ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ 2012

Α Π Α Ν Τ Η Σ Ε Ι Σ

Θέμα Α

A_1,A_2,A_3 (βλέπε σχ.βιβλίο).

A_4. α. Λάθος

β. Σωστό

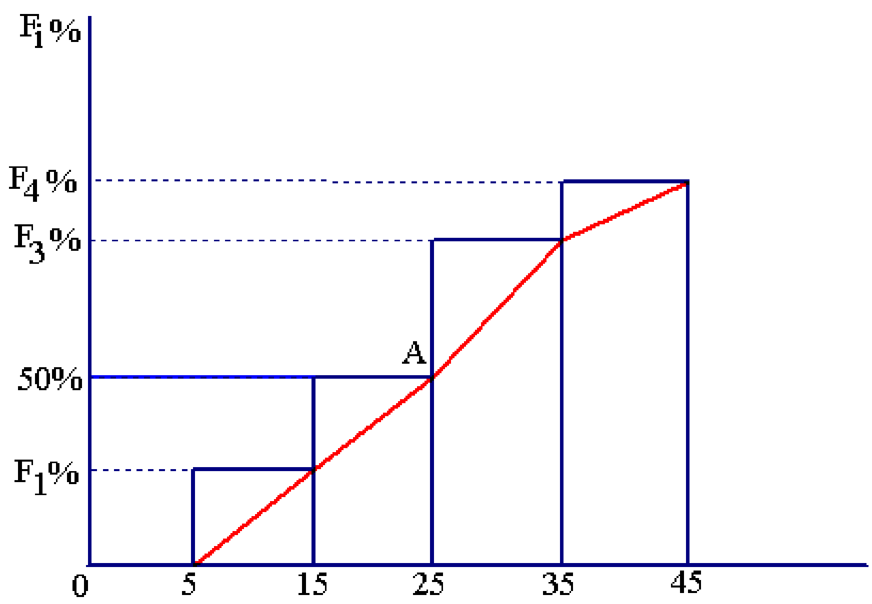
γ. Λάθος

δ. Σωστό

ε. Σωστό

Θέμα Β

B_1.



Η παράλληλη προς τον οριζόντιο άξονα τέμνει το πολύγωνο στο A.Άρα η διάμεσος είναι $\delta = 25min$.

B_2. Το μέγεθος του δείγματος είναι $\nu = \alpha + 4 + 3\alpha - 6 + 2\alpha - 8 + \alpha - 2 = 7\alpha + 4$.

Έχουμε $F_2 = 0{,}5 \Leftrightarrow f_1 + f_2 = 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{\nu_1+\nu_2}{\nu} = 0{,}5 \Leftrightarrow \nu_1 + \nu_2 = 0{,}5\nu \Leftrightarrow$

$\alpha + 4 + 3\alpha - 6 = 0{,}5(7\alpha + 4) \Leftrightarrow 4\alpha - 2 = 3{,}5\alpha + 2 \Leftrightarrow 0{,}5\alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = 8.$

Άρα $\nu = 60$. Είναι $f_i\% = 100\frac{\nu_\iota}{\nu} \Leftrightarrow f_i\% = \frac{5}{3}\nu_\iota$.Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα.

Χρόνοι (λεπτά)	χ_ι	ν_ι	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
[5,15)	10	12	20	12	20
[15,25)	20	18	30	30	50
[25,35)	30	24	40	54	90
[35,45)	40	6	10	60	100
Σύνολο		60	100		

B$_3$. $\bar{x} = \chi_1 f_1 + \chi_2 f_2 + \chi_3 f_3 + \chi_4 f_4 = 10.0{,}2 + 20.0{,}3 + 30.0{,}4 + 40.0{,}1 =$

