

### Θέματα Μαθηματικών 4<sup>ης</sup> Δέσμης 1983

#### ΖΗΤΗΜΑ1

α) Να αποδειχθεί ότι η τετμημένη καθώς και η τεταγμένη του αθροίσματος  $\bar{\alpha} + \bar{\beta}$  δυο διανυσμάτων  $\bar{\alpha}$  και  $\bar{\beta}$  ισούται με το άθροισμα των τετμημένων και αντίστοιχα των τεταγμένων των διανυσμάτων  $\bar{\alpha}$  και  $\bar{\beta}$ .

β) Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας ( $\varepsilon$ ) που διέρχεται από το σημείο  $M(1, -1)$  και είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση  $5x - 9y + 12 = 0$ .

#### ΖΗΤΗΜΑ2

α) Πότε μια συνάρτηση λέγεται συνεχής σε μια θέση  $x_0$  του πεδίου ορισμού της ;

β) Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις με τύπους

$$\text{i) } f(x) = \begin{cases} \frac{4x^2 - 9x + 2}{x - 2}, & x \in \mathbb{R} - \{2\} \\ 7, & x = 2 \end{cases} \quad \text{στη θέση } x_0 = 2$$

$$\text{ii) } g(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases} \quad \text{στη θέση } x_0 = 0$$

#### ΖΗΤΗΜΑ3

α) Δίνεται συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής :  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ .

i) Να αναφέρετε τι λέγεται παράγωγος της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $x_0$

ii) Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας της εφαπτομένης σε ένα σημείο  $M(x_0, f(x_0))$  της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης με τύπο  $y = f(x)$ .

β) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στο σημείο  $(1, 1)$  της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τύπο  $y = x^3$ .

#### ΖΗΤΗΜΑ4

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο  $f(x) = x^2 - |x| - 2$ . Να γίνει μελέτη και πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

### Θέματα Μαθηματικών 4<sup>ης</sup> Δέσμης 1984

**ZΗΤΗΜΑ1** Θεωρούμε τους πίνακες  $\begin{bmatrix} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{2}} & \frac{\eta\mu x}{\sqrt{2}} \\ \frac{\eta\mu x}{\sqrt{2}} & \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{2}} & -\frac{\eta\mu x}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\eta\mu x}{\sqrt{2}} & \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$  και

ονομάζουμε  $H(x)$  τον πρώτο και  $\Sigma(x)$  το δεύτερο.

α) Να αποδείξετε ότι ισχύει  $H^2(x) + \Sigma^2(x) = I$  όπου  $I$  ο πίνακας

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

β) Να λύσετε την εξίσωση  $\Sigma^2(x) - H^2(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  ( $x \in \mathbb{R}$ )

**ZΗΤΗΜΑ2** α) Έστω το σύστημα  $(\Sigma) : \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 \psi = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 \psi = \gamma_2 \end{cases}$  με τους

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  πραγματικούς αριθμούς. Να αποδείξετε ότι αν ο

πίνακας  $\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix}$  είναι αντιστρέψιμος τότε το σύστημα έχει μία

μόνο λύση.

β) Να λύσετε (και να διερευνήσετε) το σύστημα :

$$\begin{cases} (\lambda + 1)x - 2(\lambda - 1)\psi = 3 \\ x + 3\lambda\psi = 4\lambda + 5 \end{cases} \quad \text{όπου } \lambda \text{ πραγματικός αριθμός.}$$

**ZΗΤΗΜΑ3** Έστω η πραγματική συνάρτηση  $\psi$  της πραγματικής μεταβλητής  $x$  με :

$$\psi(x) = x + \frac{4}{x}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο των τιμών της  $\psi$

β) Να εξετάσετε την  $\psi$  ως προς την μονοτονία σε καθένα από τα διαστήματα  $(0, 2]$  και  $[2, +\infty)$

**ZΗΤΗΜΑ4** α) Έστω μια πραγματική συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού της  $A$  ένα υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ , που περιέχει ένα ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$  με  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  και έστω  $x_0$  ένα από τα άκρα του διαστήματος  $(\alpha, \beta)$ . Τι εννοούμε όταν λέμε ότι : η συνάρτηση  $f$  έχει όριο στο  $x_0$  το  $+\infty$  και τι όταν λέμε ότι η συνάρτηση  $f$  έχει όριο στο  $x_0$  το  $-\infty$  ;

β) Έστω η πραγματική συνάρτηση της πραγματικής μεταβλητής  $x$  με  $\psi(x) = \frac{2x-10}{5-\sqrt{5x}}$  να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 5} \psi(x)$ .

## Θέματα Μαθηματικών 4<sup>ης</sup> Δέσμης 1985

**ZΗΤΗΜΑ1** α) Δίνεται ο πίνακας  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ . Να υπολογισθεί ο πίνακας

$$A^2 - 2A.$$

β) Έστω  $\lambda \in \mathbb{R}$  και  $X$  ένας πίνακας  $2 \times 2$ . Να βρεθεί ο  $X$  αν

$$X + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ 3\lambda & 2(\lambda^2 - 1) \end{bmatrix}.$$

**ZΗΤΗΜΑ2** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της  $f$  και το είδος μονοτονίας σε καθένα από αυτά, καθώς και τα τοπικά μέγιστα και ελάχιστα. Επίσης να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της  $f$  στρέφει

α) τα κοίλα άνω

β) τα κοίλα κάτω

Ακόμα να βρεθούν τα ενδεχόμενα σημεία καμπής.

**ZΗΤΗΜΑ3** α) Έστω η συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Να δώσετε τους παρακάτω ορισμούς:

i) Πότε η  $f$  λέγεται άρτια

ii) Πότε η  $f$  λέγεται περιττή

iii) Πότε η  $f$  λέγεται περιοδική

iv) Πότε η  $f$  λέγεται φραγμένη άνω και

v) Πότε η  $f$  λέγεται φραγμένη κάτω

β) Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Να βρεθεί το

σύνολο τιμών της  $f$ .

**ZΗΤΗΜΑ4** α) Έστω  $f, g$  συναρτήσεις που ορίζονται στο διάστημα  $\Delta \subseteq \mathbb{R}$  και  $x_0 \in \Delta$ . Αν οι  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$  τότε να αποδειχθεί ότι και η  $f+g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και είναι

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

β) Έστω η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = 2x^2 + x + 3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $M(0,3)$ .

### Θέματα Μαθηματικών 4<sup>ης</sup> Δέσμης 1986

**ZΗΤΗΜΑ1** Να λυθεί η εξίσωση 
$$\begin{vmatrix} x+3 & 2x & 3x-1 \\ -3 & 2x-6 & -x-1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

**ZΗΤΗΜΑ2** Να προσδιορισθούν οι τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε το σύστημα :

$$\begin{cases} (\lambda + 3)x + (\lambda - 1)y = 2\lambda + 1 \\ (\lambda - 2)x - (\lambda - 1)y = 3\lambda + 7 \end{cases} \text{ να είναι αδύνατο.}$$

**ZΗΤΗΜΑ3** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 90$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης.

**ZΗΤΗΜΑ4** Α. I. Έστω  $S$  το σύνολο των τιμών μιας μεταβλητής  $X$  ενός δείγματος μεγέθους  $V$ . Τι ονομάζουμε σχετική συχνότητα μιας τιμής  $x \in S$ ;

II. Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0 \in \Delta$ .

