ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α : ΘΕΩΡΙΑ

Ορισμός:
Συνάρτηση (function) είναι μια διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο κάποιου άλλου συνόλου B.

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με συναρτήσεις στις οποίες το σύνολο A, που λέγεται *πεδίο ορισμού* της συνάρτησης, είναι υποσύνολο του συνόλου R των πραγματικών αριθμών, ενώ το B συμπίπτει με το R.

Οι συναρτήσεις αυτές λέγονται **πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής** και τις οποίες στο εξής θα τις λέμε απλώς **συναρτήσεις**. Η συνάρτηση συμβολίζεται συνήθως με ένα από τα μικρά γράμματα f, g, h, φ, σ κτλ. του λατινικού ή του ελληνικού αλφαβήτου. Έστω λοιπόν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A. Αν με τη συνάρτηση αυτή το $x \in A$ αντιστοιχίζεται στο $y \in B$, τότε γράφουμε $y = f(x)$ και διαβάζουμε "y ίσον f του x". Το $f(x)$ λέγεται **τιμή της f στο x**. Το γράμμα x, που συμβολίζει οποιοδήποτε στοιχείο του A, ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το y, που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο x και εξαρτάται από την τιμή του x, λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

ΣΧΟΛΙΟ
Αν και συνήθως χρησιμοποιούμε το γράμμα f για το συμβολισμό μιας συνάρτησης και τα γράμματα x και y για το συμβολισμό της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβλητής αντιστοίχως, ωστόσο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και άλλα γράμματα. Έτσι, για παράδειγμα, οι τύποι $f(x) = \frac{1}{2}gx^2$ και $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$ ορίζουν την ίδια συνάρτηση.

Πράξεις με Συναρτήσεις

Αν δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο A, τότε ορίζονται και οι συναρτήσεις:

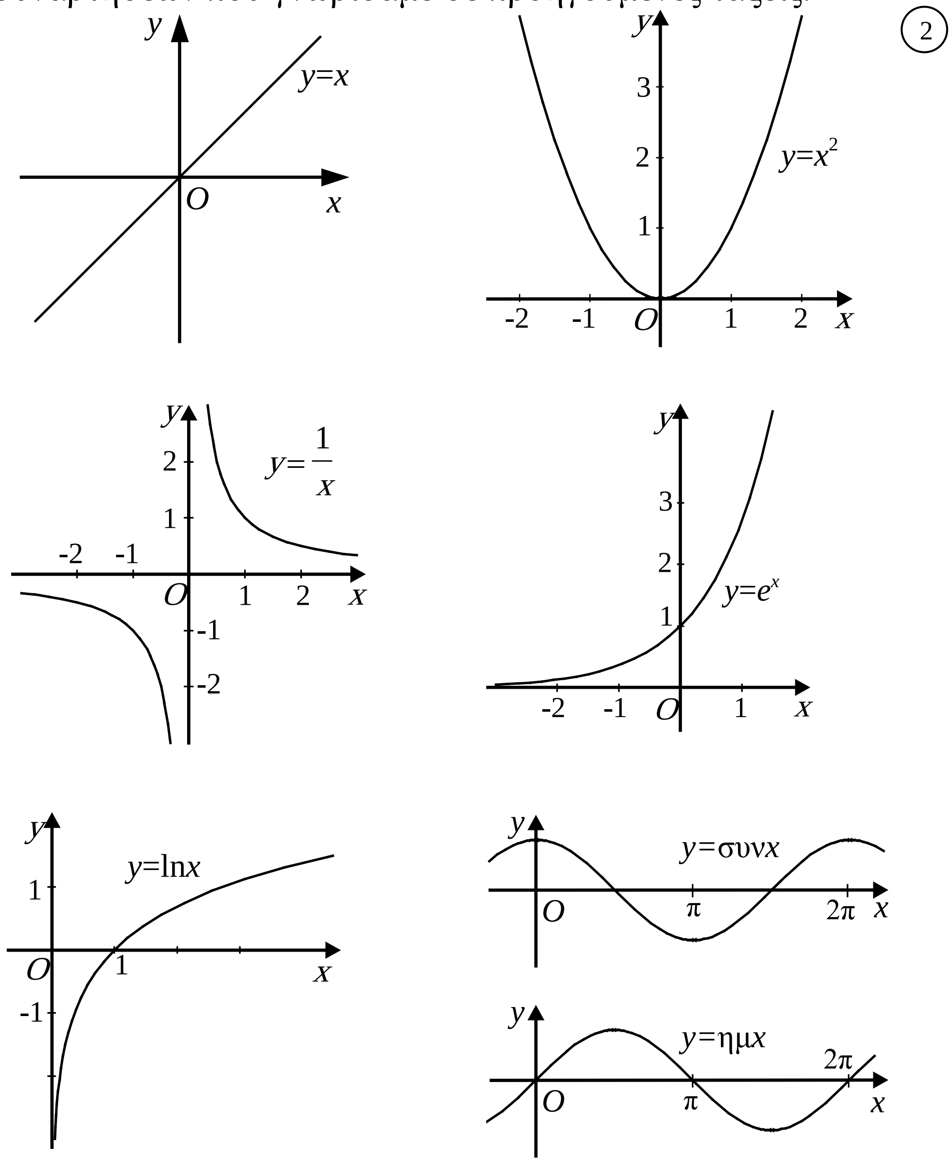
- Το άθροισμα $S = f + g$, με $S(x) = f(x) + g(x)$, $x \in A$
- Η διαφορά $D = f - g$, με $D(x) = f(x) - g(x)$, $x \in A$
- Το γινόμενο $P = f \cdot g$, με $P(x) = f(x) \cdot g(x)$, $x \in A$ και

- Το πηλίκο $R = \dfrac{f}{g}$, με $R(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, όπου $x \in A$ και $g(x) \neq 0$.

Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A. **Γραφική παράσταση** ή **καμπύλη της** *f* σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy λέγεται το σύνολο των σημείων $M(x,(f(x))$ για όλα τα $x \in A$. Επομένως, ένα σημείο $M(x,y)$ του επιπέδου των αξόνων ανήκει στην καμπύλη της *f*, μόνο όταν $y = f(x)$. Η εξίσωση λοιπόν $y = f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα ζεύγη (x,y) που είναι συντεταγμένες σημείων της γραφικής παράστασης της f και λέγεται **εξίσωση της γραφικής παράστασης της** $\boldsymbol{f}$.

Στα παρακάτω σχήματα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις ορισμένων συναρτήσεων που γνωρίσαμε σε προηγούμενες τάξεις.



Μονοτονία - Ακρότατα Συνάρτησης

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα *Δ* του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, και **γνησίως φθίνουσα** στο *Δ*, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

Μια συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα λέγεται **γνησίως μονότονη**.

Τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε *x* σε μια περιοχή του x_1, και **τοπικό ελάχιστο** στο $x_2 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_2)$ για κάθε *x* σε μια περιοχή του x_2.

Τα μέγιστα και τα ελάχιστα μιας συνάρτησης, τοπικά ή ολικά, λέγονται **ακρότατα** της συνάρτησης.

Όριο Συνάρτησης

Λέμε λοιπόν ότι η f έχει στο σημείο x_0, όριο (limit) τον αριθμό l και γράφουμε $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ όταν: το *x* παίρνει τιμές που τείνουν (πλησιάζουν πάρα πολύ κοντά) στο x_0, $(x \to x_0)$, τότε το $f(x)$ (δηλαδή το y) παίρνει τιμές που τείνουν (πλησιάζουν πάρα πολύ κοντά) στο l $(f(x) \to l)$.
Μοναδική προϋπόθεση για να μπορούμε να εξετάσουμε αν υπάρχει το όριο μιας συνάρτησης σ' ένα σημείο στο x_0, είναι να παίρνει τιμές κοντά στο x_0, είτε ορίζεται στο x_0 είτε όχι .

Ιδιότητες ορίων

Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν στο x_0 όρια πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_2$ όπου ℓ_1 και ℓ_2 πραγματικοί αριθμοί, τότε αποδεικνύεται ότι:

- $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \ell_1 + \ell_2$
- $\lim_{x\to x_0}(kf(x)) = k\ell_1$
- $\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = \ell_1\ell_2$
- $\lim_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$

- $\lim_{x \to x_0} (f(x))^\nu = \ell_1^\nu$
- $\lim_{x \to x_0} \sqrt[\nu]{f(x)} = \sqrt[\nu]{\ell_1}$.

Συνέχεια συνάρτησης

Ορισμός :
Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα είναι ότι η γραφική της παράσταση είναι μια συνεχής καμπύλη, δηλαδή για το σχεδιασμό της δε χρειάζεται να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί.

Αποδεικνύεται ότι οι γνωστές μας συναρτήσεις, πολυωνυμικές, τριγωνομετρικές, εκθετικές, λογαριθμικές, αλλά και όσες προκύπτουν από πράξεις μεταξύ αυτών είναι συνεχείς συναρτήσεις. Έτσι ισχύει για παράδειγμα $\lim_{x \to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$, $\lim_{x \to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$ και $\lim_{x \to x_0} \varepsilon\phi x = \varepsilon\phi x_0$ (όταν συν$x_0 \neq 0$).

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Παράγωγος της f στο $x = x_0$

Αν $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ το όριο υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0**, συμβολίζεται με $f'(x_0)$ και διαβάζεται “f τονούμενο του x_0”. Έχουμε λοιπόν:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$$

ΠΑΡΑΡΗΡΗΣΕΙΣ:

- Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει **το ρυθμό μεταβολής** (rate of change) του $y = f(x)$ ως προς το x, όταν $x = x_0$.
- Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης που είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο σημείο

$(x_0, f(x_0))$ θα είναι $f'(x_0)$, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ ως προς x όταν $x = x_0$.

- Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$ θα είναι τη χρονική στιγμή t_0: $\upsilon(t_0) = f'(t_0)$, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της $f(t)$ ως προς t όταν $t = t_0$.

