15 Μαύρες 5 Κόκκινες και 10 Πράσινες μπάλες. Επιλέγουμε μία μπάλα στην τύχη. Ποια είναι η πιθανότητα :
- η μπάλα να είναι Άσπρη
 - η μπάλα να μην είναι Μαύρη
 - η μπάλα να είναι Άσπρη ή Μαύρη
 - η μπάλα να μην είναι ούτε κόκκινη ούτε πράσινη .
- 14) Σε μια τάξη με 30 μαθητές , ρωτήθηκαν οι μαθητές πόσα αδέρφια έχουν και απάντησαν

Αριθμός μαθητών	4	11	9	3	2	1
Αριθμός αδερφιών	0	1	2	3	4	5

Αν επιλέξουμε έναν μαθητή στην τύχη ποιιά είναι η πιθανότητα η οικογένειά του να έχει τρία παιδιά;

[10]

- 15) Έστω τα σύνολα $\Omega = \{\omega \in \mathbb{N} / 11 \leq \omega \leq 20\}$, $A = \{\omega \in \mathbb{N} / \omega \text{ πολλαπλάσιο του } 3\}$ και $B = \{\omega \in \mathbb{N} / \omega \text{ πολλαπλάσιο του } 4\}$. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα στοιχείο του χώρου Ω , ποια είναι η πιθανότητα
- το στοιχείο να ανήκει στο A
 - Το στοιχείο να μην ανήκει στο B
 - το στοιχείο να ανήκει στο A και στο B
 - το στοιχείο να ανήκει στο A ή στο B
 - το στοιχείο να ανήκει μόνο στο A
 - το στοιχείο να μην ανήκει σε κανένα απ τα δύο σύνολα
- 16) Σε έναν αγώνα η πιθανότητα να κερδίσει ο Λευτέρης είναι 30%, να κερδίσει ο Παύλος είναι 20% και να κερδίσει ο Νίκος είναι 40%. Να βρείτε την πιθανότητα
- να κερδίσει ο Λευτέρης ή ο Παύλος
 - να μην κερδίσει ούτε ο Λευτέρης ούτε ο Νίκος.
- 17) Ένα ορισμένο κατάστημα δέχεται πιστωτικές κάρτες D ή V. Το 25% των πελατών έχουν κάρτα D, το 55% έχουν κάρτα V και το 15% έχουν και τις δύο κάρτες. Ποια είναι η πιθανότητα ένας πελάτης που επιλέγεται τυχαία να έχει μία τουλάχιστον από τις δυο κάρτες;
- 18) Το 10% των ατόμων ενός πληθυσμού έχουν υπέρταση, το 6% στεφανιαία καρδιακή ασθένεια και το 2% έχουν και τα δύο. Για ένα άτομο που επιλέγεται τυχαία ποια είναι η πιθανότητα να έχει
- τουλάχιστον μία ασθένεια;
 - μόνο μία ασθένεια;
- 19) Από τους μαθητές ενός σχολείου το 80% μαθαίνει Αγγλικά, το 30% Γαλλικά και το 20% και τις δύο γλώσσες. Επιλέγουμε τυχαίως ένα μαθητή. Να βρείτε την πιθανότητα να μη μαθαίνει καμιά από τις δύο γλώσσες.
- 20) Σε μια κωμόπολη το 15% των νοικοκυριών δεν έχουν τηλεόραση, το 40% δεν έχουν βίντεο και το 10% δεν έχουν ούτε τηλεόραση ούτε βίντεο. Επιλέγουμε τυχαίως ένα νοικοκυριό. Να βρείτε την πιθανότητα να έχει τηλεόραση και βίντεο.
- 21) Από 120 μαθητές ενός Λυκείου, 24 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, 20 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ένωσης Ελλήνων Φυσικών και

[11]

12 μαθητές συμμετέχουν και στους δύο διαγωνισμούς. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Ποια είναι η πιθανότητα ο μαθητής:

A. να συμμετέχει σ' έναν τουλάχιστον από τους δύο διαγωνισμούς;

B. να συμμετέχει μόνο σ' έναν από τους δύο διαγωνισμούς;

Γ. να μη συμμετέχει σε κανέναν από τους δύο διαγωνισμούς;

22) Στο σύλλογο καθηγητών ενός λυκείου το 55% είναι γυναίκες, το 40% των καθηγητών είναι φιλόλογοι και το 30% είναι γυναίκες φιλόλογοι. Επιλέγουμε τυχαία έναν καθηγητή για να εκπροσωπήσει το σύλλογο σε κάποια επιτροπή.