Πότε η συνάρτηση  $f$  λέγεται παραγωγίσιμη στο  $x_0$ ;

B. Έστω η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7x - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Αν  $C$

είναι η γραφική παράσταση της  $f$  να βρείτε την εξίσωση της

εφαπτομένης της  $C$  στο σημείο  $(1, \frac{23}{6})$ . Στη συνέχεια να βρείτε σε

ποιο σημείο η εφαπτομένη αυτή τέμνει τον άξονα  $x'$ .

## Θέματα Μαθηματικών 4<sup>ης</sup> Δέσμης 1987

- ZΗΤΗΜΑ1** A. Έστω η συνάρτηση  $f : A \rightarrow B$  όπου  $A \subseteq \mathbb{R}$  και  $B \subseteq \mathbb{R}$  και  $A \neq \emptyset$ . Να δώσετε τους παρακάτω ορισμούς
- I) Πότε η  $f$  λέγεται γνησίως αύξουσα  
 II) Πότε η  $f$  λέγεται γνησίως φθίνουσα  
 III) Πότε η  $f$  λέγεται αύξουσα  
 IV) Πότε η  $f$  λέγεται φθίνουσα  
 V) Πότε η  $f$  λέγεται « συνάρτηση επί»
- B. I. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία  $A(4,-3)$  και  $B(-2,5)$   
 II. Να βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε η παραπάνω ευθεία να διέρχεται από το σημείο  $\Gamma(-3, 2\lambda-1)$ .
- ZΗΤΗΜΑ2** A. Έστω  $\bar{x}$  η μέση τιμή της μεταβλητής  $X$  ως προς τη οποία εξετάζουμε ένα δείγμα. Να αποδειχθεί ότι η μέση τιμή  $\bar{y}$  της μεταβλητής  $Y = \alpha X + \beta$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ) είναι  $\bar{y} = \alpha \cdot \bar{x} + \beta$ .
- B. Να αποδειχθεί ότι 
$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta+1 & 1 \\ \beta & \alpha+1 & 1 \\ \alpha+\beta & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
- ZΗΤΗΜΑ3** Να βρεθούν οι τιμές των  $\lambda$  και  $\mu$  για τις οποίες τα συστήματα :
- $$\begin{cases} (2\lambda - 1)x + 10\mu\psi = 3 \\ 2x + 4\psi = 5 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} (\lambda - 2)x - (\mu + 1)\psi = 7 \\ 3x - 6\psi = 5 \end{cases} \quad \text{είναι}$$
- συγχρόνως αδύνατα.
- ZΗΤΗΜΑ4** A. Να αποδειχθεί ότι αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$  τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό.  
 B. Έστω  $C$  η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  με  $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 9x - 12$ . Να προσδιορίσετε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε το σημείο  $A(2,-10)$  να ανήκει στην  $C$  και η εφαπτομένη της  $C$  και η εφαπτομένη της  $C$  στο σημείο  $A$  να έχει συντελεστή διεύθυνσεως τον αριθμό  $-3$ .

## Θέματα Μαθηματικών 4<sup>ης</sup> Δέσμης 1988

**ZΗΤΗΜΑ1** A. Θεωρούμε το σύστημα: 
$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \\ \alpha_3 x + \beta_3 y = \gamma_3 \end{cases}$$
 . Να αποδειχθεί ότι αν

$$\text{το σύστημα είναι συμβιβαστό τότε θα ισχύει: } \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

B. Να λυθεί το σύστημα: 
$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ -3x + 2y + 6z = 0 \end{cases}$$

**ZΗΤΗΜΑ2** A. Έστω  $S_X$  η τυπική απόκλιση της μεταβλητής  $X$  ως προς την οποία εξετάζουμε ένα δείγμα. Να αποδειχθεί ότι η τυπική απόκλιση  $S_\Psi$  της μεταβλητής  $\Psi = \alpha X + \beta$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  είναι  $S_\Psi = |\alpha| S_X$ .

B. Έστω  $A = \begin{bmatrix} x & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$  και  $I, O$  ο μοναδιαίος και μηδενικός πίνακας

$2 \times 2$  αντιστοίχως. Να προσδιορίσετε την τιμή του  $x \in \mathbb{R}$  ώστε να είναι  $A^2 + 6A - 3I = O$ .

**ZΗΤΗΜΑ3** A. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση  $f$  με :

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 5x + 6, & x \leq 1 \\ 2\sqrt{x^2 + 3}, & x > 1 \end{cases} \text{ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο}$$

$$x_0 = 1$$

B. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int_1^2 \frac{x^3 - 5x^2 + 1}{x} dx$

**ZΗΤΗΜΑ4** A. Έστω  $v \in \mathbb{N}$  και  $v > 1$ . Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = x^v$ . Να αποδείξετε ότι  $f'(x) = vx^{v-1}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

B. Έστω η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = 3x^3 - \alpha x^2 + \beta x - 3$  όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Εάν η  $f$  έχει τοπικά ακρότατα στα  $x_1 = 1$  και  $x_2 = -\frac{5}{9}$  τότε να βρεθούν οι αριθμοί  $\alpha, \beta$ .

## Θέματα Μαθηματικών 4<sup>ης</sup> Δέσμης 1989

### ZΗΤΗΜΑ1

A. Αν για τον τετραγωνικό  $n \times n$  πίνακα  $A$  υπάρχει αντίστροφος να αποδειχθεί ότι είναι μοναδικός.

B. Έστω ο πίνακας  $\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  τον οποίο συμβολίζουμε με  $A(x)$

$x \in \mathbb{R}$ . Να αποδειχθεί ότι

$$1. A(x_1) \cdot A(x_2) = A(x_1 + x_2), (x_1, x_2 \in \mathbb{R})$$

$$2. A(x) \cdot A(-x) = I_3, (I_3 \text{ ο μοναδιαίος } 3 \times 3).$$

### ZΗΤΗΜΑ2

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = x^2 + \frac{2\alpha}{x} + \beta$ , ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ) η οποία

μηδενίζεται στο  $x_1 = 1$  και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο  $x_0 = 2$ .

α) Να βρεθούν τα  $\alpha, \beta$

β) Να βρεθεί το είδος του ακροτάτου και η τιμή του.

### ZΗΤΗΜΑ3

A. Να αποδείξετε ότι : Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  με κοινό πεδίο ορισμού το διάστημα  $\Delta$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0 \in \Delta$  τότε η συνάρτηση  $f+g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 \in \Delta$  και

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

B. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \begin{cases} \frac{3\alpha}{x^3} + 1, & 0 < x \leq 2 \\ \frac{1 - \sqrt{x-1}}{x^2 - 4}, & x > 2 \end{cases}$

Να προσδιοριστεί το  $\alpha \in \mathbb{R}$  ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο  $x_0 = 2$ .

