25 Θέματα γεωμετρικών τόπων στους μιγάδες

Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ! Λυκείου

Θωμάς Ραϊκόφτσαλης
Μαθηματικός

Κιλκίς 44 Άλιμος
e-mail: raik2151@gmail.com

25 Θέματα γεωμετρικών τόπων στους μιγάδες

Επιλεγμένα
Θέματα
Εξετάσεων

Μαθηματικά
Κατεύθυνσης
Γ! Λυκείου

Θωμάς Ραϊκόφτσαλης
Μαθηματικός

Κιλκίς 44 Άλιμος
e-mail: raik2151@gmail.com

Α. κλασσικά θέματα

Θέμα 1

Αν $|z-8|=|z-2|$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z και να δείξετε ότι $Re(z)=5$.

Θέμα 2

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ο αριθμός $w=\dfrac{i}{z^2+1}$ είναι πραγματικός.

Θέμα 3

Αν για τους μιγαδικούς z ισχύει $|z|=1$, να βρείτε που ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών w με $w=2z+1$.

Θέμα 4

Αν για το μιγαδικό z ισχύει, $|z-(2+2i)|=\sqrt{2}$ να βρεθεί:

Α. Ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z στο μιγαδικό επίπεδο.

Β. Η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $|z|$.

Θέμα 5

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων Μ των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει: $|z+1|=|z+4i|$. Να βρεθεί ο μιγαδικός z με το ελάχιστο μέτρο και το ελάχιστο μέτρο.

Θέμα 6

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων Μ των μιγαδικών αριθμών z, για τους οποίους ισχύει

$$Im\left(\frac{z-2}{z-6}\right)=Re\left(\frac{z-2}{z-6}\right)$$

Θέμα 7

Αν η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο κέντρου Ο(0,0) και ακτίνας $\rho=1$, να δείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για την εικόνα του μιγαδικού $w=\dfrac{2z-i}{iz+2}$.

Θέμα 8

Έστω οι μιγαδικοί $z=\dfrac{25(\lambda+i)}{4+3i}$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

Α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z.

Β. Να βρείτε τον μιγαδικό z με το μικρότερο μέτρο.

Γ. Για τον μιγαδικό z του ερωτήματος (β), να βρείτε κάθε $\mu\in\mathbb{R}$, ώστε να ισχύει

$$w=z+\frac{\mu}{z}\in\mathbb{R}$$

Β. ειδικά θέματα

Θέμα 9

Αν $w \in \mathbb{C}$ και $\theta \in (0,\pi)$, θεωρούμε την εξίσωση

$(E): \ w^2 - 2\sigma\upsilon\nu\theta \cdot w + 1 = 0$.

Α. Να λυθεί η εξίσωση (Ε).

Β. Αν w_1, w_2 οι δυο ρίζες της (Ε) τότε:

i. Να βρεθούν τα $|w_1|$ και $|w_2|$.

ii. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των ριζών w_1, w_2.

ii. Να βρεθεί το $\max|w_1 - w_2|$.

Θέμα 10

Α. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί q για τους οποίους ισχύει $(q+4)^\nu = q^\nu$, με $\nu \in \mathbb{N}$ και $\nu \geq 2$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών q.

Β. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί w για τους οποίους ισχύει $w^2 + (\bar{w})^2 |w|^2 - 576 = 0$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w.

Γ. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή m του $|w - q|$.

Θέμα 11

Έστω οι μιγαδικοί $z = 3 + 5\sigma\upsilon\nu\varphi + i(4 + 5\eta\mu\varphi)$ με $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Α. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες όλων των μιγαδικών z ανήκουν σε έναν ορισμένο κύκλο C, ο οποίος διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Β. Να βρείτε τον μιγαδικό z με το μεγαλύτερο μέτρο.

Γ. Αν για τους μιγαδικούς z και w ισχύει $z + \frac{i}{w} = 4(2+i)$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών w είναι σημεία συνευθειακά.