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες ο καθηγητής να είναι:

α. γυναίκα ή φιλόλογος,

β. γυναίκα και όχι φιλόλογος,

γ. ούτε γυναίκα ούτε φιλόλογος,

δ. μόνο γυναίκα ή μόνο φιλόλογος,

ε) άνδρας και φιλόλογος,

στ) άνδρας ή φιλόλογος.

23) Δίνεται ότι $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ και $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$, να βρείτε τις

πιθανότητες:

α) $P(A \cap B)$

β) $P(A - B)$

γ) $P[(A \cap B)']$

δ) $P[(A - B) \cup (B - A)]$

24) Δίνεται ότι $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ και $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$, να βρείτε τις

πιθανότητες:

α) Να μην πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα A και B.

β) Να πραγματοποιείται ένα μόνο απ τα A και B.

25) Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , ώστε να ισχύουν: Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A, B είναι $\frac{7}{8}$. Οι πιθανότητες $P(B)$, $P(A \cap B)$ δεν

είναι ίσες και ανήκουν στο σύνολο $X = \left\{ \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4} \right\}$,

α. Να βρεθούν τα $P(B)$, $P(A \cap B)$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

β. Να βρεθούν οι πιθανότητες:

[12]

- i) Να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A.
ii) Να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο A.
- 26) Το 50% των κατοίκων μιας πόλης διαβάζουν την εφημερίδα α, το 40% των κατοίκων διαβάζουν την εφημερίδα β και δεν διαβάζουν την α, ενώ το 30% των κατοίκων διαβάζουν την εφημερίδα α και δεν διαβάζουν την εφημερίδα β.
- i) Ποια είναι η πιθανότητα ένας κάτοικος της πόλης, που επιλέγεται τυχαία να διαβάζει και τις δύο εφημερίδες
ii) Ποια είναι η πιθανότητα ένας κάτοικος της πόλης, που επιλέγεται τυχαία, να διαβάζει την εφημερίδα β.
iii) Ποια είναι η πιθανότητα ένας κάτοικος της πόλης, που επιλέγεται τυχαία, να διαβάζει την εφημερίδα α ή να διαβάζει την εφημερίδα β;
iv) Ποια είναι η πιθανότητα ένας κάτοικος της πόλης, που επιλέγεται τυχαία, να μην διαβάζει καμία απ' τις δύο εφημερίδες.
- 27) Σε ένα σχολείο με 400 μαθητές διδάσκονται η αγγλική και η γαλλική γλώσσα. Κάθε μαθητής είναι υποχρεωμένος να παρακολουθεί τουλάχιστον μία από τις παραπάνω ξένες γλώσσες. Από τους παραπάνω μαθητές 340 παρακολουθούν την αγγλική γλώσσα 240 τη γαλλική γλώσσα και 40 μαθητές παρακολουθούν και τις δύο γλώσσες. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Έστω A το ενδεχόμενο να παρακολουθεί την αγγλική γλώσσα και Γ να παρακολουθεί τη γαλλική γλώσσα.
- α. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να παρακολουθεί μόνο τη γαλλική γλώσσα.
β. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να παρακολουθεί μόνο την αγγλική γλώσσα.
γ. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να παρακολουθεί μία μόνο ξένη γλώσσα από αυτές.
- 28) Έχουμε 30 σφαίρες μέσα σ' ένα δοχείο, αριθμημένες από το 1 έως το 30. Επιλέγουμε στην τύχη μία σφαίρα. Έστω A το ενδεχόμενο ο αριθμός της σφαίρας να είναι άρτιος και B το ενδεχόμενο ο αριθμός αυτός να είναι πολλαπλάσιο του 5. Αν A', B' είναι τα συμπληρωματικά ενδεχόμενα των A και B αντιστοίχως, να υπολογίσετε τις πιθανότητες :
- α. $P(A)$, $P(B)$
β. $P(A \cup B)$

[13]

$$\gamma. P(A \cup B')$$

$$\delta. P((A' \cap B) \cup (A \cap B'))$$

29) Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Για τα ενδεχόμενα A, B, Γ του Ω είναι

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A \cap B = \{1, 3, 4\}, A - B = \{2, 6\} \text{ και}$$

$$\Gamma = \{\chi \in \Omega / 1 < \chi \leq 3\}$$

α. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A), P(B), P(\Gamma)$.