### ZΗΤΗΜΑ4

Να αποδειχθεί ότι :

α) η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \sqrt{x}$  είναι γνησίως αύξουσα

β) για  $\kappa \geq 1$  :  $\sqrt{\kappa} \leq \int_{\kappa}^{\kappa+1} \sqrt{x} dx$  και  $\int_{\kappa-1}^{\kappa} \sqrt{x} dx \leq \sqrt{\kappa}$

## Θέματα Μαθηματικών 4<sup>ης</sup> Δέσμης 1990

- ZΗΤΗΜΑ1**     Α. Αν  $A$  είναι πίνακας  $n \times n$  και υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  με  $\gamma \neq 0$  για τους οποίους ισχύει ότι:  $\alpha A^3 - \beta A + \gamma I = O$  όπου  $I, O$  ο μοναδιαίος και ο μηδενικός πίνακας  $n \times n$  αντιστοίχως να αποδείξετε ότι  $A$  είναι αντιστρέψιμος .
- B. Αν  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$  και  $I, O$  ο μοναδιαίος και ο μηδενικός πίνακας  $2 \times 2$  αντιστοίχως να βρείτε όλες τις τριάδες  $(\kappa, \lambda, \mu)$  πραγματικών αριθμών για τις οποίες ισχύει ότι :  $\kappa A^2 + 3\lambda A - \mu I = O$ .
- ZΗΤΗΜΑ2**     Α. Να αποδείξετε ότι : Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι ορισμένες στο διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμες στο  $x_0 \in \Delta$  τότε  $(fg)$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 \in \Delta$  και είναι
- $$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$
- B. Δίνεται η συνάρτηση  $g$  η οποία είναι ορισμένη στο  $\mathbb{R}$ , δυο φορές παραγωγίσιμη σ' αυτό και ισχύει  $g(-1)=7$ . Αν  $f$  είναι μια συνάρτηση με  $f(x) = 3(x-2)^2 \cdot g(2x-5)$  να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και να υπολογίσετε την  $f''(2)$ .
- ZΗΤΗΜΑ3**     Έστω  $\alpha$  πραγματικός αριθμός και  $f$  η συνάρτηση με
- $$f(x) = \frac{x^4}{3} + \frac{2\alpha x^3}{3} + \left( \alpha^2 - 2\alpha + \frac{5}{2} \right) x^2 + (\alpha^3 + 7) x - 5\alpha^2.$$
- Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  δεν έχει σημεία καμπής.
- ZΗΤΗΜΑ4**     Α. Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής στο διάστημα  $\Delta$  και  $\alpha, \beta \in \Delta$  με  $\alpha < \beta$ . Αν  $F$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$  τότε να αποδείξετε ότι
- $$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = F(\beta) - F(\alpha).$$
- B. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  με  $f(x) = x^2 e^x$  του άξονα  $x'x$  και των ευθειών με εξισώσεις  $x=1$  και  $x=3$ .



### Θέματα Μαθηματικών 4<sup>ης</sup> Δέσμης (24/6/91)

#### ΖΗΤΗΜΑ1

A. Αν A και B είναι πίνακες 2x2 να αποδειχθεί ότι  $D(AB) = D(A) \cdot D(B)$

B. Για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  να ευρεθούν οι τιμές των x και y οι οποίες επαληθεύουν τη σχέση

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda x \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} y \\ \lambda y \end{bmatrix} = (\lambda + 1) \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

#### ΖΗΤΗΜΑ2

A. Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίζεται στο  $x_0 \in \Delta$ . Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x_0) - x_0f(x)}{x - x_0} = f(x_0) - x_0f'(x_0).$$

B. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με  $f(x) = \sqrt{x+3} + x - 3$ ,  $x \geq -3$  στο σημείο  $x_0 = -3$ .

#### ΖΗΤΗΜΑ3

A. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g οι οποίες έχουν τις εξής ιδιότητες:

- α) Είναι συνεχείς στο  $[\alpha, \beta]$  και παραγωγίσιμες στο  $(\alpha, \beta)$
- β) για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$  και  $g(x) \neq 0$  και για κάθε  $x \in (\alpha, \beta)$  είναι  $g'(x) \neq 0$  και
- γ)  $f(\beta)g(\alpha) - f(\alpha)g(\beta) = 0$

Να αποδείξετε ότι

1. Για την συνάρτηση F με  $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στο  $[\alpha, \beta]$ .

2. Υπάρχει  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο ώστε  $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ .

B. α) Δίνεται η συνάρτηση f με  $f(x) > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης F με  $F(x) = [f(x)]^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$

β) Έστω  $\alpha > 0$ . Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης g με  $g(x) = \alpha^{\sqrt{x^2+1}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

#### ΖΗΤΗΜΑ4

A. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της  $f: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \eta\mu^2 x - \sqrt{2}\eta\mu x + 2\sqrt{2}$ .

β) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο  $f(x) = \begin{cases} e^x - e, & x < 1 \\ \frac{\ln x}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x'x και τις ευθείες  $x=0$  και  $x=e$ .

## Θέματα Μαθηματικών 4<sup>ης</sup> Δέσμης (1992)

**ZΗΤΗΜΑ1** A. Δίνεται το σύστημα  $(\Sigma) : \begin{cases} \alpha_1 x = \beta_1 \\ \alpha_2 x = \beta_2 \end{cases}$  με  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$

πραγματικούς αριθμούς.

α) Να αποδειχθεί ότι το σύστημα  $(\Sigma)$  είναι συμβιβαστό τότε  $\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = 0$  ( $\sigma$ )

β) Να αποδειχθεί ότι η σχέση ( $\sigma$ ) δεν είναι ικανή για να είναι το σύστημα  $(\Sigma)$  συμβιβαστό.

B. Με την προϋπόθεση ότι ο πίνακας  $2 \times 2$   $A = \begin{bmatrix} \lambda^3 & -\lambda^2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  έχει

ορίζουσα διάφορη του μηδενός να λυθεί για τις διάφορες τιμές του

πραγματικού αριθμού  $\lambda$  το σύστημα  $\begin{cases} 2x - \lambda y = \lambda - 1 \\ (\lambda + 1)x - y = 0 \end{cases}$ .

**ZΗΤΗΜΑ2** A. Να αποδειχθεί ότι  $\forall x \in (0, 1)$  ισχύει η σχέση  $1 + x < e^x < 1 + e \cdot x$

B. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \begin{cases} x^3 \eta \mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

i) Να αποδειχθεί ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$

ii) Να βρεθεί η παράγωγος της  $f$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**ZΗΤΗΜΑ3** A. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με

$$f(x) = \frac{x^2}{4} (2 \ln x - 1) - 2x(\ln x - 1), \quad x > 0$$

α) Να βρεθεί η παράγωγος  $f'$  της  $f$  για κάθε  $x > 0$

β) Να μελετηθεί η συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

B. α) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα  $E(t) = \int_1^t (x-2) \cdot \ln x dx$  για

κάθε  $t > 1$

β) Να βρεθεί το όριο  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{E'(t)}{t \ln t}$ .

**ZΗΤΗΜΑ4** A. Να βρεθεί πολωνυμική συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \alpha x^3 + \beta x + \gamma$ ,  $x \in \mathbb{R}$   $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες

i) Η συνάρτηση  $f$  είναι περιττή

ii) Η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο  $x_0 = 1$

iii)  $\int_0^2 f(x) dx = 2$

B. Η συνάρτηση  $g$  έχει συνεχή παράγωγο στο  $[0, \pi]$  και  $g(\pi) = e^{-\pi}$ .

Αν  $\int_0^\pi (g(x) + g'(x)) \cdot e^x dx = 2$  να βρεθεί το  $g(0)$ .