Θέμα 12

Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $|\alpha| + |\beta| \neq 0$, να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w = \frac{\alpha^2 + i\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$ κινείται σε μια ευθεία, για κάθε τιμή των α, β.

Θέμα 13

Να αποδειχθεί ότι για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού $\theta \in [0, 2\pi)$ η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z = (1 - \eta\mu\theta) + (2 + \sigma\upsilon\nu\theta)i$ κινείται σε έναν κύκλο, ο οποίος και να προσδιοριστεί.

Θέμα 14

Έστω Μ, Ν οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z και w αντίστοιχα, οι οποίοι συνδέονται με τη σχέση $w = z + \frac{8}{z}$. Αν το Μ κινείται σε έναν κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 2, να αποδειχθεί ότι το Ν κινείται σε μια έλλειψη.

Γ. θέματα εξετάσεων

Θέμα 15

Α. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί w με $\left|w-\sqrt{3}-i\right|=1$.
Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w.
(Κύκλος)

Β. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z για τους οποίους ισχύει: $\frac{z-i}{z+i}=\left|\frac{z-i}{z+i}\right|i$.
Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z.
(Ημικύκλιο)

Γ. Να βρεθούν:
- Η μέγιστη τιμή M του $|w-z|$,
- Η ελάχιστη τιμή m του $|w-z|$,
- Το $I=\lim\limits_{x\to M^{+}}\int_{x-4}^{2x-8}\ln(t-4)dt$.

Θέμα 16

Α. Έστω οι μιγάδες z τέτοιοι ώστε να ισχύει $10z-20iz-10\bar{z}-20i\bar{z}=0$, καθώς και η συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\frac{2x^2-1}{x}$. Να δειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z στο μιγαδικό επίπεδο και η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g, ταυτίζονται.

Β. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση έχει δυο κοινά σημεία με την ασύμπτωτη της συνάρτησης g. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας θετικός αριθμός x_0 τέτοιος ώστε: $f(x_0)=x_0\cdot f'(x_0)$.

Θέμα 17

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με $w=\frac{z+i}{1+iz}$ με $z\neq i$.

Α. Να δείξετε ότι ισχύει $w\neq -i$.

Β. Να δείξετε ότι $\left|\frac{w-i}{w+i}\right|=|z|$.

Γ. Αν M η εικόνα του μιγαδικού αριθμού w στο επίπεδο και ισχύει ότι $|z|=1$ και , να δείξετε ότι το σημείο M ανήκει στον άξονα το $x'x$, δηλαδή ότι $w\in\mathbb{R}$.

Δ. Να δείξετε την ισοδυναμία $w\in\mathbb{I} \Leftrightarrow z\in\mathbb{I}$.

Ε. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση f στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)>1$ και έστω $z=f(\alpha)\cdot i$ και $w=f(\beta)\cdot i$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (α,β).

Θέμα 18

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ell nx + x - 1,\ x > 0$

Α. Να αποδείξετε ότι:

α. Η f αντιστρέφεται

β. Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση.

Β. Για τον μιγαδικό αριθμό z με $z \neq 4 + 3i$ ισχύει

$$\ell n|z - 4 - 3i| = 1 - |z - 4 - 3i|.$$

α. Να βρείτε το σύνολο των εικόνων του z.

β. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z - \bar{z}|$.

γ. Να αποδείξετε ότι $9 \leq |z + 4 + 3i| \leq 11$.

Θέμα 19

Έστω ο μιγαδικός $z \in \mathbb{C}^*$ και η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \frac{e^{x \cdot |z|}}{x^2 + |z|^2}$$

Α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z αν είναι γνωστό ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.