β. Να βρείτε την πιθανότητα, ώστε να πραγματοποιηθεί το B και όχι το Γ .

γ. Να βρείτε την πιθανότητα, ώστε να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα B και Γ .

30) Μία Τράπεζα χορηγεί διαφόρων τύπων δάνεια στους πελάτες της.

Αν επιλεγεί τυχαία κάποιος πελάτης η πιθανότητα να έχει πάρει μόνο στεγαστικό ή μόνο καταναλωτικό δάνειο είναι 0,7 ενώ η πιθανότητα να μην έχει πάρει κανένα από τα δύο προηγούμενα δάνεια είναι 0,1.

α. Να βρείτε την πιθανότητα ένας πελάτης να έχει πάρει και τα δύο δάνεια.

β. Αν επιπλέον η πιθανότητα να έχει πάρει μόνο στεγαστικό είναι 0,6 να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

i. «έχει πάρει καταναλωτικό».

ii. «έχει πάρει μόνο καταναλωτικό».

31) Δίνεται ότι $P(A - B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$ και $P(B' - A) = \frac{1}{2}$, να βρείτε

τις πιθανότητες:

α) $P(A)$

β) $P(B)$

γ) να πραγματοποιείται ένα μόνο απ τα A και B .

δ) να μην πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα A και B

32) Σε ένα χωριό υπάρχουν μόνο 2 καφενεία το A και το B . Αν το 30% των κατοίκων πηγαίνει στο A καφενείο, το 60% δεν πηγαίνει στο B καφενείο, ενώ το 50% πηγαίνει σε ένα τουλάχιστον απ τα δύο καφενεία, να βρείτε:

α) Το ποσοστό των κατοίκων που πηγαίνει και στα δύο καφενεία.

β) Από αυτούς που πηγαίνουν σε ένα μόνο καφενείο, ποιοι είναι περισσότεροι αυτοί που πηγαίνουν μόνο στο A ή αυτοί που πηγαίνουν μόνο στο B .

[14]

- 33) Σε μια εταιρία εργάζονται 100 υπάλληλοι στο διοικητικό ή στο τεχνικό τμήμα. Από αυτούς οι 60 είναι άνδρες, 40 άτομα εργάζονται στο διοικητικό τμήμα ενώ 10 γυναίκες εργάζονται στο τεχνικό τμήμα. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο που εργάζεται στην εταιρία. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων :
- A: « Το άτομο είναι άνδρας που εργάζεται στο τεχνικό τμήμα.»
B: «Το άτομο είναι άνδρας ή εργάζεται στο διοικητικό τμήμα.»
- 34) Έστω δειγματικός χώρος Ω με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα με $\Omega = \{1, 2, 3, 4, \dots, 25\}$ και τα ενδεχόμενα αυτού :
- $A = \{k \in \Omega / k \text{ πολλαπλάσιο του } 3\}$, $B = \{k \in \Omega / k - 6 < 0\}$ και $\Gamma = \{k \in \Omega / 2k - 16 \leq 0\}$.
- α) Να βρεθούν τα ενδεχόμενα A, B και Γ.
β) Να βρεθούν οι πιθανότητες $P(A)$ και $P(\Gamma)$.
γ) Να δείξετε ότι $P(B) = \frac{1}{5}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{25}$
δ) Να βρεθούν οι πιθανότητες $P(A \cup B)$ $P(A \cup B')$ και $P(B - A')$.



Γενικό Λύκειο Νεστορίου
Σχολικό έτος 2012-2013
Βοηθητικό Υλικό της Α΄ Λυκείου