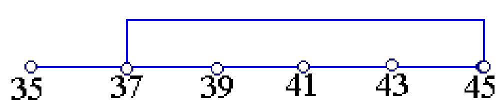
$2 + 6 + 12 + 4 = 24min.$

$s^2 = (\chi_1 - \bar{\chi})^2 f_1 + (\chi_2 - \bar{\chi})^2 f_2 + (\chi_3 - \bar{\chi})^2 f_3 + (\chi_4 - \bar{\chi})^2 f_4 = (10-24)^2.0{,}2 +$

$(20-24)^2.0{,}3 + (30-24)^2.0{,}4 + (40-24)^2.0{,}1 = 39{,}2 + 4{,}8 + 14{,}4 + 25{,}6 = 84.$

$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{84} \cong 9{,}17\text{min}.$

B$_4$.



Οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στην κάθε κλάση.Άρα το ζητούμενο ποσοσ-τό είναι $\frac{4}{5}f_4\% = 8\%$.

<u>Θέμα Γ</u>

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Γ: Ο μαθητής μαθαίνει Γαλλικά.

Ι: Ο μαθητής μαθαίνει Ισπανικά.

Έχουμε $P(\Gamma)=\frac{3\nu}{\nu^2+1}$, $P(\mathrm{I})=\frac{\nu+2}{\nu^2+1}$ και $P(\Gamma\cap\mathrm{I})=\frac{\nu+1}{\nu^2+1}$.

$$\lim_{\chi\to-1}\frac{2(\sqrt{\chi^2+3}-2)}{\chi^2+\chi}=\lim_{\chi\to-1}\frac{2(\sqrt{\chi^2+3}-2)(\sqrt{\chi^2+3}+2)}{\chi(\chi+1)(\sqrt{\chi^2+3}+2)}=\lim_{\chi\to-1}\frac{2(\chi^2-1)}{\chi(\chi+1)(\sqrt{\chi^2+3}+2)}=$$

$$\lim_{\chi\to-1}\frac{2(\chi-1)(\chi+1)}{\chi(\chi+1)(\sqrt{\chi^2+3}+2)}=\lim_{\chi\to-1}\frac{2(\chi-1)}{\chi(\sqrt{\chi^2+3}+2)}=1.$$

Γ$_1$. Έχουμε $P(\Gamma\cup\mathrm{I})=1$ που σημαίνει ότι το ενδεχόμενο $\Gamma\cup\mathrm{I}$ είναι βέβαιο.

Γ$_2$. Από τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων έχουμε: $P(\Gamma\cup\mathrm{I})=P(\Gamma)+P(I)-P(\Gamma\cap I)\Leftrightarrow$

$\frac{3\nu}{\nu^2+1}+\frac{\nu+2}{\nu^2+1}-\frac{\nu+1}{\nu^2+1}=1\Leftrightarrow\nu^2=3\nu\Leftrightarrow\nu=3.$

Γ$_3$. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P[(\Gamma-\mathrm{I})\cup(\mathrm{I}-\Gamma)]$.Τα ενδεχόμενα $\Gamma-I$ και $I-\Gamma$ είναι α-συμβίβαστα,οπότε από τον απλό προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων έχουμε:

$P[(\Gamma-\mathrm{I})\cup(\mathrm{I}-\Gamma)]=P(\Gamma-I)+P(I-\Gamma)=P(\Gamma)-P(\Gamma\cap\mathrm{I})+P(I)-P(\mathrm{I}\cap\Gamma)=$

$P(\Gamma)+P(I)-2P(\Gamma\cap\mathrm{I})$ (1).

Με βάση το Γ$_2$ ερώτημα είναι $P(\Gamma)=\frac{9}{10}$, $P(I)=\frac{5}{10}$ και $P(\Gamma\cap\mathrm{I})=\frac{4}{10}$.