### Θέματα Μαθηματικών 4<sup>ης</sup> Δέσμης (1993)

**ΖΗΤΗΜΑ1** A. Δίνονται οι πίνακες  $A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$  και ο αντιστρέψιμος  $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ . Να υπολογίσετε το  $\alpha$  ώστε  $\Gamma^{-1}A\Gamma = B$ .

B. Δίνεται ο πίνακας  $A = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  α) Να υπολογίσετε την τιμή του  $\lambda$  ώστε  $A^2 = 5I$  όπου  $I$  μοναδιαίος.

β) Για την τιμή του  $\lambda$  που βρήκατε να υπολογίσετε τους  $x, y \in \mathbb{R}$

ώστε να ισχύει  $A^6 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 \\ -375 \end{bmatrix}$ .

**ΖΗΤΗΜΑ2** A. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 3x + \mu$ ,  $x, \mu \in \mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x)=0$  δεν μπορεί να έχει δυο διαφορετικές ρίζες στο διάστημα  $(1,2)$

B. Αν η συνάρτηση  $g(x)$  έχει συνεχή παράγωγο στο  $[0,1]$  και

ικανοποιεί την σχέση  $\int_0^1 xg'(x)dx = 1993 \int_0^1 g(x)dx$  να βρείτε το  $g$

(1).

**ΖΗΤΗΜΑ3** Μια βιομηχανία παράγει  $x$  ποσότητα από ένα προϊόν με κόστος

που δίνεται από την συνάρτηση  $K(x) = \frac{\alpha x^3}{4}$  όπου  $x > 0$  και

$\alpha \in \left[\frac{2}{9}, \frac{9}{2}\right]$ . Τα έσοδα από την πώληση  $x$  ποσότητας του προϊόντος

δίνεται από την συνάρτηση  $E(x) = x^2$ ,  $x > 0$  και το κέρδος από την συνάρτηση  $f(x) = E(x) - K(x)$ ,  $x > 0$ .

α) Να βρείτε την ποσότητα  $x_0$  για την οποία έχουμε το μέγιστο κέρδος που συμβολίζεται με  $M(\alpha)$ .

β) Να βρείτε την τιμή του  $\alpha \in \left[\frac{2}{9}, \frac{9}{2}\right]$  για την οποία το  $M(\alpha)$  γίνεται μέγιστο καθώς και το μέγιστο κέρδος.

**ΖΗΤΗΜΑ4** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = xe^{-vx}$ ,  $x \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{N}^*$

A. Να μελετήσετε τη μονοτονία της  $f$ , να βρείτε τα ακρότατα και τα σημεία καμπής της

B. Να αποδείξετε ότι  $2 \leq e^2 v^2 \cdot \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} xe^{-vx} dx \leq e$ .

### Θέματα Μαθηματικών 4<sup>ης</sup> Δέσμης (27/6/94)

- ZΗΤΗΜΑ1** A. Δίνεται ο θετικός πραγματικός αριθμός  $\alpha$  και η συνάρτηση  $f(x) = \alpha x^2 - 2x \ln x$  με  $x \in (0, +\infty)$ .
- α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι κυρτή ή κοίλη.
- β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $A(1, f(1))$  και να προσδιορίσετε το  $\alpha$  ώστε η εφαπτομένη αυτή να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- B. Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $P$  η οποία έχει συνεχή  $f''$  στο  $P$ , παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο  $x_0=2$  και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A(0,1)$ . Αν ισχύει  $\int_0^2 [\chi \cdot f''(\chi) + 3 \cdot f'(\chi)] d\chi = -\frac{8}{3}$  να υπολογίσετε το  $f(2)$ .
- ZΗΤΗΜΑ2** A. Έστω  $A, B$  πίνακες  $n \times n$  τέτοιοι ώστε  $A + (B-I) = AB-I$ , όπου  $I$  ο μοναδιαίος  $n \times n$  πίνακας. Να αποδείξετε ότι ο πίνακας  $(A-I)$  αντιστρέφεται.
- B. Έστω  $A$  ένας  $n \times n$  πίνακας για τον οποίο υποθέτουμε ότι  $I - A^2 + A^4 = O$ , όπου  $I$  ο μοναδιαίος  $n \times n$  πίνακας και  $O$  ο μηδενικός  $n \times n$  πίνακας.
- α) Να αποδείξετε ότι  $A^6 + I = O$ , ότι ο  $A$  έχει αντίστροφο και ότι  $A^{-1} = -A^5$ .
- β) Να αποδείξετε ότι  $-A^{308} + (A^{-1})^{105} = A^2 + A^3$ .
- ZΗΤΗΜΑ3** A. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $f'(x) = 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$  τότε να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .
- B. Έστω  $\Omega$  ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων και  $A, B$  είναι υποσύνολα του  $\Omega$ . Έστω  $P(A') \leq 0,28$  και  $P(B') \leq 0,71$  Να αποδείξετε ότι α)  $P(A \cap B) \geq 1,01 - P(A \cup B)$  β) το ενδεχόμενο  $A \cap B$  δεν είναι το  $\emptyset$ .
- ZΗΤΗΜΑ4** A. Έστω ότι η ευθεία  $\psi = 2x + 5$  είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$ . Να βρείτε τα όρια:
- α)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x]$ .
- β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό  $\mu$ , αν 
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu \cdot f(x) + 4x}{x \cdot f(x) - 2x^2 + 3x} = 1$$
- B. Να αποδείξετε ότι α)  $e^x - x + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$
- β) Η εξίσωση  $2 \cdot e^x + 2x = x^2 + 2$  έχει ακριβώς μια λύση την  $x=0$ .