ΣΧΟΛΙΟ

Υπάρχουν και συναρτήσεις οι οποίες δεν έχουν παράγωγο σε ένα σημείο. Όπως είναι, για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = |x|$ στο $x_0 = 0$. Διότι όταν $h < 0$, έχουμε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h} = -1,$$

ενώ όταν $h > 0$, έχουμε $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{h} = 1$, που σημαίνει ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός Παραγώγου

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A, και B το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση, με την οποία κάθε $x \in B$ αντιστοιχίζεται στο $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται (πρώτη) **παράγωγος** (derivative) **της *f* και συμβολίζεται με** f'.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Η παράγωγος της συνάρτησης f' λέγεται **δεύτερη παράγωγος** της f και συμβολίζεται με f''.
- Σύμφωνα με τα προηγούμενα αν η τετμημένη ενός κινητού που κινείται ευθυγράμμως είναι $x(t)$ τη χρονική στιγμή t, τότε η ταχύτητά του θα είναι $\upsilon(t) = x'(t)$.

- Αν η συνάρτηση υ είναι παραγωγίσιμη, τότε η επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή t θα είναι η παράγωγος της ταχύτητας, δηλαδή θα ισχύει $\alpha(t)=\upsilon'(t)$ ή ισοδύναμα $\alpha(t)=x''(t)$.

Παραγώγιση Βασικών Συναρτήσεων

Έως τώρα η παραγώγιση μιας συνάρτησης f γινόταν με τη βοήθεια του τύπου $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Στη συνέχεια θα γνωρίσουμε μερικούς κανόνες που διευκολύνουν τον υπολογισμό της παραγώγου πιο πολύπλοκων συναρτήσεων.

- **Αν f(x)=c να αποδείξετε ότι** $f'(x)=0$

Απόδειξη:

για $h\neq 0$: $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}0=0$

Άρα $(c)'=0$.

- **Αν f(x)=x να αποδείξετε ότι** $f'(x)=1$

Απόδειξη:

για $h\neq 0$: $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim\limits_{h\to 0}1=1$

Άρα $(x)'=1$.

- **Η παράγωγος της συνάρτησης** $f(x)=x^\rho$

Αν $f(x)=x^2$ να δείξετε ότι $f'(x)=2x$

Απόδειξη:

για $h\neq 0$: $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{x^2-2xh+h^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x$

Άρα $(x^2)'=2x$

- Αποδεικνύεται ότι (χωρίς απόδειξη για μας!!!!)
  $(x^{\nu})' = \nu x^{\nu-1}$, όπου ν φυσικός .
  Ο τύπος αυτός ισχύει και στην περίπτωση που ο εκθέτης είναι ρητός αριθμός.

Με εφαρμογή του παραπάνω κανόνα έχουμε :

- $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1\cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = \dfrac{-1}{x^2}$,
- $\boxed{}$
- $\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

  και γενικεύοντας
- $\boxed{}$, όπου ρ ρητός αριθμός .

- **Η παράγωγος του** ημx **και του** συνx (χωρίς απόδειξη για μας)

για τη συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ αποδεικνύεται ότι (ημx)$'$ = συνx
για τη συνάρτηση $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ αποδεικνύεται ότι $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$.

- **Η παράγωγος του** e^x **και του** $\ln x$ (χωρίς απόδειξη για μας)

Για την εκθετική και τη λογαριθμική συνάρτηση, με βάση τον αριθμό e, αποδεικνύεται ότι $(e^x)' = e^x$ και $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Κανόνες Παραγώγισης

- Να αποδείξετε ότι $\left(c\cdot f(x)\right)' = c\cdot f'(x)$

Απόδειξη:

Έστω η συνάρτηση $F(x) = cf(x)$.
Έχουμε για $h \neq 0$:

$$\left(c\cdot f(x)\right)' = F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{c\left(f(x+h)-f(x)\right)}{h}\right] = c\lim_{h\to 0}\left[\frac{\left(f(x+h)-f(x)\right)}{h}\right] = cf'(x)$$

Άρα $(c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x)$.

- **Να αποδείξετε ότι** $\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x)$

Απόδειξη:

Έστω η συναρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$.

Έχουμε για $h\neq 0$:

$$\left(f(x)+g(x)\right)' = F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)+g'(x)$$

Άρα $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$

- **Παράγωγος των συναρτήσεων** $f(x)\cdot g(x)$ **και** $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (χωρίς απόδειξη για μας)

Για το γινόμενο και το πηλίκο συναρτήσεων αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω κανόνες παραγώγισης:

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}.$$

- **Η παράγωγος σύνθετης συνάρτησης** $f\left(g(x)\right)$, **και δύναμης συνάρτησης** $f^{\nu}(x)$ (χωρίς απόδειξη για μας)

Αποδεικνύεται ότι για την παράγωγο μιας σύνθετης συνάρτησης και μιας δύναμης συνάρτησης ισχύει:

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

$$\left(f^{\nu}(x)\right)' = f^{\nu-1}(x)\cdot f'(x).$$

Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζονται οι βασικοί τύποι και κανόνες παραγώγισης.

• $(c)' = 0$ • $(x)' = 1$ • $(x^{\rho})' = \rho x^{\rho-1}$ • $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ • $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ • $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$ • $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$ • $(\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ • $(\sigma\phi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$ • $(e^x)' = e^x$ • $(\ell n x)' = \frac{1}{x}$	• $(cf(x))' = cf'(x)$ • $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$ • $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ • $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ • $\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))\cdot g'(x)$ • $\left(f^{\nu}(x)\right)' = f^{\nu-1}(x)\cdot f'(x)$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Το Κριτήριο της Πρώτης Παραγώγου

Ια τη μονοτονία μιας συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ αποδεικνύεται ότι:

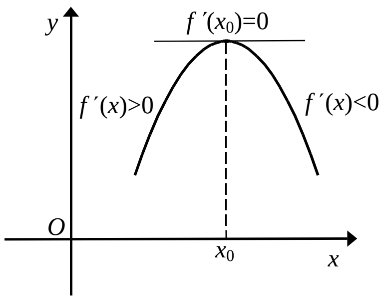
- Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα *Δ* και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του *Δ*, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο *Δ*.
- Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα *Δ* και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του *Δ*, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο *Δ*.

(χωρίς απόδειξη για μας)

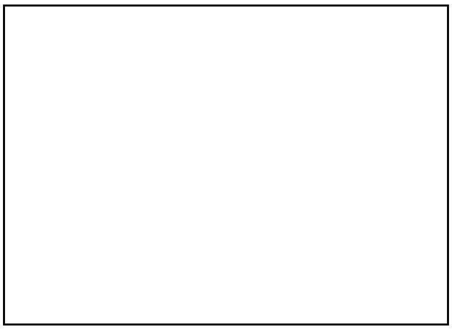
Για τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης f αποδεικνύεται ότι:

- Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ για $x_0 \in (\alpha,\beta)$, $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α,β) για $x=x_0$ μέγιστο. (Σχήμα (α))
- Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ για $x_0 \in (\alpha,\beta)$, $f'(x)<0$ στο (α,x_0) και $f'(x)>0$ στο (x_0,β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α,β) για $x=x_0$ ελάχιστο. (Σχήμα (β))

(χωρίς απόδειξη για μας)



(α)



(β)

ΜΕΡΟΣ Β : ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ(ΕΙΣΑΓΩΓΗ)

1) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x$,να υπολογίσετε τις τιμές της $f(1), f(2)$ και $f(-1)$.

2) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $\phi(t)=t^2-5t+6$ να υπολογίσετε τις τιμές της $\phi(1), \phi(0), \phi(-1)$. Για ποιες τιμές του t ισχύει φ(t)=0;

3) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $h(\theta)=\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta$ να υπολογίσετε τις τιμές της $h(0)$ $h\left(\frac{\pi}{2}\right)$ $h\left(\frac{\pi}{6}\right)$ και $h(\pi)$. Για θ∈[0,π] να λυθεί η εξίσωση:h (θ)=0.

4) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{2}\ln x^2$ να υπολογίσετε τις τιμές της $g(-1), g(e)$ και $g\left(\frac{1}{e}\right)$. Να λυθεί η εξίσωση g(x)=0.

5) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-x$, να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

6) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x+1}{x-3}$, να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

7) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{2x}{(x-2)(x-3)}$, να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

8) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{3x-2}{x^2-x}$, να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

9) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x+2}{x^2-9}$, να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

10) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x+1}{x^2-5x+6}$, να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

11) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x-2}$, να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

12) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x-2}\sqrt{x-4}$, να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

13) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x-1}\sqrt{5-x}$, να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

14) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$, να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

15) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2-1}$, να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

16) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x-3)$, να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

17) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x^2-2x)$, να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

18) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x^2-4)$, να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

19) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4$, να βρεθούν τα σημεία τομής της συνάρτησης με τους άξονες.

20) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-1$, να βρεθούν τα σημεία τομής της συνάρτησης με τους άξονες.

21) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x$, να βρεθούν τα σημεία τομής της συνάρτησης με τους άξονες.

22) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-5x+6$, να βρεθούν τα σημεία τομής της συνάρτησης με τους άξονες.

23) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-1}$, να βρεθούν τα σημεία τομής της συνάρτησης με τους άξονες.

24) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x-3}$, να βρεθούν τα σημεία τομής της συνάρτησης με τους άξονες.

25) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x+k$, να βρεθεί ο αριθμός k ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης να διέρχεται απ' το σημείο Μ(1, 3).

26) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=x^2-\ln x+2\alpha$, να βρεθεί ο αριθμός α ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης να διέρχεται απ’ το σημείο Μ(1, 5).

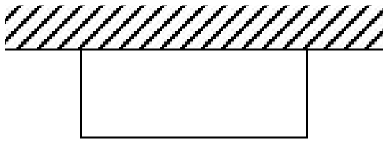
27) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=x^2-2\beta x+6$, να βρεθεί ο αριθμός β ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης να διέρχεται απ’ το σημείο Μ(2, -2).