$(1)\Leftrightarrow P[(\Gamma-\mathrm{I})\cup(\mathrm{I}-\Gamma)]=\dfrac{9}{10}+\dfrac{5}{10}-\dfrac{8}{10}=\dfrac{6}{10}\Leftrightarrow P[(\Gamma-\mathrm{I})\cup(\mathrm{I}-\Gamma)]=0{,}6.$

Γ$_4$. Έχουμε $N(\Gamma\cap I)=32$.Ζητάμε το $N(\Omega)$.

$P(\Gamma\cap I)=\frac{4}{10}\Leftrightarrow\frac{N(\Gamma\cap I)}{N(\Omega)}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow N(\Omega)=\frac{5}{2}N(\Gamma\cap I)=80$ μαθητές.

<u>Θέμα Δ</u>

Δ$_1$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$f'(\chi)=\frac{(1+ln^2\chi)'.\chi-(\chi)'(1+ln^2\chi)}{\chi^2}=\frac{2ln\chi-1-ln^2\chi}{\chi^2}=-\frac{(ln\chi-1)^2}{\chi^2}.$$

Είναι $f'(\chi)<0$ για κάθε $\chi\in(0,e)\cup(e,+\infty)$ και $f'(e)=0$.Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Δ$_2$. Για κάθε $\chi\in(0,+\infty)$ είναι $f(\chi)>0$.

Το εμβαδόν του ορθογωνίου ορίζεται από τη συνάρτηση $E(\chi)=\chi f(\chi)=1+ln^2\chi,\chi>0$.

$E'(\chi) = 2\frac{ln\chi}{\chi}$. $E'(\chi) = 0 \Leftrightarrow ln\chi = 0 \Leftrightarrow \chi = 1$. $E'(\chi) > 0 \Leftrightarrow ln\chi > 0 \Leftrightarrow \chi > 1$ και

$E'(\chi) < 0 \Leftrightarrow ln\chi < 0 \Leftrightarrow 0 < \chi < 1$.

χ	$-\infty$ 0	1 $+\infty$
$E'(\chi)$		$-$ 0 $+$
$E(\chi)$		$\searrow$ $E(1)$ $\nearrow$ ολ.ελάχ.

Άρα το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστο για $\chi = 1$ και οι διαστάσεις του είναι $1, f(1) = 1$, δηλαδή όταν είναι τετράγωνο.

Δ₃. Πρέπει $\lambda = f'(1) = -1$,οπότε $\varepsilon: \psi = -\chi + \beta$.

$\psi_i = -\chi_i + \beta, i = 1,2,\dots,10$.

$\bar{\psi} = -\bar{\chi} + \beta = -10 + \beta$.

$s_\psi = s_\chi = 2$.

Το δείγμα των τεταγμένων ψ_i είναι ομοιογενές όταν $CV_\psi \le \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{s_\psi}{|\bar{\psi}|} \le \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{2}{|-10+\beta|} \le \frac{1}{10} \Leftrightarrow$

$|\beta - 10| \ge 20 \Leftrightarrow \beta - 10 \le -20 \Leftrightarrow \beta \le -10$ ή $\beta - 10 \ge 20 \Leftrightarrow \beta \ge 30$.

Άρα το δείγμα των τεταγμένων ψ_i είναι ομοιογενές όταν $\beta \in (-\infty, -10] \cup [30, +\infty)$.

Δ₄. Οι πιθανότητες $P(A)$, $P(A \cap B)$ και $P(A \cup B)$ είναι μέσα στο πεδίο ορισμού της f η οποία είναι γνησίως φθίνουσα.

$A \subseteq A \cup B \Rightarrow P(A) \le P(A \cup B) \Rightarrow f(P(A)) \ge f(P(A \cup B))$ (1).

$A \cap B \subseteq A \cup B \Rightarrow P(A \cap B) \le P(A \cup B) \Rightarrow f(P(A \cap B)) \ge f(P(A \cup B))$ (2).

Με πρόσθεση των (1),(2) κατά μέλη παίρνουμε: $f\big(P(A)\big) + f(P(A \cap B)) \ge 2f(P(A \cup B))$.