### Θέματα Μαθηματικών 4<sup>ης</sup> Δέσμης (24/6/95)

- ΖΗΤΗΜΑ1** A. Αν για τους  $n \times n$  πίνακες  $A, B$  ισχύει  $A^2 + 2B = 2AB$  και ο  $B$  αντιστρέφεται να αποδείξετε ότι :
- α) Ο πίνακας  $A$  αντιστρέφεται  
 β)  $2(A^{-1})^2 + B^{-1} = 2A^{-1}$
- B. Θεωρούμε ένα γραμμικό σύστημα  $3 \times 3$  με πραγματικούς συντελεστές και με αγνώστους  $\chi, \psi, \omega \in \mathbb{R}$ . Έστω  $D$  η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων του συστήματος και  $D_\chi, D_\psi, D_\omega$  οι ορίζουσες που προκύπτουν από την  $D$  αν αντικαταστήσουμε την 1<sup>η</sup>, 2<sup>η</sup> και 3<sup>η</sup> στήλη αντίστοιχα με την στήλη των σταθερών όρων του συστήματος. Υποθέτουμε ότι  $\kappa D = \kappa D_\chi + 2\lambda D_\psi + (\kappa + 2\lambda) D_\omega$ , όπου  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}^*$ . Να αποδείξετε ότι :
- α) Αν το σύστημα έχει την μοναδική λύση  $(\chi_0, \psi_0, \omega_0)$  τότε  $\kappa(\chi_0 + \omega_0) + 2\lambda(\psi_0 + \omega_0) = \kappa\lambda$   
 β) Αν το σύστημα είναι ομογενές τότε έχει και μη μηδενικές λύσεις.
- ΖΗΤΗΜΑ2** A. Δίνεται ο αντιστρέψιμος  $2 \times 2$  πίνακας  $A$  και ο
- $$B = \begin{bmatrix} \alpha - \beta + \gamma & 0 \\ \alpha - 3 - \gamma & \beta + \gamma \end{bmatrix}$$
- Αν  $AB = 0$  να βρεθούν τα  $\alpha, \beta, \gamma$ .
- B. Έστω  $\Omega$  το σύνολο των ριζών της εξίσωσης
- $$(\chi^2 + 4\chi - 5)(\chi - 7) = 0$$
- Υποθέτουμε ότι  $\Omega$  είναι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα .
- $$(a - 1995)\alpha\chi + \psi = 0$$
- Θεωρούμε το σύστημα
- $$(a - 1995)(2a - 7)\chi + (a - 6)\psi = 0$$
- όπου  $a \in \Omega$ . Έστω  $A \subseteq \Omega$  είναι το ενδεχόμενο το παραπάνω σύστημα να έχει και μη μηδενικές λύσεις . Να βρεθεί η πιθανότητα  $P(A)$ .
- ΖΗΤΗΜΑ3** A. α) Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$  και  $f(a) \neq f(\beta)$  τότε για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(a)$  και  $f(\beta)$  υπάρχει τουλάχιστον ένας  $\chi_0 \in (a, \beta)$  τέτοιος ώστε να ισχύει  $f(\chi_0) = \eta$ .
- β) Δίνεται η συνάρτηση  $f(\chi) = \chi^4 - 2\chi^2 + \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$
- i) Αν  $A(\chi_1, f(\chi_1)), B(\chi_2, f(\chi_2)), \Gamma(\chi_3, f(\chi_3))$  είναι τοπικά ακρότατα της γραφικής παράστασης της  $f$  και  $\chi_1 < \chi_2 < \chi_3$ , να αποδείξετε ότι η ευθεία  $AB$  είναι κάθετη στην ευθεία  $B\Gamma$ .
- ii) Αν  $0 < \alpha < 1$  να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(\chi) = 0$  έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα  $(-1, 0)$ .
- B. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f'(\chi) \neq 0$  για κάθε  $\chi \in \mathbb{R}$  και η συνάρτηση  $g$  τέτοια ώστε  $g(\chi) f'(\chi) = 2f(\chi)$  για κάθε  $\chi \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι αν η γραφική παράσταση της  $f$  έχει σημείο καμπής το  $A(\chi_0, f(\chi_0))$  τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $g$

**ΖΗΤΗΜΑ 4**

στο σημείο  $B(\chi_0, g(\chi_0))$  είναι παράλληλη στην ευθεία  $\psi - 2\chi + 5 = 0$ .

A. Η αξία μιας μηχανής που εκτυπώνει βιβλία μειώνεται με το χρόνο  $t$  σύμφωνα με τη συνάρτηση

$$f(t) = \frac{7A}{2} e^{-\frac{t+28}{14}}, \quad t \geq 0 \text{ όπου } A \text{ ένας θετικός αριθμός.}$$

Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους  $K(t)$  από την πώληση των βιβλίων που εκτυπώνει η συγκεκριμένη μηχανή δίνεται από τη

$$\text{συνάρτηση } K'(t) = \frac{A}{4} e^{-\frac{t}{7}}, \quad t \geq 0 \text{ και υποθέτουμε ότι}$$

$$K(0) = 0.$$

Να βρεθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία θα πρέπει να πουληθεί η μηχανή έτσι ώστε το συνολικό κέρδος  $P(t)$  από τα βιβλία που πουλήθηκαν συν την αξία της μηχανής να γίνεται μέγιστο.

$$B. \text{ Αν } G(\chi) = \int_1^\chi f(t) dt \text{ όπου } f(t) = \int_1^{3t} \frac{e^u}{\sqrt{u}} du \text{ και } \chi > 0, t > 0 \text{ να}$$

βρείτε :

α) την  $G''(1)$

$$\beta) \text{ το } \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\chi} \cdot G'(\chi) - \sqrt{3}}{\sqrt{\chi+1} - 1}$$

### Θέματα Μαθηματικών 4<sup>ης</sup> Δέσμης (25/6/96)

**ΖΗΤΗΜΑ1ο** Α. Έστω  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  με  $\alpha < \beta < \gamma$  και  $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{bmatrix}$ . Θεωρούμε

το  $3 \times 3$  γραμμικό σύστημα  $AX=B$  όπου  $X = \begin{bmatrix} \chi \\ \psi \\ \omega \end{bmatrix}$  με αγνώστους  $\chi, \psi, \omega \in \mathbb{R}$ .

Έστω  $D$  η ορίζουσα του πίνακα  $A$  και  $D_\chi, D_\psi, D_\omega$  οι ορίζουσες που προκύπτουν από την  $D$  αν αντικαταστήσουμε την 1<sup>η</sup>, 2<sup>η</sup> και 3<sup>η</sup> στήλη αντίστοιχα με τη στήλη των σταθερών όρων του συστήματος. Έστω ότι  $D_\chi^2 + D_\psi^2 + D_\omega^2 + 2D^2 = 2D(D_\chi - D_\psi)$  Να λυθεί το σύστημα  $AX=B$ .

Β. Δίνεται ο πίνακας  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$  και το πολυώνυμο  $f(\chi) = -\chi^2 + 3\chi + 1$

α) Να βρεθούν οι τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε  $|A - \lambda I| = 0$  όπου  $I$  ο μοναδιαίος πίνακας.

β) Αν  $B$  συμβολίζει τον πίνακα  $(f(3) - 1)(A - I)^2 + A - f(1)I$  να αποδείξετε

ότι υπάρχει μη μηδενικός πίνακας  $X = \begin{bmatrix} \chi \\ \psi \\ \omega \end{bmatrix}$  τέτοιος ώστε  $BX=O$  όπου  $O$  ο

μηδενικός πίνακας.

**ΖΗΤΗΜΑ2ο** Α. α) Έστω μια πραγματική συνάρτηση  $f$  συνεχής σ' ένα διάστημα  $\Delta$ . Να αποδείξετε ότι αν  $f'(\chi) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ .

β) Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις  $f, g$  που έχουν πεδίο ορισμού το διάστημα  $[0, +\infty)$  για τις οποίες ισχύει η σχέση:  $f'(\chi) = g'(\chi) + \eta \mu^2 \chi + e^x$  για  $\chi \in [0, +\infty)$ . Να αποδείξετε ότι  $f(0) + g(\chi) < g(0) + f(\chi)$  για κάθε  $\chi \in (0, +\infty)$ .

Β. α) Έστω η συνάρτηση  $f(\chi) = e^{a\chi}$  όπου  $a \in \mathbb{R}$ . Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν δυο τιμές της παραμέτρου  $a$  έτσι ώστε να ικανοποιείται η σχέση  $f''(\chi) + 2f'(\chi) = 3f(\chi)$  για κάθε  $\chi \in \mathbb{R}$

β) Έστω  $\lambda, \mu, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$  με  $\beta_1 \neq \beta_2$ . Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(\chi) = \lambda e^{\beta_1 \chi} + \mu e^{\beta_2 \chi}$  με  $\chi \in \mathbb{R}$ . Έστω ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός  $\chi_0$  τέτοιος ώστε  $g(\chi_0) = g'(\chi_0) = 0$  Να αποδειχθεί ότι  $\lambda = \mu = 0$ .

**ΖΗΤΗΜΑ3ο** Α. α) Δίνεται η συνάρτηση  $g$  συνεχής στο  $\mathbb{R}$  και

$f(\chi) = \int_0^\chi (\chi - t)g(t)dt$  Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι δυο φορές παραγωγίσιμη

και να μελετήσετε την  $f$  ως προς τα κοίλα όταν  $g(\chi) \neq 0$  για κάθε  $\chi \in \mathbb{R}$ .

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείετε από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $g(\chi) = \sqrt{\chi}$  και  $f(\chi) = 2\chi - 1$  και την ευθεία

$\chi=0$ .

B. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(\chi) = \sqrt{1+\chi^2} + \lambda\chi$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε την τιμή του  $\lambda$  αν είναι γνωστό ότι  $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{f(\chi)}{\chi} = 1$

β) Για την τιμή του  $\lambda$  που βρήκατε παραπάνω να υπολογίσετε το

ολοκλήρωμα  $I = \int_0^1 \frac{x}{f^2(x)} dx$ .

**ΖΗΤΗΜΑ 4ο** A. α) Δίνεται ο πίνακας  $X = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$  όπου  $\alpha, \beta$  είναι θετικοί

πραγματικοί αριθμοί με  $\alpha + \beta = 1$ . Να αποδειχθεί ότι  $X^2 = \begin{bmatrix} \gamma & \delta \\ \delta & \gamma \end{bmatrix}$  όπου  $\gamma, \delta$

είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με  $\gamma + \delta = 1$ .

β) Έστω ότι  $\Omega$  είναι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και  $A, B$  ενδεχόμενα του  $\Omega$

Θεωρούμε τους πίνακες  $Y = \begin{bmatrix} P(A) & P(A') \\ P(A') & P(A) \end{bmatrix}$  και  $Y^2 = \begin{bmatrix} P(B) & P(B') \\ P(B') & P(B) \end{bmatrix}$  όπου

$A'$  είναι το συμπληρωματικό σύνολο του  $A$  και  $B'$  το συμπληρωματικό

σύνολο του  $B$ . Αν  $P(B') = \frac{4}{9}$  και  $P(A) < P(A')$  τότε να βρεθούν οι

πιθανότητες των ενδεχομένων  $A$  και  $A'$ .

B. Έστω ότι  $f(t)$  είναι η ποσότητα ενός αντιβιοτικού που έχει απορροφηθεί από το ανθρώπινο σώμα κατά τη χρονική στιγμή  $t$  όπου  $t \geq 0$  και

$f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι πραγματική συνάρτηση με  $f(\sqrt{t}) = 1 - 2^{-\frac{\sqrt{t}}{499}}$

Να βρεθεί η χρονική στιγμή  $t_1$  κατά την οποία ο ρυθμός απορρόφησης του αντιβιοτικού από το ανθρώπινο σώμα είναι ίσος με το  $1/16$  του ρυθμού απορρόφησης κατά τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0$ .



## Θέματα Μαθηματικών 4<sup>ης</sup> Δέσμης (3/7/97)

**ΖΗΤΗΜΑ 1ο** Α. Έστω  $X, B$  είναι  $n \times m$  πίνακες και  $A$  είναι ένας  $n \times n$  αντιστρέψιμος πίνακας. Να αποδείξετε ότι ισχύει η ισοδυναμία

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

Β. Αν  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}, 2\}$ , να αποδείξετε ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί  $\chi$  και  $\psi$ ,

ώστε να ισχύει η σχέση: 
$$\begin{bmatrix} \lambda & 2 \\ -2 & \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \chi \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -\lambda \\ \lambda & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \chi \\ \psi \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

**ΖΗΤΗΜΑ 2ο** Α. Στην τελευταία Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα, που έγινε στη Βομβάη, πέντε Έλληνες μαθητές βραβεύτηκαν με μετάλλια. Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία αποφάσισε να δωρίσει σε καθένα από τους πέντε μαθητές από δυο βιβλία, που επιλέγονται από μια συλλογή δέκα διαφορετικών βιβλίων. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους τα δέκα αυτά βιβλία μπορούν να διανεμηθούν στους πέντε βραβευθέντες μαθητές;

Β. Θεωρούμε το σύνολο των θετικών ακεραίων αριθμών  $\chi$  τέτοιων ώστε  $1000 \leq \chi \leq 9999$ . Ως γνωστόν αυτοί είναι τετραψήφιοι αριθμοί στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης. Πόσοι από αυτούς τους αριθμούς γράφονται με τέσσερα διαφορετικά ψηφία;

**ΖΗΤΗΜΑ 3ο** Α. Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$  και ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$f''(\chi) - g''(\chi) = 4 \text{ για κάθε } \chi \in \mathbb{R}$$

$$f'(1) = g'(1) \text{ και } f(2) = g(2)$$

i) Να βρείτε τη συνάρτηση  $t(\chi) = f(\chi) - g(\chi)$ ,  $\chi \in \mathbb{R}$

ii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ .

Β. Έστω  $f$  πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο  $\mathbb{R}$  που είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει  $f''(\chi) > 0$  για κάθε  $\chi \in \mathbb{R}$ .

Έστω  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  και  $\alpha < \beta$ . Να αποδειχθεί ότι:

i)  $f(\chi) - f(\alpha) \leq f'(\beta)(\chi - \alpha)$  για κάθε  $\chi \in [\alpha, \beta]$

ii)  $2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq f'(\beta)(\beta - \alpha)^2 + 2f(\alpha)(\beta - \alpha).$

**ΖΗΤΗΜΑ 4ο** Έστω  $f$  πραγματική συνάρτηση συνεχής στο  $\mathbb{R}$  τέτοια ώστε

$$f(\chi) \geq 2 \text{ για κάθε } \chi \in \mathbb{R}. \text{ Θεωρούμε τη συνάρτηση:}$$

$$g(\chi) = \chi^2 - 5\chi + 1 - \int_0^{\chi^2 - 5\chi} f(t) dt, \chi \in \mathbb{R}$$

Α. Να αποδείξετε ότι  $g(-3) \cdot g(0) < 0$

Β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $g(\chi) = 0$  έχει μια μόνο ρίζα στο διάστημα  $(-3, 0)$ .

### Θέματα Μαθηματικών 4<sup>ης</sup> Δέσμης (27/6/98)

**ZΗΤΗΜΑ 1ο** Α. Να αποδείξετε ότι αν υπάρχει μια αρχική συνάρτηση  $F$  της  $f$  σ' ένα διάστημα  $\Delta$  τότε υπάρχουν άπειρες και μάλιστα είναι όλες οι συναρτήσεις της μορφής  $G(x) = F(x) + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$  και μόνο αυτές.

Με  $\mathbb{R}$  συμβολίζουμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου  $C: x^2 + y^2 + 1 = 2x + 6y$  και είναι κάθετη στην ευθεία  $\varepsilon: 2x + y + 5 = 0$ .

**ZΗΤΗΜΑ 2ο** Δίνεται η συνάρτηση  $\varphi(t) = 2t + \mu$ ,  $t \in \mathbb{R}$  όπου η παράμετρος  $\mu$  είναι ένας πραγματικός αριθμός.

Μια επιχείρηση έχει έσοδα  $E(t)$  που δίνονται σε εκατομμύρια δραχμές από τον τύπο

$$E(t) = (t-1)\varphi(t), t \geq 0 \text{ όπου } t \text{ συμβολίζει το χρόνο σε έτη.}$$

Το κόστος λειτουργίας  $K(t)$  της επιχείρησης δίνεται επίσης σε εκατομμύρια δραχμές σύμφωνα με τον τύπο

$$K(t) = \varphi(t+4), t \geq 0.$$

α) Να βρείτε τη συνάρτηση κέρδους  $P(t)$  για  $t \geq 0$  όταν γνωρίζουμε ότι κατά το πρώτο έτος λειτουργίας η επιχείρηση παρουσίασε ζημιά δώδεκα εκατομμύρια δραχμές.

β) Ποια χρονική στιγμή θα αρχίσει η επιχείρηση να παρουσιάζει κέρδη;

γ) Ποιος θα είναι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης κέρδους στο τέλος του δεύτερου έτους;

δ) Να υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος

$$I = \frac{111}{2} \int_0^6 P(t) dt.$$

**ZΗΤΗΜΑ 3ο** Δίνεται η συνάρτηση  $h(x) = 2^{12}(e^{-4x} - e^{-ax})$ ,  $x \geq 0$

όπου  $a$  πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος του 4

α) Να δείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = h(0) = 0$

β) Να μελετήσετε ως προς τα ακρότατα τη συνάρτηση  $h(x)$

γ) Αν  $\chi_1$  είναι ρίζα της πρώτης παραγώγου και  $\chi_2$  είναι ρίζα της δευτέρας παραγώγου της  $h(x)$  να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα  $\chi_1, \chi_2$

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$M = \frac{334}{75} \int_0^{\ln 2} h(x) dx \text{ όταν } a=8$$

**ZΗΤΗΜΑ 4ο** Δίνεται ο πίνακας  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & \lambda+1 & 2 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda+2 \end{bmatrix}$  και οι

πολυωνυμικές συναρτήσεις

$$f(x) = 4(x-1)(x^2 - 5x + 6), x \in \mathbb{R}$$

και

$$g(x) = x^2 + (\kappa^2 - 5\kappa)x + 13, x \in \mathbb{R}$$

όπου  $\kappa$  και  $\lambda$  πραγματικοί αριθμοί.

α) Ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης είναι

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} \text{ με}$$

$$\omega_1 = \chi_1, \omega_2 = \chi_2, \omega_3 = \chi_3$$

$$\omega_4 = 4\chi_1, \omega_5 = 4\chi_2, \omega_6 = 4\chi_3$$

όπου  $\chi_1, \chi_2, \chi_3$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης  $f(\chi) = 0$

Οι πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων ικανοποιούν τις σχέσεις

$$P(\omega_6) = P(\omega_5) = P(\omega_4) =$$

$$= 3P(\omega_3) = 3P(\omega_2) = 3P(\omega_1)$$

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων του  $\Omega$ .

β) Θεωρούμε το ενδεχόμενο

$$B = \left\{ \lambda \in \Omega \left( \begin{array}{l} \text{το σύστημα } AX = 2X \text{ έχει} \\ \text{και μη μηδενικές λύσεις} \end{array} \right) \right\}$$

όπου  $X$  ένας  $3 \times 1$  άγνωστος πίνακας και  $\Omega$  ο δειγματικός χώρος του α) ερωτήματος. Να υπολογίσετε την πιθανότητα  $P(B)$ .

γ) Να δείξετε ότι για το ενδεχόμενο  $\Gamma$  του  $\Omega$  όπου

$$\Gamma = \left\{ \kappa \in \Omega \left( \begin{array}{l} \eta g(\chi) \text{ παρουσιάζει ακρότατο} \\ \text{στο σημείο } \chi_0 = 3 \end{array} \right) \right\}$$

και  $\Omega$  ο δειγματικός χώρος του α) ερωτήματος ισχύει  $P(\Gamma) = P(B)$ .

δ) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων  $B \cap \Gamma$  και  $B \cup \Gamma$ .

## Θέματα Μαθηματικών 4<sup>ης</sup> Δέσμης (9/7/99)

### ZΗΤΗΜΑ 1

A. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$  τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

B α) Να αποδείξετε ότι  $\ln(x+1) > x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{5}$  για κάθε

$x \in [0, +\infty)$

β) Έστω συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη στο  $[0, +\infty)$  για την οποία ισχύει

$$[f(x)]^5 + 2[f(x)]^3 + 3f(x) = (x+1)\ln(x+1) - \frac{4}{5}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 182$$

για κάθε  $x \in [0, +\infty)$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$

### ZΗΤΗΜΑ 2

A. Δίνονται τα σημεία του επιπέδου  $A(1,3), B(-1,0), \Gamma(3,-1)$

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στην ευθεία BΓ

β) Έστω C ο κύκλος με κέντρο το σημείο A και ακτίνα (AB).

Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της ευθείας BΓ με τον παραπάνω κύκλο

B. Έστω  $\Omega = \{0, 1, 2\}$  ένας δειγματικός χώρος με

$$P(0) = 2P(2) = \frac{1}{3}$$

α) Να βρείτε το  $P(1)$

β) Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = e^x - \frac{\lambda}{2}x^2 + 118, \quad x \in \mathbb{R} \text{ και } \lambda \in \Omega$$

Θεωρούμε το ενδεχόμενο  $E = \{\lambda \in \Omega / \text{η γραφική παράσταση της } f \text{ έχει σημείο καμπής το } (0, f(0))\}$ . Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου E.

### ZΗΤΗΜΑ 3

A. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \eta \mu^2(\alpha x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$  ώστε να ισχύει

$$f''(x) + 4\alpha^2 f(x) = 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

B. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$

α) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση  $f$  και να αποδείξετε ότι  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in [1, 3]$

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x=1$  και  $x=3$ .

### ZΗΤΗΜΑ 4

A. Έστω A ένας  $n \times n$  πίνακας για τον οποίο ισχύει

$$(A - I)^{-1} = A + 2I \text{ όπου } I \text{ ο } n \times n \text{ μοναδιαίος πίνακας}$$

α) Να αποδείξετε ότι  $A^2 = 3I - A$

β) Έστω X  $n \times n$  πίνακας για τον οποίο ισχύει

$$AX - A = 4I - X. \text{ Να αποδείξετε ότι } X = A + I$$

B. Θεωρούμε παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού

$$\text{το } \mathbb{R} \text{ και το σύστημα } \begin{cases} f(1)x + y + \omega = 0 \\ f(2)x + 2y + 2\omega = 0 \\ 2x + f(2)y + 2f(1)\omega = 0 \end{cases} \text{ με}$$

αγνώστους  $x, y, \omega$ .

Υποθέτουμε ότι το σύστημα έχει και μη μηδενικές λύσεις

Να αποδείξετε ότι α)  $\frac{f(2)}{2} = \frac{f(1)}{1}$  β) Η εξίσωση

$xf'(x) - f(x) = 0$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(1,2)$ .

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2000  
ΤΕΤΑΡΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2000  
ΔΕΣΜΗ ΤΕΤΑΡΤΗ (4η)  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**ΖΗΤΗΜΑ 1ο**

- A.** Έστω μία συνάρτηση  $f$  συνεχής σ' ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $f'(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ .
- B.** Θεωρούμε παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια, ώστε:  
 $2xf(x) + (x^2 + 1)f'(x) = e^x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , με  $f(0) = 1$ .
- α) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση  $f$ .

**ΖΗΤΗΜΑ 2ο**

- A.** Δίνεται ο πίνακας  $A = \begin{bmatrix} \beta & -1 \\ \beta & -2 \end{bmatrix}$ , όπου  $\beta \in \mathbb{R}$ .

Αν  $\lambda \in \mathbb{R}$ , θεωρούμε το  $2 \times 2$  γραμμικό σύστημα  $AX = \lambda X$  όπου  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  είναι ο πίνακας-στήλη των αγνώστων.

Να αποδείξετε ότι για κάθε  $\beta \in \mathbb{R}$  υπάρχουν ακριβώς δύο τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ , για τις οποίες το παραπάνω γραμμικό σύστημα έχει και μη μηδενικές λύσεις.

- B.** Έστω  $A$  ένας  $2 \times 2$  πίνακας για τον οποίο ισχύει

$$A = \begin{bmatrix} 2 + |A| & 4|A| + 1 \\ 1 & 2|A| \end{bmatrix} \text{ και } |A| > 0$$

όπου  $|A|$  είναι η ορίζουσα του πίνακα  $A$ .

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

α) Να αποδείξετε ότι  $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

β) Να αποδείξετε ότι ο πίνακας  $B=5I-A$ , όπου  $I$  ο  $2 \times 2$  μοναδιαίος πίνακας, είναι αντίστροφος του  $A$  και να βρείτε τον πίνακα  $X$  για τον οποίο ισχύει :

$$BX=A$$

**ΖΗΤΗΜΑ 3ο**

**A.** Θεωρούμε συνάρτηση  $f$  συνεχή στο  $\mathbb{R}$ .

α) Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^3 f(2x+1)dx = \frac{1}{2} \int_1^7 f(x)dx$$

β) Έστω ότι

$$4 \int_0^3 f(2x+1)dx = \int_1^7 f(x)dx + 2004$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (1,7)$  τέτοιο, ώστε  $f(\xi) = 334$ .

**B.** Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  που ικανοποιεί την ισότητα :  $\int_0^x (1+t^2)f(t) dt = x^2 + \int_0^1 6x(t^2+t)dt$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \frac{2x+5}{x^2+1}$

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της  $A(0, f(0))$ .

**ΖΗΤΗΜΑ 4ο**

**A.** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x) + f(y) = 0 \text{ με } x, y \in \mathbb{R}$$

παριστάνει κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$  και τον άξονα  $x'x$ .

**B.** Έστω  $\Omega$  είναι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και  $X, Y$  ενδεχόμενά του τέτοια, ώστε  $X \subseteq Y$ .

Έστω  $P(X), P(Y)$  είναι οι πιθανότητες των  $X, Y$  αντιστοίχως.

Έστω ότι οι πραγματικοί αριθμοί  $P(X), P(Y)$  είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης  $f$ , με

$$f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x + 2000, x \in \mathbb{R}.$$

Να υπολογίσετε

α) τις πιθανότητες  $P(X), P(Y)$

β) τις πιθανότητες  $P(X \cap Y), P(X \cup Y)$  και  $P(Y \cap X')$  όπου  $X'$  το αντίθετο ενδεχόμενο του  $X$ .



ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2001

ΤΕΤΑΡΤΗ 23 ΜΑΪΟΥ 2001

ΔΕΣΜΗ ΤΕΤΑΡΤΗ (4η)

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**ΖΗΤΗΜΑ 1ο**

**A.** Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$  και  $f(\alpha) \neq f(\beta)$ , τότε για κάθε αριθμό  $\xi$  μεταξύ των  $f(\alpha)$  και  $f(\beta)$  υπάρχει τουλάχιστον ένας  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιος ώστε να ισχύει  $f(x_0) = \xi$ .

**B.** Να αποδείξετε ότι:

**α.** Η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + 2x - 1 - \eta\mu 2x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , είναι γνησίως αύξουσα.

**β.** Η εξίσωση  $x^3 + 2x - 1 = \eta\mu 2x$  έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα  $(0, 1)$ .

**ΖΗΤΗΜΑ 2ο**

**A.** Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} 5x + 5y = \lambda\omega \\ 2x + y = 2\omega \\ x + 3y = 3\omega \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

**α.** Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$  για την οποία το σύστημα έχει δύο τουλάχιστον διαφορετικές λύσεις.

**β.** Αν  $(x_1, y_1, \omega_1)$  και  $(x_2, y_2, \omega_2)$  είναι δύο διαφορετικές λύσεις του συστήματος, να αποδείξετε ότι

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = \omega_1 \omega_2$$

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**B.** Θεωρούμε στο καρτεσιανό επίπεδο  $Oxy$  τη γραμμή με εξίσωση

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$$

**α.** Να αποδείξετε ότι η προηγούμενη εξίσωση παριστάνει κύκλο και να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του.

**β.** Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $O(0,0)$  και  $A(-6, 8)$  είναι τα άκρα μιας διαμέτρου του κύκλου.

**ΖΗΤΗΜΑ 3ο**

**A.** Η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  έχει συνεχή παράγωγο και ικανοποιεί την ισότητα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x) e^{f(x)} dx = 0,$$

όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  με  $\alpha < \beta$ .

Να αποδείξετε ότι:

**α.**  $f(\alpha) = f(\beta)$

**β.** Η εξίσωση  $f'(x)=0$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(\alpha, \beta)$ .

**B.** Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = 2x + \frac{4}{x}, \quad x > 0$$

**α.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν  $E(\lambda)$  του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

συνάρτησης  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x=\lambda$ ,  $x=\lambda+1$ , όπου  $\lambda>0$ , είναι

$$E(\lambda) = 2\lambda + 1 + 4 \ell n \left( 1 + \frac{1}{\lambda} \right)$$

**β.** Να προσδιορίσετε την τιμή του  $\lambda$  για την οποία το εμβαδόν  $E(\lambda)$  γίνεται ελάχιστο.

**ΖΗΤΗΜΑ 4ο**

**A.** Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = \int_0^x x \sin t dt \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

**α.** Να αποδείξετε ότι

$$g''(x) = 2\sin x - x\cos x \quad , \quad x \in \mathbb{R}.$$

**β.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g$  στο σημείο  $A\left(\frac{\pi}{2}, g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ .

**B.** Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x}{x-2} \quad , \quad x \in \mathbb{R} - \{2\}$$

όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

**α.** Αν η ευθεία  $\varepsilon : y = 2x - 1$  είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ , ποιες είναι οι τιμές των  $\alpha, \beta$ ;

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

β. Έστω  $\Omega = \left\{ \frac{\alpha}{2}, \alpha, \beta, 2\beta \right\}$  είναι ένας δειγματικός χώρος

με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, όπου οι  $\alpha, \beta$  έχουν τις τιμές που προκύπτουν στο προηγούμενο ερώτημα.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}(\lambda - 1)x^3 + 2x^2 + 2001, x \in \mathbb{R}, \lambda \in \Omega$$

και το ενδεχόμενο

$$E = \{ \lambda \in \Omega / \text{η συνάρτηση } g \text{ είναι κυρτή στο } \mathbb{R} \}$$

Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου  $E$ .