28) ✍ Δίνονται οι συναρτήσεις $f\left(x\right)=x^2-2x+6$ και $g\left(x\right)=3x$, να βρεθούν τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων.

29) ✍ Δίνονται οι συναρτήσεις $f\left(x\right)=x^2$ και $g\left(x\right)=2x$, να βρεθούν τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων.

30) ✍ Δίνονται οι συναρτήσεις $f\left(x\right)=\dfrac{2}{x}$ και $g\left(x\right)=x+1$, να βρεθούν τα πεδία ορισμού και τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων.

31) ✍ Δίνονται οι συναρτήσεις $f\left(x\right)=\sqrt{x}$ και $g\left(x\right)=x^2$, να βρεθούν τα πεδία ορισμού και τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων.



32) ✍ Αν $f(x)=3x^2-2x-1$ και $g(x)=2x-1$, να βρείτε τις συναρτήσεις $f(x)+g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

33) ✍ Αν $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, να δείξετε ότι $f(x)+f(-x)=1$.

34) ✍ Έχουμε περιφράξει με συρματόπλεγμα μήκους 100 m, μια ορθογώνια περιοχή από τις τρεις πλευρές της. Η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος. Αν το μήκος του τοίχου που θα χρησιμοποιηθεί είναι *x*, να εκφράσετε το εμβαδόν της περιοχής ως συνάρτηση του *x*.

35) ✍ Ένα κυλινδρικό φλιτζάνι, ανοικτό από πάνω, κατασκευάζεται έτσι ώστε το ύψος του και το μήκος της βάσης του να έχουν άθροισμα 20 cm. Αν το φλιτζάνι έχει ύψος *h* cm, να εκφράσετε τον όγκο του ως συνάρτηση του *h*. Αν η ακτίνα της βάσης του είναι *r*, να εκφράσετε το εμβαδόν της επιφάνειάς του ως συνάρτηση του *r*.

36) ✍ Σε ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι $ΑΒ = ΑΓ = 10$. Αν $\hat{ΑΒΓ} = \theta$, να εκφράσετε το ύψος υ του τριγώνου από την κορυφή $Β$, καθώς και το εμβαδόν του ως συνάρτηση του θ.

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ x_0

37) ✍ Να υπολογίσετε τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x+5}{4x}$ ii) $\lim\limits_{x\to 8}\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}\right)$ iii) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3}$.

38) ✍ Να υπολογίσετε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^2+5x+4\right)$ β) $\lim\limits_{x\to -1}\left(e^x+1\right)$ γ) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^2-9}{x+3}\right)$ δ) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-4}{x-2}\right)$

39) ✍ Να υπολογίσετε τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-3x+4)$ ii) $\lim\limits_{x\to -2}[(2x-1)(x+4)]$ iii) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

iv) $\lim\limits_{x\to 0}(2\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x)$ v) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(3\text{ημ}x+\text{συν}x)$.

40) ✍ Να υπολογίσετε τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{3(x-2)}$ ii) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2}{x^2+1}$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}[(x+1)\sigma\upsilon\nu x]$

iv) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}$ v) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-25}{x+5}$ vi) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x-2}$.

41) ✍ Να υπολογίσετε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-4}{2x-4}\right)$ β) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^2-9}{2x-6}\right)$ γ) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-1}{x^3-1}\right)$

δ) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x^3+1}{x+1}\right)$ ε) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^3-8}{x-2}\right)$

42) ✍ Να υπολογίσετε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$ β) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$ γ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+x^2-5x-2}{x^2-4}$

δ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-x^2-x+2}{x^3-x^2+x-1}$ ε) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^3-5x^2-8x-1}{x^4+x^3-x^3-1}$

στ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$

43) ✍ Να δείξετε ότι

i) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5} = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}$ ii) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h} = \dfrac{1}{2}$.

44) ✍ Να υπολογίσετε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ β) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1-\sqrt{x-1}}{x^2-4}$ γ) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{2x-10}{5-\sqrt{5x}}$

δ) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x-9}-3}{x}$ ε) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+8}-3}$ στ) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{x+5}-2}$

ζ) $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{x^2-49}{2-\sqrt{x-3}}$ η) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

Κανόνες παραγώγησης

45) ✍ Να παραγωγίσετε τις συναρτήσεις :

α) $f(x)=5$ β) $f(x)=x$ γ) $f(x)=x^5$ δ) $f(x)=x^{20}$

ε) $f(x)=x^{-6}$ στ) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ ζ) $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ η) $f(x)=\sqrt{x^3}$

θ) $f(x)=\sqrt[3]{x^4}$ ι) $f(x)=\sqrt[5]{x^2}$.

46) ✍ Να παραγωγίσετε τις συναρτήσεις :

α) $f(x)=5x^4$ β) $f(x)=4x^{-5}$ γ) $f(x)=3\eta\mu x$ δ) $f(x)=5\sigma\upsilon\nu x$

ε) $f(x)=2e^x$ στ) $f(x)=6\ln x$ ζ) $f(x)=5\sqrt{x}$ η) $f(x)=\dfrac{3}{x}$

θ) $f(x)=2\varepsilon\phi x$ ι) $f(x)=4\sigma\phi x$.

47) ✍ Να παραγωγίσετε τις συναρτήσεις :

α) $f(x)=5x^3+6x^2$ β) $f(x)=4x^4+5x+9$

γ) $f(x)=3\eta\mu x+x^2$ δ) $f(x)=2\sigma\upsilon\nu x+e^x+5$

ε) $f(x)=4e^x+\ln x+2007$ στ) $f(x)=2\ln x+5x^4+\eta\mu x$

ζ) $f(x)=5\sqrt{x}+3x^2+7$ η) $f(x)=x^4+x^2+\dfrac{2}{x}$

θ) $f(x)=\dfrac{x^3+5x^2+4}{x}$.

48) ✍ Να παραγωγίσετε τις συναρτήσεις :

α) $f(x)=x^2e^x$ β) $f(x)=x\cdot\eta\mu x$ γ) $f(x)=3x\cdot\sigma\upsilon\nu x$

δ) $f(x)=\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x$ ε) $f(x)=e^x\eta\mu x$ στ) $f(x)=x^2\ln x$

ζ) $f(x)=\eta\mu x\cdot\ln x$ η) $f(x)=x^2\sigma\phi x$ θ) $f(x)=4x\cdot\varepsilon\phi x$

ι) $f(x)=e^x\ln x$.

49) ✍ Να παραγωγίσετε τις συναρτήσεις :

α) $f(x)=xe^x+5x^2-1$ β) $f(x)=x\cdot\eta\mu x+3xe^x$

γ) $f(x)=x\sigma\upsilon\nu x-x^3\ln x$ δ) $f(x)=4x^2\eta\mu x-3x^2\sigma\upsilon\nu x$

ε) $f(x)=\eta\mu x(1-\sigma\upsilon\nu x)$ στ) $f(x)=\left(x^3+1\right)\left(x^4+1\right)$

ζ) $f(x)=\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-x^2e^x$ η) $f(x)=x^2\sigma\phi x+x^2\varepsilon\phi x$

50) ✍ Να παραγωγίσετε τις συναρτήσεις :

α) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ β) $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$ γ) $f(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$

δ) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ ε) $f(x)=\dfrac{3x}{x+1}$ σ τ) $f(x)=\dfrac{x^2}{\eta\mu x}$

ζ) $f(x)=\dfrac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x}$ θ) $f(x)=\dfrac{x+\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$ ι) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

51) ✍ Να παραγωγίσετε τις συναρτήσεις :

α) $f(x)=(x-1)^8$ β) $f(x)=(2x-1)^5$ γ) $f(x)=\left(x^3-2x\right)^5$

δ) $f(x)=\eta\mu^3x$ ε) $f(x)=\eta\mu^2x$ στ) $f(x)=\sigma\upsilon\nu^2x$

η) $f(x)=\varepsilon\phi^2x$ ζ) $f(x)=\sigma\upsilon\nu^3x$ θ) $f(x)=\sigma\phi^3x$

ι) $f(x)=\ln^3x$.

52) ✍ Να παραγωγίσετε τις συναρτήσεις :

α) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ β) $f(x)=\sqrt{\eta\mu x+1}$ γ) $f(x)=\sqrt{2x^2-x}$

δ) $f(x)=e^{3x}$ ε) $f(x)=e^{x^2+3}$ στ) $f(x)=e^{3x+5}$

η) $f(x)=e^{\eta\mu x}$ ζ) $f(x)=\sigma\upsilon\nu 3x$ θ) $f(x)=\eta\mu x^3$

ι) $f(x)=\sigma\upsilon\nu x^3$ ια) $f(x)=\eta\mu 4x$ ιβ) $f(x)=\ln x^3$

ιγ) $f(x)=\ln(3x+2)$ ιδ) $f(x)=\ln(\eta\mu x)$

ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

53) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4-2x$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f στο σημείο $x_0=2$.

54) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu\chi$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f στο σημείο $x_0=0$.

55) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\dfrac{2}{1+x^2}$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f στο σημείο $x_0=1$.

56) ✍Το βάρος B σε γραμμάρια ενός θηλυκού ποντικιού ύστερα από t εβδομάδες δίνεται προσεγγιστικά από τη συνάρτηση $B(t)=1+\dfrac{1}{4}(t+2)^2$, όπου $t\le 8$. Να βρείτε το ρυθμό ανάπτυξης του ποντικιού: i) ύστερα από t εβδομάδες και ii) ύστερα από 1, 2 και 8 εβδομάδες.

57) ✍ Ένα χελιδόνι πετάει και το ύψος του h (σε μέτρα), από το έδαφος, δίνεται σε συνάρτηση με τον χρόνο t (σε sec) από τον τύπο: $h\left(t\right)=3t^2-6t+5,\quad 0\le t\le 5$. Να βρείτε:

α) σε ποιο ύψος βρίσκεται αρχικά το χελιδόνι;
β) σε ποιο ύψος βρίσκεται το χελιδόνι τη χρονική στιγμή t=3;
γ) πόσο γρήγορα μεταβάλλεται το ύψος του χελιδονιού τη χρονική στιγμή t=2;

58) ✍ Το ύψος (σε μέτρα) που βρίσκεται ένα τηλεκατευθυνόμενο μοντέλο αεροπλάνου , μετά από χρόνο t (σε sec) δίνεται από τη συνάρτηση $h\left(t\right)=-3t^2+30t$, όπου $0\le t\le 10$.