Β. Αν $|z| = 1$ να δείξετε ότι: $\int_0^1 f(x)dx > \frac{1}{2}\ln 2$

Γ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ να δείξετε ότι: $|z| \geq 1$

Θέμα 20

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής με $f(1) = 1$ και $z \in \mathbb{C} - \{1\}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : g(x) = \int_x^{x^2} |z - 1| f(t)dt - \left|z - \frac{1}{z}\right| \cdot (x - 1)$$

Α. **Να βρείτε τον $g'(1)$**

Β. **Αν $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι:**

$$|z - 1| = \left|z - \frac{1}{z}\right|$$

Γ. **Να δείξετε ότι:**

$$\text{Re}(z) = -\frac{1}{2}$$

Θέμα 21

Έστω $z \in \mathbb{C}^* - \{i\}$. Θεωρούμε και τη συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Α. **Αν $e^x \geq x + |z|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι οι εικόνες του z ανήκουν σε κυκλικό δίσκο.**

Β. **Αν για κάθε $x \geq 0$ ισχύει: $\int_0^x |z| \cdot f(t)dt \leq e^x - 1$.**

δείξτε ότι υπάρχει $\alpha \geq 0$ τέτοιο ώστε:

$$f(\alpha) \leq \frac{1}{|z|} \cdot e^\alpha$$

Γ. **Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:**

$$\int_0^x |z| \cdot f(t)dt = e^x - 1$$

Να βρείτε τον z όταν: $f(x) = \dfrac{e^x}{|z - i|}$

Θέμα 22

Δίνονται:

Η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$ με $f(1) = 0$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$.

Ο μιγαδικός $z \in C$ με $1m(z) \geq 0$.

Η συνάρτηση $g : R \to R$ με $g(x) = \int_0^x |z| \cdot f(t)dt - 2x\int_0^1 e^{f(xt)}dt + 2x$.

Α. Να δείξετε ότι η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και να βρείτε τις $g'(x)$, $g''(x)$.

Β. Αν ισχύει $g'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in R$ τότε:

i. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο.

ii. Να δείξετε ότι η εικόνα του $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{4}{z}\right)$ κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα που βρίσκεται στον άξονα x΄x.

Θέμα 23

Α. **Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z \in \mathbb{C}$.**
Αν για τον z ισχύει η σχέση: $(1+i)z + (1-i)\bar{z} + 4 = 0$, να δείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται σε ευθεία (ε).

Β. **Αν η ευθεία (ε) του ερωτήματος (α) είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής**

παράστασης της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=\alpha x+\beta+\frac{x^2}{e^x}$ για $x\to+\infty$, να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β.

Γ. Να βρεθεί η ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με $g(x)=\frac{f(x)}{x}$, $x\neq 0$, για $x\to+\infty$.

Θέμα 24

Ένα κινητό κινείται στο μιγαδικό επίπεδο, ώστε την τυχαία χρονική στιγμή $t\in[0,\,2\pi)$ η θέση του να είναι η εικόνα του μιγαδικού

$$z=\eta\mu t+i\left(\frac{9}{8}-\sigma\upsilon\nu 2t\right)$$

Α. Να αποδείξετε ότι το κινητό κινείται πάνω σε μια ορισμένη παραβολή.

Β. Να βρείτε τη θέση του κινητού που είναι πιο κοντά στην αρχή των αξόνων.

Γ. Να βρείτε τις θέσεις του κινητού τις χρονικές στιγμές που οι ρυθμοί μεταβολής των συντεταγμένων του στο μιγαδικό επίπεδο είναι ίσοι.

Θέμα 25

Α. Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z\in\mathbb{C}$. Αν για τον z ισχύει η σχέση: $(1+i)z+(1-i)\overline{z}+4=0$, να δείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται σε ευθεία (ε).

Β. Αν η ευθεία (ε) του ερωτήματος (α) είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=\alpha x+\beta+\frac{x^2}{e^x}$ για $x\to+\infty$, να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β.

Γ. Να βρεθεί η ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με $g(x)=\frac{f(x)}{x}$, $x\neq 0$, για $x\to+\infty$.