α) Σε ποιο ύψος βρίσκεται το αεροπλάνο τη χρονική στιγμή t=0;
β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του ύψους του αεροπλάνου τη χρονική στιγμή t=2.

59) ✍ Μια ομάδα βιολόγων προτείνει να ληφθούν μέτρα για τη διάσωση ενός είδους δελφινιών. Μετά την εφαρμογή μέτρων εκτιμάται ότι ο αριθμός των δελφινιών εκφράζεται από τη συνάρτηση $N\left(t\right)=2t^3-t^2+5t+100$, όπου $0\le t\le 10$, ο χρόνος σε έτη. α) Πόσα δελφίνια υπάρχουν κατά την έναρξη εφαρμογής των μέτρων;
β) Να βρείτε το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού των δελφινιών.
γ) Να βρείτε το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού των δελφινιών το δεύτερο έτος.
δ) Πόσα δελφίνια θα υπάρχουν σε δέκα έτη;

60) ✍ Ο ρυθμός της φωτοσύνθεσης P ενός φυτού δίνεται από τον τύπο $P(I)=\dfrac{I}{\alpha+\beta I}$, $I\ge 0$, όπου I η ένταση του φωτός και α, β σταθερές.
i) Να βρείτε την $P'(I)$ ή, όπως λέγεται, τη *φωτοχημική ικανότητα* του

φυτού, καθώς και την $P'(0)$.

ii) Να δείξετε ότι $P'(I)=\frac{1}{\alpha}\left[1-\beta P(I)\right]^2$.

61) ✍ Ένα σώμα αφήνεται να πέσει από την κορυφή ενός κτιρίου ύψους 45m, τη χρονική στιγμή t=0 sec. Αν θεωρήσουμε την αντίσταση του αέρα αμελητέα, το διάστημα που διανύει το σώμα μετά από t sec πτώσης δίνεται από τη συνάρτηση: $S(t)=5t^2$, (σε m).
α) Να υπολογίσετε το διάστημα που θα διανύσει το σώμα σε χρόνο t=2 sec.
β) Να υπολογίσετε το χρόνο που θα κάνει το σώμα να φτάσει στο έδαφος.
γ) Να υπολογίσετε την ταχύτητα u(t) του σώματος κάθε χρονική στιγμή t.
δ) Να βρείτε την ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή της πρόσκρουσης στο έδαφος.

62) ✍ Η ενέργεια που αποδίδει ένα πηνίο μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τον τύπο $W(t)=6t^2-t^4$, και μετριέται σε joules. α) Να βρεθεί η ενέργεια τη χρονική στιγμή t=1.
β) Να βρεθεί η ισχύς τη χρονική στιγμή t=1.
γ) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της ισχύος τη χρονική στιγμή t=1.

63) ✍ Η θέση ενός υλικού σημείου το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τον τύπο $x(t)=t^3-6t^2+9t$, όπου t σε sec και χ σε m.
α) να βρείτε την ταχύτητα του σημείου τις χρονικές στιγμές t=2 sec και t=4 sec.
β) πότε το σημείο παραμένει στιγμιαία ακίνητο;
γ) πότε κινείται σε θετική και πότε σε αρνητική κατεύθυνση;
δ) Να βρείτε το ολικό διάστημα που θα διανύσει το σημείο στη διάρκεια των πρώτων 5 sec.

64) ✍ Η θέση ενός υλικού σημείου το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τον τύπο $x(t)=2t^3-21t^2+60t+3$, όπου t σε sec και χ σε m.
α) να βρείτε την ταχύτητα του σημείου τις χρονικές στιγμές t=1 sec και t=3 sec.
β) πότε το σημείο παραμένει στιγμιαία ακίνητο;
γ) πότε κινείται σε θετική και πότε σε αρνητική κατεύθυνση;
δ) Να βρείτε το ολικό διάστημα που θα διανύσει το σημείο στη διάρκεια των πρώτων 6 sec.

65) ✍ Ένα σώμα κινείται σε έναν άξονα έτσι ώστε η θέση του σε χρόνο t να δίνεται από τον τύπο $x(t)=t^3-2t^2+t$. Να βρείτε την ταχύτητα του σώματος σε χρόνο t και να προσδιορίσετε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες το σώμα παραμένει στιγμιαία ακίνητο. Ποια είναι η επιτάχυνση του σώματος τις χρονικές στιγμές που βρήκατε;

66) ✍ Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης των σημείων $A(0,3)$ και $B(x,\,0)$ ως προς *x* όταν $x=10$.

67) ✍ Η θέση ενός υλικού σημείου που κινείται σε έναν κατακόρυφο άξονα δίνεται από τον τύπο $y(t)=A\eta\mu\omega t$, όπου t ο χρόνος και τα A, ω σταθερές.

i) Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σημείου ως συνάρτηση του t.

ii) Να δείξετε ότι η επιτάχυνση είναι ανάλογη της απομάκρυνσης y.

iii) Να δείξετε ότι, όταν η επιτάχυνση είναι 0, το μέτρο της ταχύτητας είναι μέγιστο.

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ- ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ

68) ✍ Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{x^2}{3}$, x∈ℜ. Να βρείτε :

α) την πρώτη παράγωγο της f

β) το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης f στο σημείο x_0 =3.

γ) την εξίσωση της παραπάνω εφαπτομένης.

69) ✍ Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^2+1$, x∈ℜ. Να βρείτε :

α) την πρώτη παράγωγο της f

β) το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης f στο σημείο x_0 =0.

γ) την εξίσωση της παραπάνω εφαπτομένης.

70) ✍ Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης $f(t)=\frac{t^3}{t^2+1}$ στο σημείο της $A(3,\,f(3))$.
Να βρείτε την εφαπτομένη στο σημείο $A(3,\,f(3))$.

71) ✍ Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της της καμπύλης της συνάρτησης $f(\theta)=\frac{\eta\mu\theta}{\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta}$ στο σημείο της

$\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{3}, f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

Να βρείτε την εφαπτομένη στο σημείο $\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{3}, f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

72) ✍ Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\alpha x(1-x)$ στο σημείο της $O(0, f(0))$ να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 60^0.

73) ✍ Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\alpha x^2$, x∈ℜ, α∈ℜ.

α) Να βρείτε την $f'(2)$.

β) Να βρεθεί η τιμή του α ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο (2,f(2)) να είναι ίσος με 4.

γ) Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης στο παραπάνω σημείο.

74) ✍ Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\alpha(x+1)^2$, x∈ℜ, α∈ℜ.

α) Να βρείτε την $f'(x)$.

β) Να βρεθεί η τιμή του α ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο (1,f(1)) να είναι ίσος με 4.

γ) Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης στο παραπάνω σημείο.

75) ✍ Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=2x^2-\alpha x$, x∈ℜ, α∈ℜ.

α) Να βρείτε την $f'(2)$.

β) Να βρεθεί η τιμή του α ώστε η εφαπτομένη της καμπύλης της f στο σημείο (2,f(2)) να σχηματίζει γωνία 45^o με τον άξονα χ΄χ.

γ) Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης στο παραπάνω σημείο.

76) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-6x+5$. Να βρείτε :

α) την πρώτη παράγωγο της f

β) την εξίσωση εφαπτομένης της συνάρτησης f που είναι παράλληλη με τον χ΄χ.

77) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2+3x+1$.

Να βρείτε : α) την πρώτη παράγωγο της f

β) τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που η εφαπτομένη είναι παράλληλη με τον χ΄χ,

γ) τις εξισώσεις των παραπάνω εφαπτομένων.

78) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-6x^2+9x+4$.

Να βρείτε : α) την πρώτη παράγωγο της f

β) τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που η εφαπτομένη είναι παράλληλη με τον χ΄χ,
γ) τις εξισώσεις των παραπάνω εφαπτομένων.

79) ✍ Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει με τον χ΄χ η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = -2x^2 + x - 3$ στο σημείο $A\left(\frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$.

80) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 3x - 1$. Να βρείτε :
α) την πρώτη παράγωγο της f,
β) το σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη σχηματίζει με τον χ΄χ γωνία 135^o, γ) την εξίσωση της παραπάνω εφαπτομένης.

81) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x + 1$.
Να βρείτε : α) την πρώτη παράγωγο της f
β) τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλες στην y=x+3.

82) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x}{x+1}$. Να βρείτε :
α) την πρώτη παράγωγο της f
β) τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλες στην y=3x+5.

83) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Να βρείτε :
α) την πρώτη παράγωγο της f
β) τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλες στην διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$.

84) ✍ Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2x^2 - \alpha x + \beta$, α,β$\in\Re$ και η ευθεία y=3x-1. Να υπολογίσετε τα α,β ώστε η παραπάνω ευθεία να είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο με τετμημένη 2.

85) ✍ Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 9x - 12$, α,β$\in\Re$. Να υπολογίσετε τα α,β η γραφική παράσταση της συνάρτησης να διέρχεται απ’ το σημείο Α(2,-10) και να έχει στο σημείο Α συντελεστή διεύθυνσης -3.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ: ΝΑ ΑΠΟΔΕΙΞΕΤΕ ΟΤΙ…..

86) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x-x^2$.

α) Να βρείτε την f΄(x)και την f΄΄(x).

β) Να αποδείξετε ότι : $(1-x)f''(x)+f'(x)=0$ για κάθε x∈ℜ.

87) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{2x}$.

α) Να βρείτε την f΄(x)και την f΄΄(x).

β) Να αποδείξετε ότι : $2f'(x)-f''(x)=0$ για κάθε x∈ℜ.

88) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\mathrm{A}\sigma\upsilon\nu\omega x+\mathrm{B}\eta\mu\omega x$.

α) Να βρείτε την f΄(x)και την f΄΄(x).

β) Να αποδείξετε ότι : $f''(x)+\omega^2 f(x)=0$ για κάθε x∈ℜ.

89) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha e^{px}+\beta e^{-px}$.

α) Να βρείτε την f΄(x)και την f΄΄(x).

β) Να αποδείξετε ότι : $f''(x)=p^2 f(x)$ για κάθε x∈ℜ.

90) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x\eta\mu x$.

α) Να βρείτε την f΄(x)και την f΄΄(x).

β) Να αποδείξετε ότι : $f''(x)-2f(x)+10f(x)=0$ για κάθε x∈ℜ.

91) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\sigma\upsilon\nu x-2\sigma\upsilon\nu^2 x$.

Να αποδείξετε ότι : $f'(x)+f(x)\cdot\varepsilon\phi x=\eta\mu 2x$ για κάθε x∈ℜ.

92) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{\mu x}$.

Να βρεθεί ο αριθμός μ ώστε να ισχύει $f''(x)+2f'(x)=3f(x)$ για κάθε x∈ℜ.

93) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{\mu x}$.

Να βρεθεί ο αριθμός μ ώστε να ισχύει $f''(x)-3f'(x)-4f(x)=0$ για κάθε x∈ℜ.

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ- ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

94) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3-\frac{5}{2}x^2+x+10$. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

95) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3-9x^2+12x-1$. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

96) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-2x^3-3x^2+12x+\sqrt{2}$. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

97) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\ln 2$. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

98) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{2}{1+x^2}$. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

99) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{3x^2}{4x^2+5}$. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

100) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3-9x^2+\alpha x+\beta$. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο $x_0=1$ τοπικό ακρότατο τον αριθμό 2 να βρεθούν τα α και β και, να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

101) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\ln x-\beta x^2$. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο $x_0=1$ τοπικό ακρότατο τον αριθμό 3 να βρεθούν τα α και β και, να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

102) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι στο πεδίο ορισμού της παντού γνησίως φθίνουσα.

103) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+x-1$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι στο πεδίο ορισμού της παντού γνησίως αύξουσα.

104) ✍ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{3}x^3-kx^2+4x+2$.

Να βρεθούν οι τιμές του κ για τις οποίες η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\Re$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΑ ΜΕΓΙΣΤΑ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΑ

105) ✍ Το άθροισμα δύο αριθμών είναι ίσο με 40. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το γινόμενό τους.

106) ✍ Από όλα τα ορθογώνια με εμβαδό $100m^2$ ποιο είναι εκείνο που έχει τη μικρότερη περίμετρο;

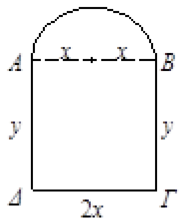
107) ✍ Να προσδιοριστούν δύο θετικοί αριθμοί με τις εξής ιδιότητες: Το άθροισμά τους να είναι 10 και το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι ελάχιστο.

108) ✍ Ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με τετράγωνη βάση και ανοικτό από πάνω πρέπει να έχει όγκο 32 dm^3. Να βρείτε ποιές πρέπει να είναι οι διαστάσεις του κουτιού, ώστε για την κατασκευή του να χρειάζεται το ελάχιστο δυνατό υλικό.

109) ✍ Αν ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο και ανοικτό από πάνω πρέπει να έχει επιφάνεια ίση με 12 dm^2, ποιος είναι ο μέγιστος δυνατός όγκος του;

110) ✍ Ένας πληθυσμός 1000 βακτηριδίων εισάγεται σε ένα θρεπτικό μέσον και αναπτύσσεται σύμφωνα με τη συνάρτηση $p(t)=1000+\dfrac{1000t}{100+t^2}$, όπου t ο χρόνος σε ώρες. Σε πόσο χρόνο ο πληθυσμός των βακτηριδίων θα είναι μέγιστος και ποιος θα είναι ο πληθυσμός αυτός;

111) ✍ Ένα παράθυρο έχει το διπλανό σχήμα και αποτελείται από ένα ορθογώνιο που περικλείεται στο άνω μέρος από ένα ημικύκλιο. Το παράθυρο έχει περίμετρο 30 μέτρα. Να βρείτε τις διαστάσεις που πρέπει να έχει ώστε να μπαίνει από αυτό όσο γίνεται περισσότερο φως.



112) ✍ Το κέρδος P σε ευρώ από την πώληση ενός αυτοκινήτου ορισμένου τύπου και ο χρόνος παραγωγής του t σε ώρες σχετίζονται με τον τύπο: $P(t)=20\left(200-\dfrac{250}{t}-t^2\right)$, $t>3$. Να βρεθεί το μέγιστο δυνατό κέρδος.

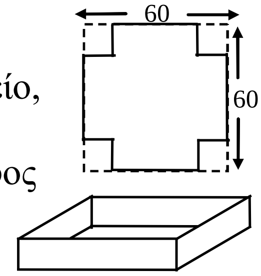
113) ✍ Να βρείτε το σημείο της ευθείας με εξίσωση $y=2x-3$ που είναι πλησιέστερο στην αρχή των αξόνων.

114) ✍ Η ταχύτητα ενός κύματος μήκους λ μέσα στο νερό είναι $\upsilon=\kappa\sqrt{\dfrac{\lambda}{c}+\dfrac{c}{\lambda}}$, όπου κ και c θετικές σταθερές. Για ποιο μήκος κύματος έχουμε την ελάχιστη ταχύτητα;

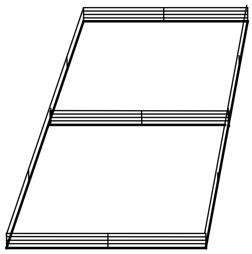
115) ✍ Αν $\upsilon=100p(1+\ln r)-100qr$, όπου p και q θετικές σταθερές, να δείξετε ότι το υ έχει τη μέγιστη τιμή του όταν $r=\dfrac{p}{q}$.

116) ✍ Αν $\upsilon = \kappa x^2 \ln\left(\frac{1}{x}\right)$, όπου κ θετική σταθερά, να δείξετε ότι το υ έχει τη μέγιστη τιμή του όταν $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

117) ✍ Από ένα φύλλο λαμαρίνας σχήματος τετραγώνου πλευράς 60 cm θα κατασκευαστεί ένα δοχείο, ανοικτό από πάνω, αφού κοπούν από τις γωνίες του τέσσερα ίσα τετράγωνα και στη συνέχεια διπλωθούν προς τα επάνω οι πλευρές. Να βρείτε ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του δοχείου, ώστε να έχει το μέγιστο όγκο.



118) ✍ Θέλουμε να περιφράξουμε μια περιοχή $16000\ m^2$ σχήματος ορθογωνίου με μεταβλητές διαστάσεις και να τη χωρίσουμε στη μέση. Ο φράχτης για την περίφραξη κοστίζει 900 δρχ./m και ο φράχτης για το χώρισμα 600 δρχ./m. Να βρείτε ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου ώστε, να έχουμε το ελάχιστο κόστος για την περίφραξη μαζί με το χώρισμα.



119) ✍ Σε έναν κύκλο ακτίνας ρ να εγγράψετε το ορθογώνιο με το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδόν.

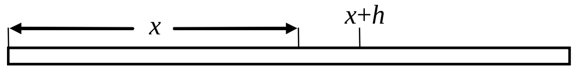
120) ✍ Ένα σύρμα μήκους λ κόβεται σε δύο τμήματα με τα οποία σχηματίζουμε έναν κύκλο και ένα τετράγωνο αντιστοίχως. Να δείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι ελάχιστο, όταν η πλευρά του τετραγώνου είναι ίση με τη διάμετρο του κύκλου.

121) ✍ Η έρευνα έχει δείξει ότι αν σε έναν ασθενή γίνει μια υποδόρια ένεση, τότε ύστερα από χρόνο t η συγκέντρωση y του φαρμάκου στο αίμα του δίνεται από τη συνάρτηση $y(t) = \frac{A}{k_2 - k_1}\left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right)$, όπου $A,\ k_1$ και k_2 θετικές σταθερές με $k_2 > k_1$. Να βρείτε το χρόνο t στον οποίο το φάρμακο θα παρουσιάσει τη μέγιστη συγκέντρωση.

122) ✍ Δύο ηλεκτρικές αντιστάσεις πρέπει να έχουν άθροισμα 450Ω. Πως πρέπει να επιλεγούν ώστε όταν συνδεθούν εν παραλλήλω να δίνουν τη μέγιστη ολική αντίσταση;

123) Το μεσημέρι ένα ιστιοφόρο βρίσκεται 20 χιλιόμετρα βορείως ενός φορτηγού πλοίου. Το ιστιοφόρο ταξιδεύει νότια με 40 km/h, και το φορτηγό ανατολικά με 20 km/h. Αν η ορατότητα είναι 10 km, θα έχουν οι άνθρωποι των δύο πλοίων οπτική επαφή σε κάποια στιγμή;

124) Αν μια συρμάτινη ράβδος είναι ομογενής, τότε η γραμμική της πυκνότητα ρ ορίζεται ως η μάζα της ανά μονάδα μήκους $\left(\rho = \dfrac{m}{\ell}\right)$ και μετριέται σε χιλιόγραμμα ανά μέτρο (kgr/m).



Όμως αν η ράβδος δεν είναι ομογενής και η μάζα της μετρούμενη από το αριστερό άκρο της μέχρι το σημείο που απέχει από το άκρο αυτό απόσταση x μέτρα δίνεται από τη συνάρτηση $m = f(x)$, τότε ορίζουμε ως γραμμική πυκνότητα ρ στο σημείο x το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, δηλαδή την παράγωγο της μάζας ως προς το μήκος. Αν υποθέσουμε ότι για μια ράβδο η μάζα της δίνεται από τη συνάρτηση $m = f(x) = \sqrt{x}$, όπου το x μετριέται σε μέτρα και η μάζα της σε χιλιόγραμμα, να βρεθεί

i) Η μέση πυκνότητα του τμήματος της ράβδου στο διάστημα [1, 1.21]

ii) Η γραμμική πυκνότητα της ράβδου για $x = 1$.

125) Το κόστος C της ημερήσιας παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος από μια βιοτεχνία που απασχολεί ν εργάτες δίνεται από τον τύπο: $C(x) = x^3 - 3\nu x^2 + 5\nu^3$ σε χιλιάδες δρχ.Το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος είναι $16-\nu$ χιλιάδες δρχ.Να βρείτε πόσες μονάδες πρέπει να παράγονται ημερησίως και από πόσους εργάτες, ώστε να έχουμε ελάχιστο κόστος και μέγιστο κέρδος.

126) Σε ποιό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 1$ η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης;

127) Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα δίνεται το σημείο $A(\alpha,\beta)$ του 1ου τεταρτημορίου. Μια ευθεία ε διέρχεται από το A και τέμνει τους θετικούς ημιάξονες $0x$ και $0y$ στα p και q αντιστοίχως. Να δείξετε ότι η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος $p+q$ είναι ίση με $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$.

128) ✍ Ποιος κύλινδρος με άθροισμα διαμέτρου και ύψους 20 cm έχει το μέγιστο δυνατό όγκο;

129) ✍ Ένα κυλινδρικό δοχείο πρέπει να έχει χωρητικότητα 1lt. Να βρείτε τις διαστάσεις του οι οποίες ελαχιστοποιούν το κόστος του μετάλλου από το οποίο θα κατασκευαστεί το δοχείο.

130) ✍ Από έναν κυκλικό δίσκο ακτίνας R αφαιρούμε έναν κυκλικό τομέα OAB και ενώνοντας τις ακτίνες OA και OB κατασκευάζουμε ένα κωνικό ποτήρι. Να βρείτε τη μέγιστη χωρητικότητα του ποτηριού.

131) ✍ Αν $C(x)$ είναι το συνολικό κόστος για την παραγωγή x μονάδων ενός προϊόντος, τότε η συνάρτηση C λέγεται **συνάρτηση κόστους**, το πηλίκο $c(x)=\frac{C(x)}{x}$ λέγεται **μέσο κόστος** και το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\frac{C(x+h)-C(x)}{h}$ λέγεται **οριακό κόστος**.

α) Να αποδείξετε ότι αν για κάποιο x το μέσο κόστος είναι ελάχιστο, τότε ισχύει: οριακό κόστος=μέσο κόστος.

β) Μια εταιρεία εκτιμά ότι το κόστος (σε δολάρια) για την παραγωγή x μονάδων ενός προϊόντος είναι

$$C(x)=\frac{1}{1000}\cdot x^2+2x+2600.$$

i) Να βρείτε το κόστος, το μέσο κόστος και το οριακό κόστος για την παραγωγή 1000 μονάδων, 2000 μονάδων και 3000 μονάδων.

ii)Ποιο είναι το επίπεδο παραγωγής για το οποίο το μέσο κόστος είναι το χαμηλότερο και ποια είναι η ελάχιστη τιμή του μέσου κόστους;

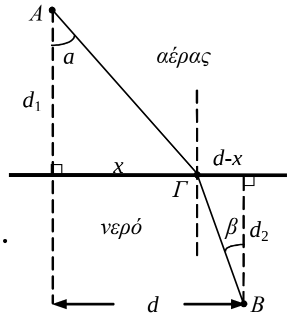
132) ✍ Αν x μονάδες ενός προϊόντος είναι διαθέσιμες για πώληση, τότε η τιμή πώλησης $p(x)$ της μονάδας του προϊόντος λέγεται **συνάρτηση ζήτησης**. Από την πώληση x μονάδων του προϊόντος, τα συνολικά έσοδα είναι $R(x)=x\cdot p(x)$. Η συνάρτηση R λέγεται **συνάρτηση εσόδων** και η παράγωγος R' λέγεται **οριακή**

συνάρτηση εσόδων. Επίσης από την πώληση x μονάδων του προϊόντος το συνολικό κέρδος είναι $P(x)=R(x)-C(x)$. Η συνάρτηση P καλείται **συνάρτηση κέρδους** και η παράγωγος P' καλείται **οριακή συνάρτηση κέρδους**.

α) Να αποδείξετε ότι αν το κέρδος για κάποιο x είναι μέγιστο, τότε τα οριακά έσοδα είναι ίσα με το οριακό κόστος.

β) Ποιο είναι το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί τα κέρδη για μια εταιρεία, αν η συνάρτηση κόστους είναι $C(x)=3800+5x-0,001x^2$ και η συνάρτηση ζήτησης $p(x)=50-0,01x$;

133) ✍ Έστω υ_1 η ταχύτητα του φωτός στον αέρα και υ_2 η ταχύτητα του στο νερό. Σύμφωνα με την **αρχή του Fermat**, μια ακτίνα φωτός από ένα σημείο A του αέρα φθάνει σε ένα σημείο B του νερού ακολουθώντας μια πορεία $ΑΓΒ$ η οποία ελαχιστοποιεί τον απαιτούμενο χρόνο. Να αποδείξετε ότι



i) Ο χρόνος που χρειάζεται το φως για τη διαδρομή $ΑΓΒ$ είναι $t(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+d_1^2}}{\upsilon_1}+\dfrac{\sqrt{(d-x)^2+d_1^2}}{\upsilon_2}$

ii) Να υπολογίσετε την $t'(x)$.

iii) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta}=\dfrac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$.

ΜΕΡΟΣ Γ: ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

(ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ)

134) ✍ ***(Απολυτήριες εξετάσεις2012)***

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1+\ln^2 x}{x}, x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
β) Έστω M(x, f(x)), x>0 σημείο της γραφικής παράστασης της f. Η παράλληλη ευθεία από το M προς τον άξονα y΄y τέμνει τον ημιάξονα Ox στο σημείο K(x,0), και η παράλληλη προς τον άξονα x΄x τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο Λ(0, f(x)). Αν O είναι η αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου OKMΛ γίνεται ελάχιστο όταν αυτό γίνεται τετράγωνο.

135) ✍ ***(Απολυτήριες εξετάσεις2011)***

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}, x\in\Re$.

α) Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Αν επιπλέων $h(x)=e^{\frac{1}{5}x\left(\frac{3}{2}x^2-x-\frac{1}{3}\right)}, x\in\Re$, να λυθεί η εξίσωση $f(x)=h(x)$.

136) ✍ ***(Απολυτήριες εξετάσεις2010)***

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\sqrt{x^2-x+1}-1$, x∈ℜ.

α) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}$.

β) Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$.

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η παραπάνω εφαπτομένη με τον άξονα x΄x.

137) ✍ ***(Απολυτήριες εξετάσεις2009)***

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-6x^2+\alpha x-7$, όπου α πραγματικός αριθμός, για την οποία ισχύει $2f''(x)+f'(x)+15=3x^2$, x∈ℜ

α. Να δείξετε ότι α=9

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{x^2-1}$

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία y=−3x

138) ✍ ***(Απολυτήριες εξετάσεις2009)***

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-\frac{x}{2}+\lambda^2-6\lambda+2$, $x>0$ όπου λ ένας πραγματικός αριθμός.

α. Να προσδιοριστεί το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα και το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα.

139) ✍ ***(Απολυτήριες εξετάσεις2008)***

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\frac{x-1}{e^x}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x f(x)}{x^2-1}$.

β. Να αποδείξετε ότι $e^x f'(x)=2-x$.

γ. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f(x).

140) ✍ ***(Απολυτήριες εξετάσεις 2007)***

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=xe^x+3$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(x)=f(x)+e^x-3$.

β) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-e^x}{x^2-x}$.

141) ✍ ***(Απολυτήριες εξετάσεις 2006)***

Έστω η συνάρτηση $f(x)=-2x^2+kx+4\sqrt{x}+10, x\geq 0$.

Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο Α(1,f(1)) είναι παράλληλη στον άξονα χ΄χ, να αποδείξετε ότι κ=2 και να βρείτε την εξίσωσή της.

142) ✍ ***(Απολυτήριες εξετάσεις 2005)***

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{1}{x}, x\in(0,+\infty)$.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο Λ(1, 1).

β) Από τυχαίο σημείο Μ(x, y) της γραφικής παράστασης της f φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες x΄x και y΄y, οι οποίες σχηματίζουν με τους ημιάξονες Ox, Oy ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Μ, ώστε η περίμετρος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου να είναι ελάχιστη.

143) ✍ ***(Απολυτήριες εξετάσεις 2004)***

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

144) ✍ ***(Απολυτήριες εξετάσεις 2003***

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$.

Α) Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.
Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο :
α. $\Re$ β. (-1,1) γ. $\Re$-{-1,1} δ. (1,+∞)

Β) Να αποδείξετε ότι f΄(x)<0 για κάθε x του πεδίου ορισμού της.

Γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to -1}\left[(x+1)\cdot f(x)\right]$.

Δ) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0,f(0)) με τον άξονα x΄x.

145) ✍ ***(Απολυτήριες εξετάσεις 2002)***

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$.

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 3}\left[f(x)\right]$.

Γ) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της f.

Δ) Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της καμπύλης της συνάρτησης που είναι παράλληλες στην ευθεία $y=2x+5$.

146) ✍ ***(Απολυτήριες εξετάσεις 2001)***

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x$.

Α) Να αποδείξετε ότι $f(x)+f''(x)=0$.

Β) Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(0, 1).

Γ) Να βρείτε την τιμή του λ∈$\Re$ για την οποία ισχύει η σχέση:
$\lambda f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-2f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2.$

147) ✍ ***(Απολυτήριες εξετάσεις 2000)***

Α) Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

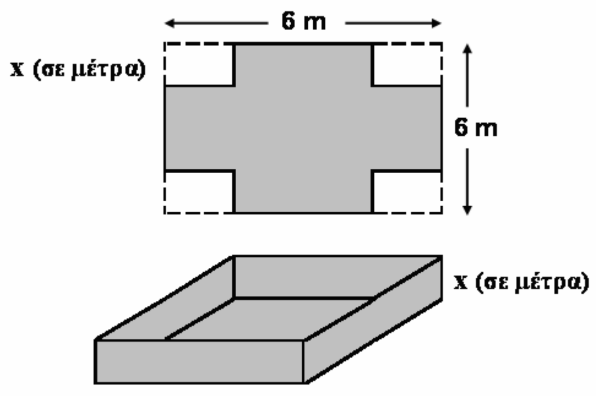
Στήλη Α (συνάρτηση)	Στήλη Β (παράγωγος)
α. x^2+3	1. $1-\eta\mu x$
β. $x+\sigma\upsilon\nu x$	2. $3x^2-8x$
γ. $x\cdot\eta\mu x$	3. $2x+3$
δ. x^3-4x^2	4. $\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x$
	5. $2x$
	6. $3x^2-4x$
	7. $\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x$

Β) Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση : Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=\frac{e^x}{x}$, x≠0 είναι: Α. e^x Β. $\frac{e^x-xe^x}{x^2}$ Γ. $\frac{xe^x+e^x}{x^2}$ Δ. $\frac{xe^x-e^x}{x^2}$ Ε. $\frac{xe^x-e^x}{x}$

(ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ)

148) ***(Επαναληπτικές εξετάσεις 2012)***

Από ένα φύλλο λαμαρίνας σχήματος τετραγώνου πλευράς 6 μέτρων κατασκευάζεται μια δεξαμενή σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ανοιχτή από πάνω. Από τις γωνίες του φύλλου λαμαρίνας κόβονται τέσσερα ίσα τετράγωνα πλευράς x μέτρων, 0<x<3 και στη συνέχεια οι πλευρές του διπλώνονται προς τα πάνω όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι ο όγκος της δεξαμενής ως συνάρτηση του x είναι $f(x)=4x(3-x)^2, 0<x<3$. (Δίνεται ότι ο όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου διαστάσεων α, β, γ είναι V=αβγ)

β) Να βρείτε για ποια τιμή του x η δεξαμενή έχει μέγιστο όγκο.

γ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{f(x+2)-8}{x}$

149) ***(Επαναληπτικές εξετάσεις 2011)***

Υποθέτουμε ότι οι θερμοκρασίες (σε ^oC) σε μια περιοχή κατά τη διάρκεια ενός 24- ώρου προσεγγίζονται από τις τιμές της συνάρτησης $\theta(t)=t-4\sqrt{t}=\alpha, \alpha\in\Re, \kappa\alpha\iota$ $t\in(0,24]$, ο χρόνος μετρημένος σε ώρες.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε t∈(0,4] η θερμοκρασία μειώνεται και για t∈(4,24] η θερμοκρασία αυξάνεται.

β) Να υπολογίσετε την τιμή του α, αν γνωρίζετε ότι η ελάχιστη θερμοκρασία ενός 24- ώρου είναι -1 ^oC.
γ) Για α=3 να βρείτε τις ώρες που η θερμοκρασία είναι $0\,^oC$.
δ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{t\to 4}\frac{\theta'(t)}{t^2-16}$.

150) ✍ ***(Επαναληπτικές εξετάσεις 2010)***

Δίνεται η συνάρτηση $f(t)=\frac{1}{300s^2}(t-\overline{x})^3, t\in\Re, s\neq 0$.
α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
β) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f γίνεται ελάχιστος για $t=\overline{x}$ και να βρείτε την ελάχιστη τιμή του.

151) ✍ ***(Επαναληπτικές εξετάσεις 2009)***

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3-8$ όπου α ένας πραγματικός αριθμός.
α. Αν $\lim\limits_{x\to 1}\left[f(x)\right]=-7$,να βρείτε την τιμή του α.
β. Έστω α=1: i) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}$
ii)Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0=2$.

152) ✍ ***(Επαναληπτικές εξετάσεις 2009)***

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=v^3x+\frac{4}{x^2}, x\in(0,1)$ όπου ν ένας ακέραιος αριθμός με ν>2.
α. Να προσδιοριστεί το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα και το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα.

153) ✍ ***(Επαναληπτικές εξετάσεις 2008)***

Έχουμε περιφράξει με συρματόπλεγμα μήκους 200 m μια ορθογώνια περιοχή από τις τρεις πλευρές της . Η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος. Έστω ότι το μήκος του τοίχου που θα χρησιμοποιηθεί είναι x.
α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της περιοχής που περιφράξαμε δίνεται από τον τύπο f(x) = 100x $-\frac{1}{2}x^2$.
β. Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια που θα μπορούσαμε να περιφράξουμε με το συρματόπλεγμα των 200 m.

154) ✍ ***(Επαναληπτικές εξετάσεις 2007)***

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{x^2-x+1}$.

Α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to -1}\left[f(x)\right]$.

Γ) Να εξεταστεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρεθούν τα ακρότατά της.

155) ✍ ***(Επαναληπτικές εξετάσεις 2006)***

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x\left(\alpha x^2+\beta x+9\right)$ με α,β∈ℜ. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της Α(2, e^2) είναι $y=-e^2x+3e^2$ τότε :

α. Να αποδείξετε ότι α=1 και β=-6.

β. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

156) ✍ ***(Επαναληπτικές εξετάσεις 2005)***

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\ln x-\beta x^2$ με α,β∈ℜ.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β. Να βρείτε την παράγωγο της f για κάθε x του πεδίου ορισμού της.

γ. Να βρείτε τα α και β ώστε η εφαπτομένη στο σημείο Α(1, 1) της γραφικής παράστασης της f να είναι y=3x-2.

δ. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2}\left[f'(x)\cdot x^3\right]$

157) ✍ ***(Επαναληπτικές εξετάσεις 2004)***

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{x+2}{e^x}$ με α,β∈ℜ.

α. Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f.

β. Να αποδείξετε ότι $f(x)+f'(x)=\dfrac{1}{e^x}$.

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(0,f(0)).

158) ✍ ***(Επαναληπτικές εξετάσεις 2003)***

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της f όταν x=3, ισούται με

$\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

γ. Αν $h(x)=\frac{f(x)-\sqrt{3}}{x-2}$ για x≠2 να υπολογίσετε το $\lim_{x\to 2}\left[h(x)\right]$

159) ***(Επαναληπτικές εξετάσεις 2002)***

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\alpha x(2-x), \alpha\in\Re$

Α. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο Ο(0, f(0)) να σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 45^o.

Β. Για α=1/2, να βρείτε :

α. την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της (1, f(1)).

β. τα ακρότατα της f.

160) ***(Επαναληπτικές εξετάσεις 2001)***

Α) Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Α (συνάρτηση)	Στήλη Β (παράγωγος)
α. $2\sqrt{x}+\ln 2$	1. $\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}$
β. $\frac{\eta\mu x}{x}$	2. $3\sigma\upsilon\nu 3x$
γ. $\eta\mu 3x$	3. $\frac{\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$
	4. $\frac{1}{\sqrt{x}}$
	5. $\frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}$
	6. $-3\sigma\upsilon\nu 3x$

Β) Αν $f(x)=\frac{1}{4}(x-1)^4$ και f΄(α)=27, όπου α πραγματικός αριθμός, τότε να βρείτε την τιμή του α.

(ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ)

161) ***(Εσπερινά 2012)***

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^2+\alpha x+\beta, x\in\Re$ και α, β∈ℜ.

α) Να βρεθεί το α, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο που η γραφική παράσταση τέμνει τον y΄y, σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 45°.

β) Αν α=1 και $\lim_{x\to -1}\frac{f(x)+\beta x}{x+1}=6$, να βρεθεί το β.

γ) Αν α=1, β=7 και $g(x)=f(x)-x^3, x\in\Re$, να μελετηθεί η g ως προς τη μονοτονία.

162) ***(Εσπερινά 2011)***

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=-x^3-3x+4, x\in\Re$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να δείξετε ότι η παράγωγος f΄ έχει ολικό μέγιστο και να το υπολογίσετε.

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο Α(1, f(1)).

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-4}{x}$.

163) ***(Εσπερινά 2011)***

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^2-\kappa x+5, x\in\Re, \kappa\in\Re$.

α) Να βρεθεί το κ αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο (-1,12).

β) Για κ=6 να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στα σημεία με τετμημένες x=2 καιx=4.

γ) Να αποδειχθεί ότι το σημείο τομής των εφαπτόμενων βρίσκεται πάνω στην ευθεία x=3.

δ) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ανάμεσα στις εφαπτόμενες και τον άξονα x΄x .

164) ***(Εσπερινά 2010)***

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^3+\alpha x^2-9x+\beta, x\in\Re$ και α,β πραγματικοί αριθμοί.

Α. Αν η εφαπτομένη στο σημείο Μ(2,5) της γραφικής παράστασης της f έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με 15, να αποδείξετε ότι α=β=3.

Β. Για α=β=3, να βρείτε το όριο $\lim_{x\to -2}\frac{f'(x)+9}{x^2-4}$.

Γ. Για α=β=3, να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $g(x)=f'(x)+10$

165) ***(Εσπερινά 2009)***

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}, x\in\Re$.

Α. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο $f'(x)$.
Β. Να προσδιοριστεί το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα και το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα
Γ. Να βρείτε τα ακρότατα της f.
Δ. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της (-1,f(-1)).

166) ***(Εσπερινά 2008)***

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{1}{3}x^3+kx+2$, όπου k∈ℜ.

Α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο Μ(3,8), να βρείτε τον αριθμό κ.
Β) Για κ=-1
α) Να αποδείξετε ότι : $f'(x)+f''(x)+2=(x+1)^2$ για κάθε x∈ℜ.
β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

167) ***(Εσπερινά 2007)***

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^2+1$, όπου x∈ℜ. Να βρείτε:
α) Το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f ως προς x , όταν x=2.
β) Τα ακρότατα της f.
γ) Το σημείο Α($x_0, f(x_0)$) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ευθεία y=3.

168) ***(Εσπερινά 2006)***

Έστω α∈ℜ. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^2-\alpha x-8$ με πεδίο ορισμού το ℜ.
Α. Να βρεθεί το α∈ℜ αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από το σημείο Α(1, -2).
Β. Αν α=-4
α) να βρεθεί η παράγωγος f΄(x)
β) να βρεθεί το $x_0\in\Re$ στο οποίο η συνάρτηση f(x) παρουσιάζει ακρότατο. Να βρεθεί αν το ακρότατο είναι μέγιστο ή ελάχιστο.
γ) να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f(x) στο σημείο Α(1,-2).

169) ***(Εσπερινά 2005)***

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x).
β. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x\to 4} f(x)$.

γ . Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \to 2} f(x)$.

δ. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο f΄(x) της f(x).

170) ✍ ***(Εσπερινά 2004)***

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 5x + 6$ και $g(x) = x - 3$

α. Να βρείτε τα $\lim_{x \to 2} f(x)$ και $\lim_{x \to 2} g(x)$

β. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \to 3} \frac{f(x)}{g(x)}$.

γ. Αν f΄(x) και g΄(x) είναι οι παράγωγοι των συναρτήσεων f(x) και g(x) αντίστοιχα, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = 3f'(200) + 819g'(-1)$.

171) ✍ ***(Εσπερινά 2004)***

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$ όπου x $\in \Re$. Να βρείτε :

α. το όριο $\lim_{x \to 0} f(x)$

β. Το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f ως προς x, όταν x=1 .

γ. Τα ακρότατα της συνάρτησης f.

δ. Την εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο Α(1, f(1)).

172) ✍ ***(Εσπερινά 2003)***

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x^2}{4x^2 + 5}$ όπου x $\in \Re$. Να βρείτε :

α. το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα x΄x.

β. το όριο $\lim_{x \to 0} f(x)$

γ. την παράγωγο της συνάρτησης f

δ. τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f .

ε. τα ακρότατα της συνάρτησης f.

173) ✍ ***(Εσπερινά 2002)***

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x).

β. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \to 1} f(x)$.

γ . Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \to 2} f(x)$.

δ. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f(x) είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(2, +\infty)$.

174) ✍ ***(Εσπερινά 2001)***

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+5x+6$, όπου x $\in \Re$.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.
β. Να βρείτε σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης γ . Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+5x+6}{x+1}$.

175) ✍ ***(Εσπερινά 2001)***

Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων :

α) $f_1(x)=x^3+\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x$ β) $f_2(x)=(x-1)^2$

γ) $f_3(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ δ) $f_4(x)=\sqrt{x^2+3}$ ε) $f_5(x)=\sigma\upsilon\nu(2x+3)$

176) ✍ ***(Εσπερινά 2000)***

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x-3}$,

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
β. Να βρείτε την παράγωγο f΄της συνάρτησης f.
γ . Να υπολογίσετε την τιμή : $f'(0)$.

177) ✍ ***Εσπερινά 2000)***

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3+5x+3$,

α. Να βρείτε την παράγωγο f΄της συνάρτησης f.
β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

(ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ)

178) ✍ ***(Εσπερινά Επαναληπτικές 2011)***

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=2-\dfrac{\kappa}{x}, \kappa\in\Re, x\neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g με τύπο $g(x)=x\cdot f'(x)+f(x)$ είναι σταθερή.

β) Να υπολογιστεί η τιμή του κ αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο A(3,1).
Για κ=3
γ) Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο B(1,f(1)).

δ) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές: την αρχή των αξόνων Ο και τα σημεία στα οποία η εφαπτομένη του ερωτήματος γ) τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y .

179) ✍ ***(Εσπερινά Επαναληπτικές 2007)***

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και την παράγωγό της .
β. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης .
γ . Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{xf'(x)}{f(x)}$.

180) ✍ ***(Εσπερινά Επαναληπτικές 2005)***

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
β. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της f και να αποδείξετε ότι η εξίσωση f΄(x)=0 έχει ρίζες τους αριθμούς 3 και -1.
γ . Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f στο διάστημα $(1, +\infty)$.

181) ✍ ***(Εσπερινά Επαναληπτικές 2004)***

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4(x-2)$ όπου x $\in\Re$.

α. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο f΄ της f.
β. Να αποδείξετε ότι : $xf''(x)-f'(x)=4$.
γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη $x_0=1$.
δ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα.

182) ✍ ***(Εσπερινά Επαναληπτικές 2003)***

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+19}$ όπου x $\in\Re$.

α. Να βρείτε τα όρια : $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$.
β. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f.
γ. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f.

183) ✍ ***(Εσπερινά Επαναληπτικές 2003)***

Ένα χελιδόνι πετάει και το ύψος του h (σε μέτρα), από το έδαφος, δίνεται σε συνάρτηση με τον χρόνο t (σε sec) από τον τύπο:
$h(t)=3t^2-6t+5$, $0\le t\le 5$. Να βρείτε:

α) το ύψος στο οποίο το χελιδόνι βρίσκεται τη χρονική στιγμή t=0.
β) το ρυθμό μεταβολής του ύψους h, ως προς t, τη χρονική στιγμή t=2.
γ) σε ποια χρονική στιγμή t το ύψος του χελιδονιού από το έδαφος γίνεται ελάχιστο και ποιο είναι τότε το ύψος αυτό.

184) ***(Εσπερινά Επαναληπτικές 2002)***

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=6x^4+3x^2+10, x\in\Re$.
Να βρείτε :
α) το $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$
β) την παράγωγο της συνάρτηση f
γ) τα ακρότατα της συνάρτησης f.

185) ***(Εσπερινά Επαναληπτικές 2001)***

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}\cdot\eta\mu x+x+1, x\in\Re$.
Να βρείτε :
α) το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$
β) την παράγωγο της συνάρτησης f
γ) το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f΄ τέμνει τον άξονα y΄y.

186) ***(Εσπερινά Επαναληπτικές 2001)***

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}, x\in\Re$.
Να βρείτε :
α) τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και αυτά στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα
β) τα ακρότατα της συνάρτησης f
γ) το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f στο σημείο $x_0=0$
δ) την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο Α(0,f(0)).

187) ***(Εσπερινά Επαναληπτικές 2000)***

Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων :
α) $f_1(x)=x+1$ β) $f_2(x)=xe^x$ γ) $f_3(x)=2+\ln x$
δ) $f_4(x)=\dfrac{x}{x+2}$ ε) $f_5(x)=2\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x$

188) ***(Εσπερινά Επαναληπτικές 2000)***

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3-9x^2+2004$ όπου x $\in\Re$.

α. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f.
β. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f.

(ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Ο.Ε.ΦΕ.)

189) ***(Εξετάσεις Ο.Ε.Φ.Ε. 2011)***

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-\kappa x^2+4, x\in\Re$ και κ∈ℜ. Αν $f'(-1)=-3f'(1)$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι κ=3.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να βρείτε το όριο: $L=\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(3+h)-4}{h}\right)$ και την εξίσωση εφαπτομένης της συνάρτησης f στο σημείο (3,f(3)).

δ) Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f, στην τετμημένη του οποίου ο ρυθμός μεταβολής του y=f(x) ως προς x, έχει την ελάχιστη τιμή.

190) ***(Εξετάσεις Ο.Ε.Φ.Ε. 2010)***

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)+x+\sqrt{\alpha+15}$, όπου α μια σταθερά με α≥-15.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να βρείτε:

i) την f΄(x)

ii) το $\lim\limits_{x\to -1}\left(f'(x)\cdot\dfrac{x^2+1}{x^2-x-2}\right)$

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλη στην ευθεία y=x είναι $y=x+\sqrt{\alpha+15}$.

191) ***(Εξετάσεις Ο.Ε.Φ.Ε. 2008)***

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να βρείτε το σημείο M(x, f(x)) στο οποίο η γραφική παράσταση της f τέμνει τον x΄x.

γ) Να δείξετε ότι : $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=16$.

192) ***(Εξετάσεις Ο.Ε.Φ.Ε. 2007)***

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+\ln x$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να υπολογίσετε την παράγωγο της f.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

δ) Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{xf'(x)-3}{x-1}$.

193) **_(Εξετάσεις Ο.Ε.Φ.Ε. 2006)_**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\lambda x^3-6x\mu\pm\varepsilon\mu,, \quad \lambda\ \mu\in\Re$. Αν

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-x-1}{x^2-1}=-\dfrac{1}{2\lambda}$ και το μέγιστο της συνάρτησης f είναι 9:

α) δείξτε ότι λ=2

β) δείξτε ότι μ=5

γ) βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f όπου η εφαπτομένη (ε) είναι παράλληλη στο x΄x

δ) να βρείτε για ποια τιμή του x ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος.

194) **_(Εξετάσεις Ο.Ε.Φ.Ε. 2002)_**

Δίνονται οι συναρτήσεις φ,f, g με f(1)=f΄(1) και φ(x)=f(g(x)), g(x)=lnx+x, με x>0.

α) Να αποδείξετε ότι: g(1)=φ(1)=1 και g΄(1)=φ΄(1)=2.

β) Να εξετάσετε αν η g έχει ακρότατα στο διάστημα Δ=(0,+∞).

γ) Να υπολογίσετε την τιμή του ορίου $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(h+1)+(h+1)-g(1)}{h}$.

δ) i) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων ε_1 , ε_2 των γραφικών παραστάσεων των φ και f στα σημεία τους Α(1,φ(1)) και Β(1,f(1)) αντίστοιχα.

ii) Να υπολογιστεί η γωνία που σχηματίζει η ε_2 με τον άξονα των x.

195) **_(Εξετάσεις Ο.Ε.Φ.Ε. 2001)_**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+3x^2-9x+\alpha^2-4\alpha,\alpha\in\Re$.

α) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο κι ένα τοπικό ελάχιστο.

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του α για τις οποίες το τοπικό μέγιστο της f είναι 3-πλάσιο από το τοπικό ελάχιστο.

γ) να βρείτε, αν υπάρχει, την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος.