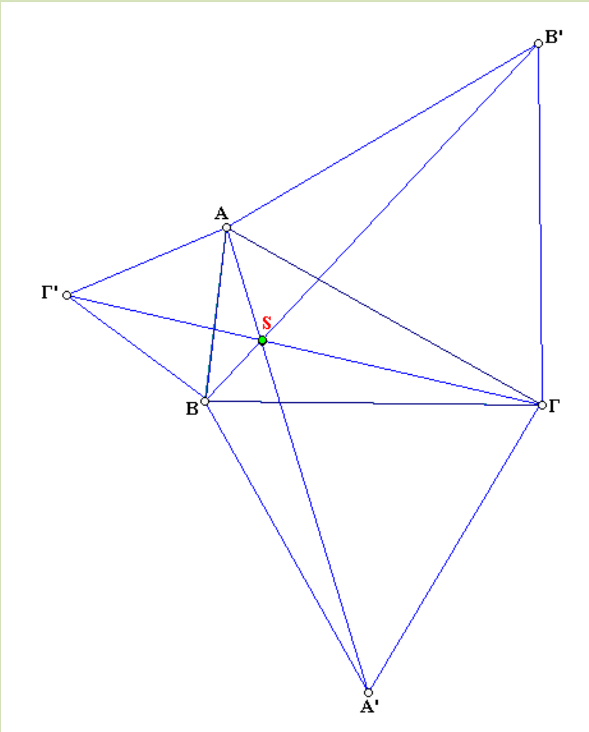
Α Ξ Ι Ο Σ Η Μ Ε Ι Ω Τ Α Σ Η Μ Ε Ι Α Τ Η Σ Γ Ε Ω Μ Ε Τ Ρ Ι Α Σ ΤΟΥ Τ Ρ Ι Γ Ω Ν Ο Υ

Στο παρακάτω άρθρο θα αναφερθούμε σε μερικά αξιοσημείωτα σημεία της Γεωμετρίας του τριγώνου που δεν διδάσκονται στο Λύκειο και έχουν σημαντικές εφαρμογές.

1. Σημείο Steiner

Θεωρούμε τρίγωνο $ΑΒΓ$.Εξωτερικά του τριγώνου $ΑΒΓ$ κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $ΒΓΑ'$, $ΓΑΒ'$ και $ΑΒΓ'$.Τα ευθύγραμμα τμήματα $ΑΑ'$, $ΒΒ'$, $ΓΓ'$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.Το σημείο αυτό ονομάζεται σημείο Steiner.

Απόδειξη



Έστω S το σημείο τομής των τμημάτων $ΒΒ', ΓΓ'$.

Τα τρίγωνα $ΑΓΓ', ΑΒΒ'$ είναι ίσα γιατί έχουν $ΑΓ = ΑΒ', ΑΓ' = ΑΒ$ και $\widehat{ΓΑΓ'} = \widehat{ΒΑΒ'} = 60^0 + \hat{Α}$ (κριτήριο Π-Γ-Π).Άρα $\widehat{ΑΓ'Γ} = \widehat{ΑΒΒ'}$,οπότε το τετράπλευρο $ΑSΒΓ'$ είναι εγγράψιμο και επομένως $\widehat{ΑSΒ} = 180^0 - \widehat{ΑΓ'Β} = 120^0$.

Επίσης $\widehat{ΑΒ'Β} = \widehat{ΑΓΓ'}$,οπότε το τετρέπλευρο $ΑSΓΒ'$ είναι εγγράψιμο.Άρα $\widehat{ΑSΓ} = 180^0 - \widehat{ΑΒ'Γ} = 120^0$.

Αναγκαστικά έχουμε $\widehat{ΒSΓ} = 120^0$.Αφού $\widehat{ΒSΓ} + \widehat{ΒΑ'Γ} = 120^0 + 60^0 = 180^0$,το τετράπλευρο $SΒΑ'Γ$ είναι εγγράψιμο οπότε $\widehat{ΒSΑ'} = \widehat{ΒΓΑ'} = 60^0$.

Έχουμε $\widehat{ΑSΒ} + \widehat{ΒSΑ'} = 120^0 + 60^0 = 180^0$.Άρα τα σημεία $Α, S, Α'$ είναι συνευθειακά,οπότε και το τμήμα $ΑΑ'$ διέρχεται από το σημείο S.

Το σημείο S είναι το σημείο Steiner.

<u>Παρατηρήσεις</u>

1. $ΑΑ' = ΒΒ' = ΓΓ'$.

2. Οι περιγγεγραμμένοι κύκλοι των ισοπλεύρων τριγώνων διέρχονται από το σημείο Steiner.

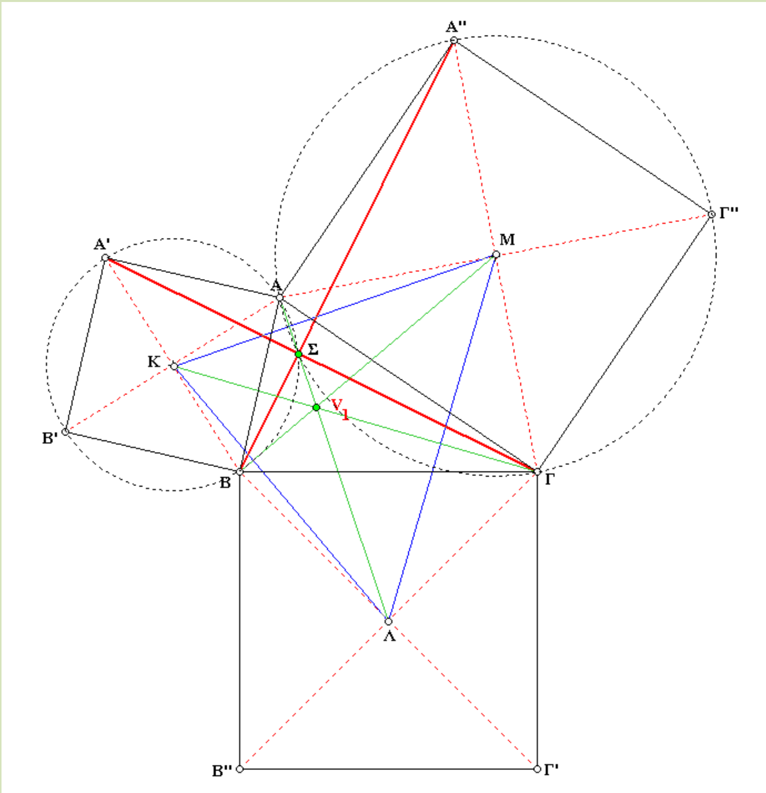
3. Το σημείο Steiner είναι το μοναδικό εσωτερικό σημείο του τριγώνου από το οποίο οι πλευρές του τριγώνου φαίνονται υπό γωνία 120^0.

<u>Σχόλιο</u>: Jakob Steiner (1796-1863),Ελβετός μαθηματικός – γεωμέτρης.Προερχόταν από πολυμελή αγροτική οικογένεια και παρά τη θέληση των γονιών του ξεκίνησε την εκπαίδευση του στα δεκαοχτώ του χρόνια.Ο Steiner ήταν ένας από τους μεγαλύτερους συντελεστές στο τομέα της προβολικής γεωμετρίας.

2. Σημεία Vecten

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$.Εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε τα τετράγωνα $ABB'A'$, $B\Gamma\Gamma'B''$, $\Gamma AA''\Gamma''$.Αν K, Λ, M τα κέντρα των τετραγώνων αντίστοιχα,τότε τα τμήματα $A\Lambda, BM, \Gamma K$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.Το σημείο αυτό ονομάζεται πρώτο σημείο Vecten.

Απόδειξη



Θα δείξουμε αρχικά ότι $BA''\perp \Gamma A'$. Έστω Σ το σημείο τομής των BA'' και $\Gamma A'$.

Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι τα τρίγωνα ABA'' ,$AA'\Gamma$ είναι ίσα,οπότε $\widehat{AA''B} = \widehat{A\Gamma A'}$.

$\widehat{\Sigma A''\Gamma} + \widehat{\Sigma\Gamma A''} = 45^0 - \widehat{AA''B} + \widehat{A\Gamma A'} + 45^0 = 90^0 \Rightarrow \widehat{A''\Sigma\Gamma} = 90^0 \Rightarrow BA''\perp \Gamma A'$.

Το Σ θα είναι το δεύτερο κοινό σημείο των περιγγεγραμένων κύκλων των τετραγώνων $AA'B'B, AA''\Gamma''\Gamma$.Το τμήμα $A\Sigma$ είναι κοινή χορδή των κύκλων αυτών και το KM η διάκεντρος των κύκλων.Άρα $A\Sigma\perp KM$.

$\widehat{A\Sigma A''} = \widehat{A\Gamma A''} = 45^0$ (εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα στον περιγεγραμμένο κύκλο του τετραγώνου $A\Gamma\Gamma''A''$).

$\widehat{B\Sigma\Gamma} + \widehat{B\Lambda\Gamma} = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow \Sigma B\Lambda\Gamma$ εγγράψιμο $\Rightarrow \widehat{\Gamma\Sigma\Lambda} = \widehat{\Gamma B\Lambda} = 45^0$.

$\widehat{A\Sigma A''} + \widehat{A''\Sigma\Gamma} + \widehat{\Gamma\Sigma\Lambda} = 45^0 + 90^0 + 45^0 = 180^0$.Άρα τα σημεία A, Σ, Λ είναι συνευθειακά,οπότε $\Lambda A\perp KM$.

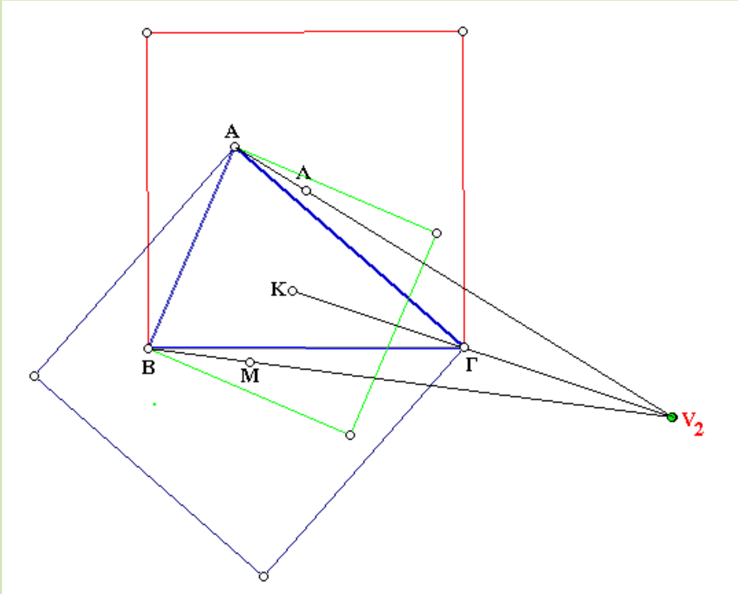
Όμοια θα έχουμε $MB\perp K\Lambda$ και $K\Gamma\perp \Lambda M$.

Άρα τα τμήματα $A\Lambda, BM, \Gamma K$ είναι ύψη του τριγώνου $K\Lambda M$,οπότε διέρχονται από το ορθόκεντρο V_1 του τριγώνου $K\Lambda M$.

Το V_1 είναι το πρώτο σημείο Vecten.

<u>Σημείωση</u>: Το τρίγωνο $K\Lambda M$ ονομάζεται τρίγωνο Vecten και ο περιγγεγραμένος κύκλος του ονομάζεται κύκλος Vecten.

Αν θεωρήσουμε τα τετράγωνα να βρίσκονται στα ημιεπίπεδα που ορίζονται από την πλευρά και την απέναντι κορυφή του τριγώνου τότε τα τμήματα που ορίζονται από τις κορυφές του τριγώνου και τα κέντρα των τετραγώνων της απέναντι πλευράς διέρχονται από το ίδιο σημείο που ονομάζεται 2^o σημείο Vecten.

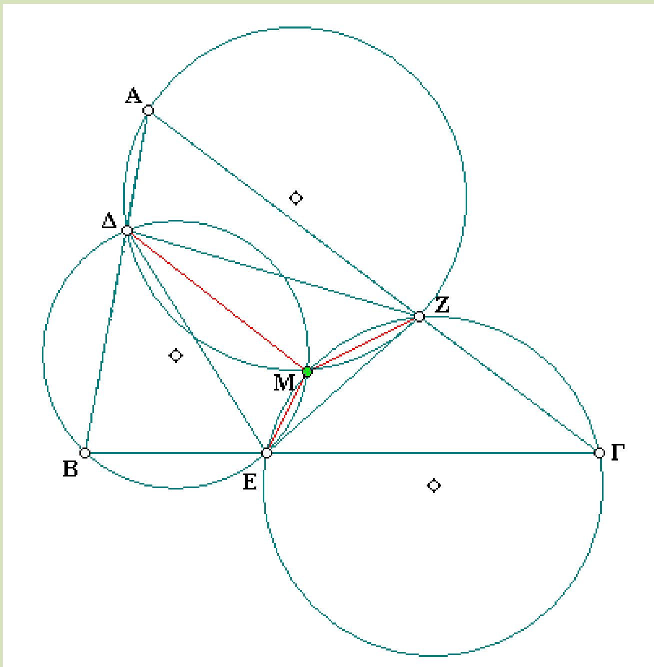


<u>Σχόλιο</u>: Outer Vecten καθηγητής στο Licee de Nimes στη Γαλλία.Το θεώρημα Vecten το πρωτοπαρουσίασε στο περίφημο περιοδικό Annales de Gergone.

3. Σημείο Miquel

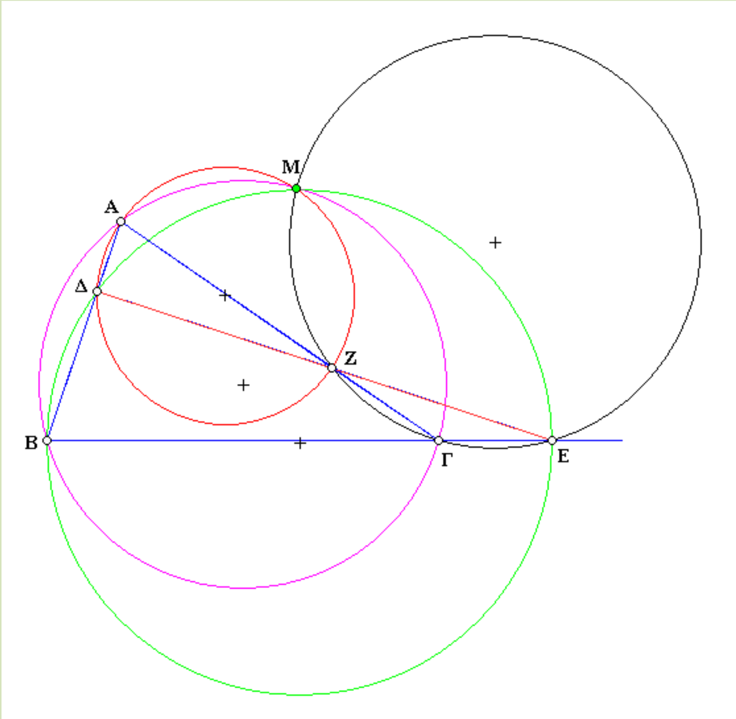
Έστω ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$ και $Δ, Ε, Ζ$ σημεία των πλευρών του $ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ$ αντίστοιχα.Οι περιγγεγραμένοι κύκλοι των τριγώνων $ΑΔΖ, ΒΔΕ, ΓΕΖ$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.Το σημείο αυτό ονομάζεται σημείο Miquel για τα σημεία $Κ, Λ, Μ$.

Απόδειξη



Έστω $Μ$ το δεύτερο κοινό σημείο των περιγγεγραμένων κύκλων των τριγώνων $ΑΔΖ, ΒΔΕ$.
Τα τετράπλευρα $ΑΔΜΖ, ΒΔΜΕ$ είναι εγγεγραμμένα,οπότε $\widehat{ΜΕΒ} = \widehat{ΑΔΜ} = \widehat{ΜΖΓ} \Rightarrow \widehat{ΜΕΒ} = \widehat{ΜΖΓ} \Rightarrow$ $ΜΕΓΖ$ εγγράψιμο.Άρα και ο περιγγεγραμένος κύκλος του τριγώνου $ΓΕΖ$ διέρχεται από το $Μ$.

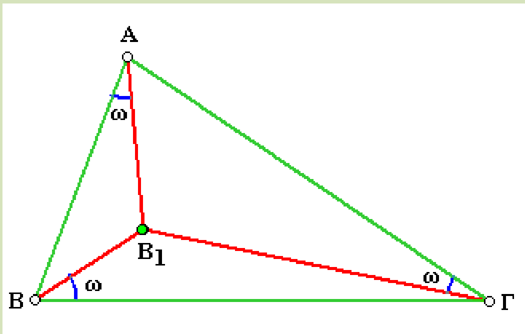
<u>Σημείωση</u>: Αν τα σημεία $Δ, Ε, Ζ$ είναι συνευθειακά τότε το σημείο Miquel βρίσκεται στον περιγγεγραμένο κύκλο του τριγώνου $ΑΒΓ$.



<u>Σχόλιο</u>: Auguste Miguel,Γάλλος μαθηματικός που δραστηριοποιήθηκε στα μέσα του 19[ου] αιώνα.

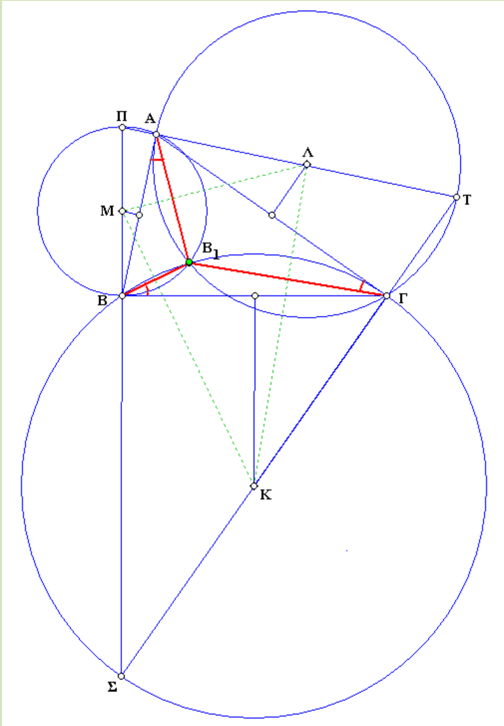
4. Σημεία Brocard

Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ$.Υπάρχει ακριβώς ένα σημείο $Β_1$ εσωτερικό του τριγώνου έτσι ώστε να ισχύει $\widehat{Β_1ΑΒ}=\widehat{Β_1ΓΑ}=\widehat{Β_1ΒΓ}$.
Το σημείο $Β_1$ ονομάζεται πρώτο σημείο Brocard.
Απόδειξη



<u>Ανάλυση</u>: Υποθέτουμε ότι υπάρχει εσωτερικό σημείο $Β_1$ του τριγώνου $ΑΒΓ$ έτσι ώστε να ισχύει $\widehat{Β_1ΒΓ}=\widehat{Β_1ΓΑ}=\widehat{Β_1ΑΒ}=\widehat{\omega}$.Τότε είναι $\widehat{ΒΒ_1Γ}=180^0-\widehat{\omega}-\widehat{Β_1ΓΒ}=180^0-\widehat{\omega}-\left(\widehat{Γ}-\widehat{\omega}\right)\Leftrightarrow\widehat{ΒΒ_1Γ}=180^0-\widehat{Γ}$.Όμοια έχουμε $\widehat{ΑΒ_1Γ}=180^0-\widehat{Α}$ και $\widehat{ΑΒ_1Β}=180^0-\widehat{Β}$.
Άρα το σημείο $Β_1$ είναι η τομή τόξων κύκλων με χορδή $ΒΓ$,$ΑΓ.ΑΒ$ που δέχονται γωνία $180^0-\widehat{Γ}$, $180^0-\widehat{Β}$, $180^0-\widehat{Α}$ αντίστοιχα.
Αφού $\widehat{Β_1ΓΑ}=\widehat{Β_1ΒΓ}=\widehat{\omega}$, η $ΑΓ$ πρέπει να είναι εφαπτομένη στο $Γ$ του κύκλου.Όμοια οι πλευρές $ΑΓ$, $ΑΒ$ είναι εφαπτομένες των αντίστοιχων κύκλων στα $Α$ και $Β$.

Κατασκευή:



Φέρνουμε καθέτους στις πλευρές του τριγώνου στις κορυφές του οι οποίες τέμνονται στα σημεία Σ, T, Π. Οι μεσοκάθετες των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνουν τις προηγούμενες κάθετες στα K, Λ, M τα οποία είναι μέσα των $\Sigma\Gamma, AT, B\Pi$ αντίστοιχα.

Κατασκευάζουμε τους κύκλους $(K, K\Gamma), (\Lambda, \Lambda A)$.Πρωφανώς ο πρώτος κύκλος διέρχεται από τα σημεία B, Γ, Σ ,εφάπτεται της $A\Gamma$ και ο δεύτερος διέρχεται από τα σημεία A, Γ, T και εφάπτεται της AB.Έστω B_1 το δεύτερο σημείο των κύκλων.Το B_1 είναι το ζητούμενο σημείο.

Απόδειξη: Τα τετράπλευρα $B\Sigma\Gamma B_1, AT\Gamma B_1$ είναι εγγεγραμένα,οπότε $\widehat{\Pi BB_1} = \widehat{\Sigma\Gamma B_1}$ και $\widehat{\Pi AB_1} = \widehat{B_1\Gamma T}$.

$\widehat{\Pi BB_1} + \widehat{\Pi AB_1} = \widehat{\Sigma\Gamma B_1} + \widehat{B_1\Gamma T} = 180^0$.Άρα το τετράπλευρο $AB_1B\Pi$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο,οπότε ο περιγγεγραμένος κύκλος του τριγώνου AB_1B διέρχεται από το Π και αφού $\widehat{\Pi AB} = 90^0$ η $B\Pi$ είναι διάμετρος του κύκλου του οποίου το κέντρο M προφανώς είναι το σημείο τομής της $B\Pi$ με τη μεσοκάθετο της πλευράς AB.Ο κύκλος (M, MB) εφάπτεται της πλευράς $B\Gamma$ στο B.

Έχουμε $\widehat{B_1AB} = \widehat{B_1\Gamma A}$ (γωνία χορδής και εφαπτομένης).Όμοια $\widehat{B_1\Gamma A} = \widehat{B_1B\Gamma}$.

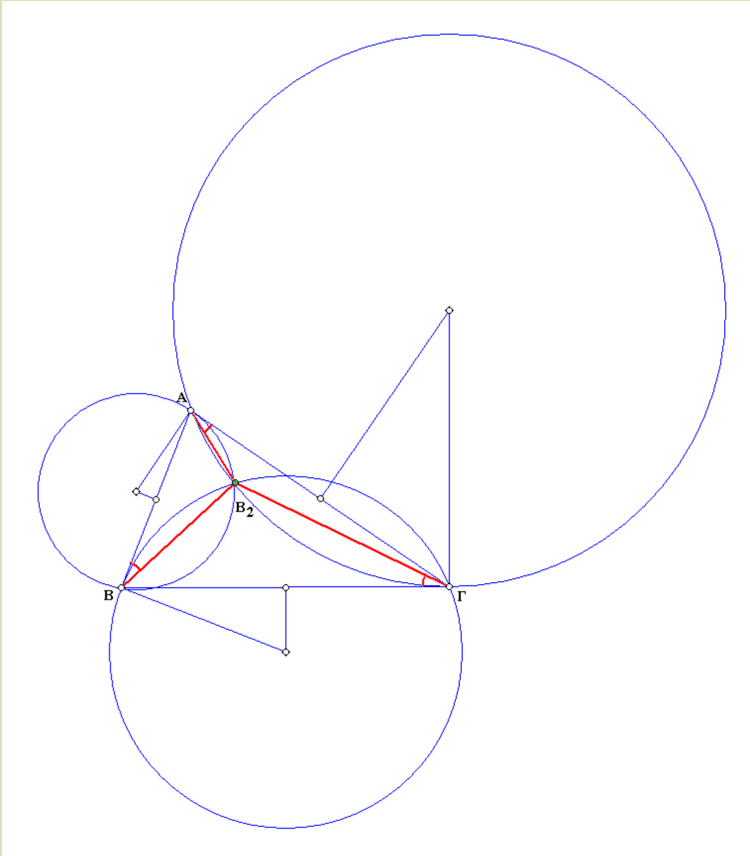
Άρα για το B_1 έχουμε $\widehat{B_1AB} = \widehat{B_1\Gamma A} = \widehat{B_1B\Gamma}$.

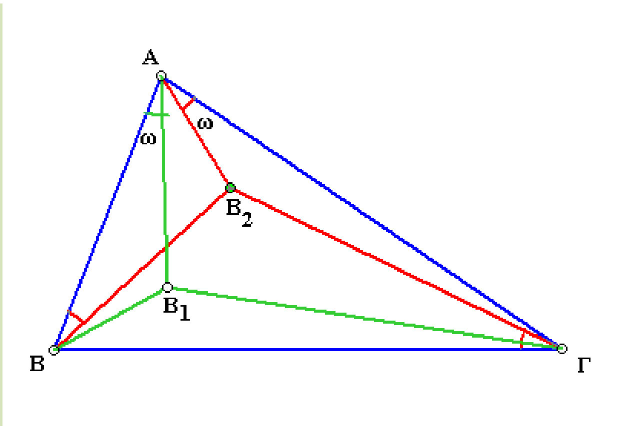
Διερεύνηση: Το τόξο χορδής $B\Gamma$ που βρίσκεται στο ημιεπίπεδο $(B\Gamma, A)$ και το τόξο χορδής $A\Gamma$ που περιέχεται στο ημιεπίπεδο $(A\Gamma, B)$ ένα μέρος τους εξ'ολοκλήρου βρίσκεται μέσα στο τρίγωνο και επειδή τα άκρα των τόξων είναι εκατέρωθεν του άλλου τόξου θα έχουν πάντα ακριβώς ένα κοινό σημείο.Άρα το πρόβλημα έχει πάντα λύση.

Σημείωση: Στο τρίγωνο ΑΒΓ υπάρχει ακριβώς ένα εσωτερικό σημείο B_2 για το οποίο ισχύει $\widehat{B_2A\Gamma} = \widehat{B_2\Gamma B} = \widehat{B_2BA} = \widehat{\omega}$.Το B_2 ονομάζεται δεύτερο σημείο Brocard και προσδιορίζεται όπως το B_1.

Η γωνία $\widehat{\omega}$ που είναι ίδια και στις δύο περιπτώσεις ονομάζεται γωνία Brocard.

Το τρίγωνο $K\Lambda M$ είναι όμοιο με το τρίγωνο $AB\Gamma$ και έχει ίδιο το πρώτο σημείο Brocard με το πρώτο σημείο Brocard του $AB\Gamma$.Το κέντρο του περιγγεγραμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι το δεύτερο σημείο Brocard του τριγώνου $K\Lambda M$.



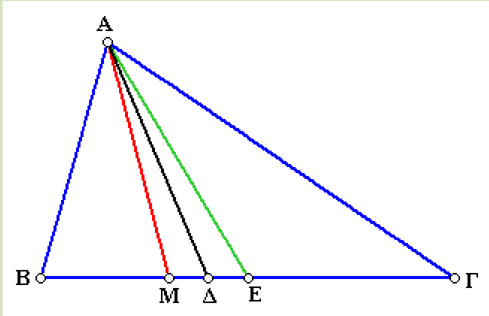


<u>Σχόλιο</u>: Henri Brocard (1865 – 1867),Γάλλος στρατιωτικός – μαθηματικός και όχι μόνο με μεγάλη συνισφορά στη γεωμετρία του τριγώνου.Ο Brocard έφτασε στην ανακάλυψη των σημείων που φέρουν το όνομά του από τη μελέτη του προβλήματος των τριών σκυλιών που κυνηγούν το ένα το άλλο.

5. Σημείο Lemoine

Βασικές γνώσεις

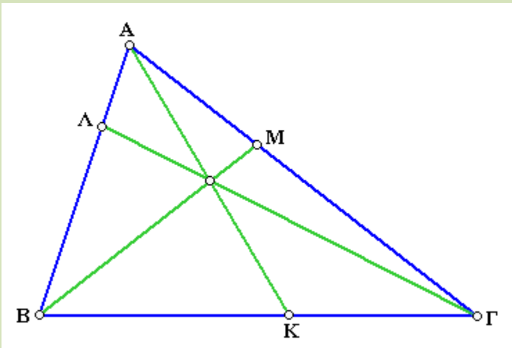
1.Ορισμός: Έστω ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ και $A\Delta, AE$ διχοτόμος και διάμεσος αντίστοιχα του τριγώνου.
Αν M είναι το συμμετρικό σημείο του E ως προς το Δ,τότε το τμήμα AM ονομάζεται συμμετροδιάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ από τη κορυφή A.

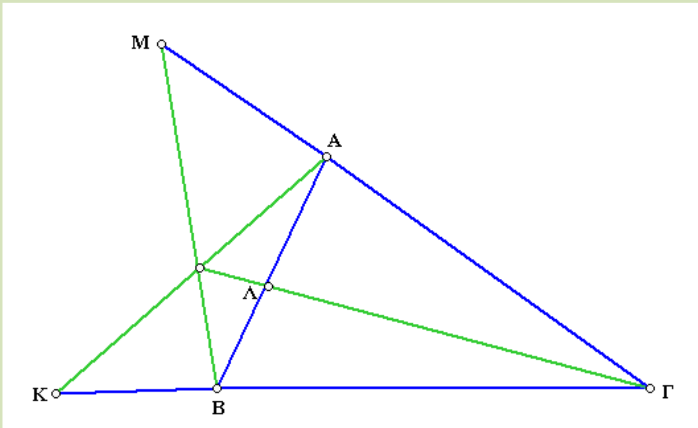


- Προφανώς το τρίγωνο έχει τρεις συμμετροδιαμέσους.
- $\widehat{BAM} = \widehat{EA\Gamma}$.

2. Θεώρημα Ceva

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε τα σημεία K, Λ, M στους φορείς των πλερών του τριγώνου με ένα ή και τα τρία να είναι εσωτερικά σημεία των πλευρών του τριγώνου.



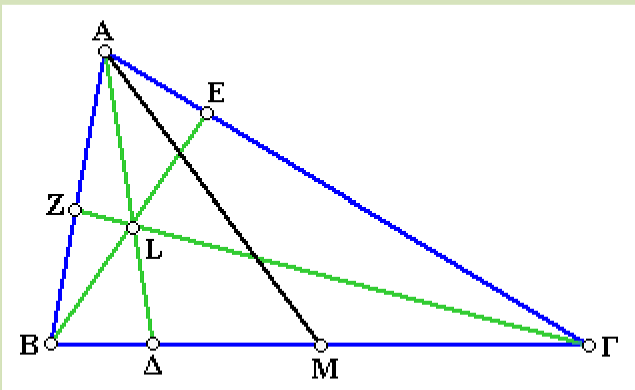


Ισχύει: Οι ευθείες $AK, BM, \Gamma\Lambda$ διέρχονται από το ίδιο σημείο $\Leftrightarrow \frac{KB}{K\Gamma} \cdot \frac{M\Gamma}{MA} \cdot \frac{\Lambda A}{\Lambda B} = 1$.

Τώρα μπορούμε να δούμε το παρακάτω θεώρημα.

Οι συμμετροδιάμεσοι τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.Το σημείο αυτό ονομάζετα σημείο Lemoine.

Απόδειξη



Έστω $A\Delta, BE, \Gamma Z$ οι συμμετροδιάμεσοι του τριγώνου $AB\Gamma$ και AM η διάμεσός του.

Έχουμε $\widehat{BA\Delta} = \widehat{MA\Gamma} \Rightarrow \frac{(AB\Delta)}{(AM\Gamma)} = \frac{AB.A\Delta}{AM.A\Gamma} \Leftrightarrow \frac{B\Delta}{M\Gamma} = \frac{AB.A\Delta}{AM.A\Gamma}$ (1).

$\widehat{BAM} = \widehat{\Delta A\Gamma} \Rightarrow \frac{(BAM)}{(\Delta A\Gamma)} = \frac{AB.AM}{A\Delta.A\Gamma} \Leftrightarrow \frac{BM}{\Delta\Gamma} = \frac{AB.AM}{A\Delta.A\Gamma}$ (2).

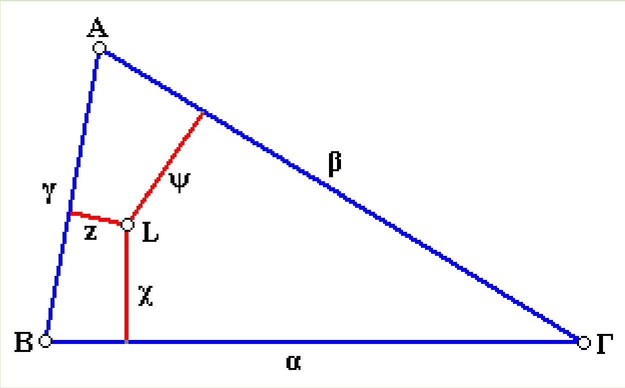
Πολλαπλασιάζουμε τις (1),(2) κατά μέλη και παίρνουμε $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{AB^2}{A\Gamma^2}$.

Όμοια έχουμε $\frac{\Gamma E}{EA} = \frac{B\Gamma^2}{AB^2}$ και $\frac{AZ}{Z\Gamma} = \frac{A\Gamma^2}{B\Gamma^2}$.

Άρα $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} \cdot \frac{\Gamma E}{EA} \cdot \frac{AZ}{Z\Gamma} = \frac{AB^2}{A\Gamma^2} \cdot \frac{B\Gamma^2}{AB^2} \cdot \frac{A\Gamma^2}{B\Gamma^2} = 1$.Σύμφωνα με το θεώρημα Ceva οι συμετριδιάμεσοι διέρχονται από το ίδιο σημείο.

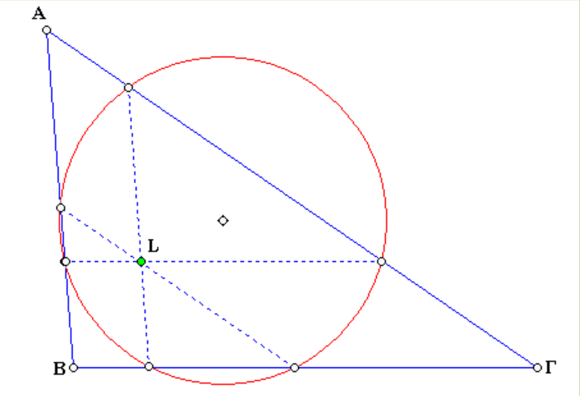
Μερικές από τις σημαντικότερες ιδιότητες του σημείου Lemoine.
‘Εστω L το σημείο Lemoine ενός τριγώνου $AB\Gamma$.

1. Οι αποστάσεις του σημείου L από τις πλευρές του τριγώνου είναι ανάλογες των πλευρών

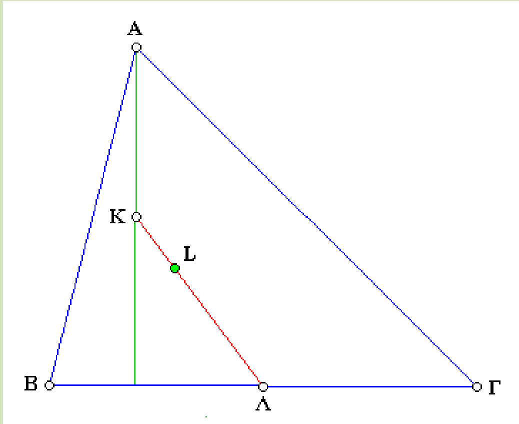


δηλαδή $\frac{\chi}{z} = \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\chi}{\psi} = \frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\psi}{z} = \frac{\beta}{\gamma}$.
Επίσης το L είναι το εσωτερικό σημείο του τριγώνου που το άθροισμα $\chi^2 + \psi^2 + z^2$ είναι ελάχιστο.

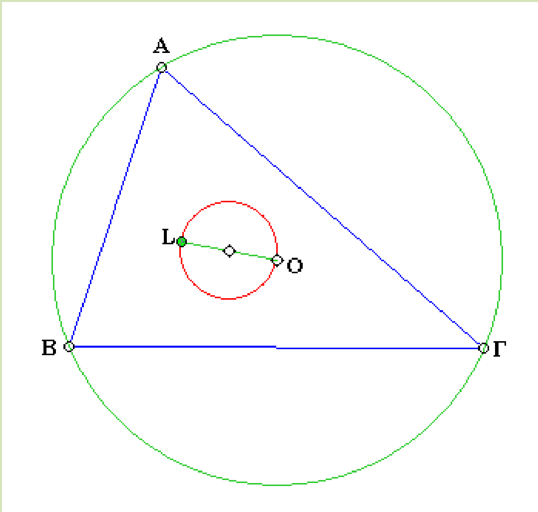
2. Οι παράλληλες από το L προς τις πλευρές του τριγώνου τέμνουν τις πλευρές του τριγώνου σε σημεία που βρίσκονται στον ίδιο κύκλο.Ο κύκλος αυτός ονομάζεται κύκλος Lemoine.



3. Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει το μέσο ενός ύψους του τριγώνου με το μέσο της πλευρά που αντιστοιχεί το ύψος διέρχεται από το L.



4. Το ευθύγραμμο τμήμα που οριζεται από το L και το κέντρο του περιγγεγραμμένου κύκλου είναι διάμετρος ενός κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Brocard.

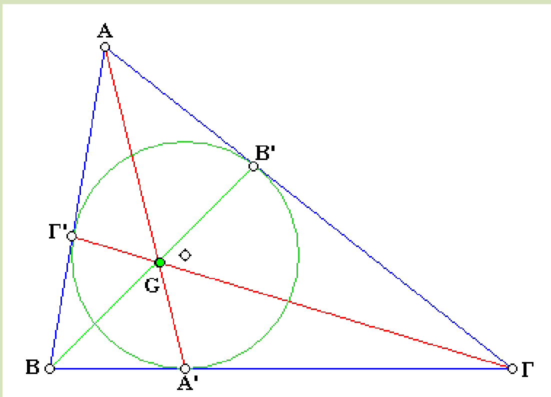


<u>**Σχόλιο**</u>: **Emil Lemoine (1840 – 1912),**Γάλλος μαθηματικός γεωμέτρης – πολιτικός μηχανικός με σημαντική συνισφορά στη γεωμετρία του τριγώνου.

6. Σημείο Gergonne

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$.Ο εγγεγραμένος κύκλος του τριγώνου εφάπτεται των πλευρών $B\Gamma, A\Gamma, AB$ στα σημεία A', B', Γ' αντίστοιχα.Τα τμήματα $AA', BB', \Gamma\Gamma'$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.Το σημείο αυτό ονομάζεται σημείο Gergonne.

Απόδειξη



Έχουμε $BA' = B\Gamma', \Gamma A' = \Gamma B'$ και $AB' = A\Gamma'$.

$\frac{A'B}{A'\Gamma} \cdot \frac{B'\Gamma}{B'A} \cdot \frac{\Gamma'A}{\Gamma'B} = \frac{\Gamma'B}{A'\Gamma} \cdot \frac{A'\Gamma}{B'A} \cdot \frac{B'A}{\Gamma'B} = 1$.Σύμφωνα με το θεώρημα Ceva τα τμήματα $AA', BB', \Gamma\Gamma'$ διέρχονται από το ίδιο σημείο G.

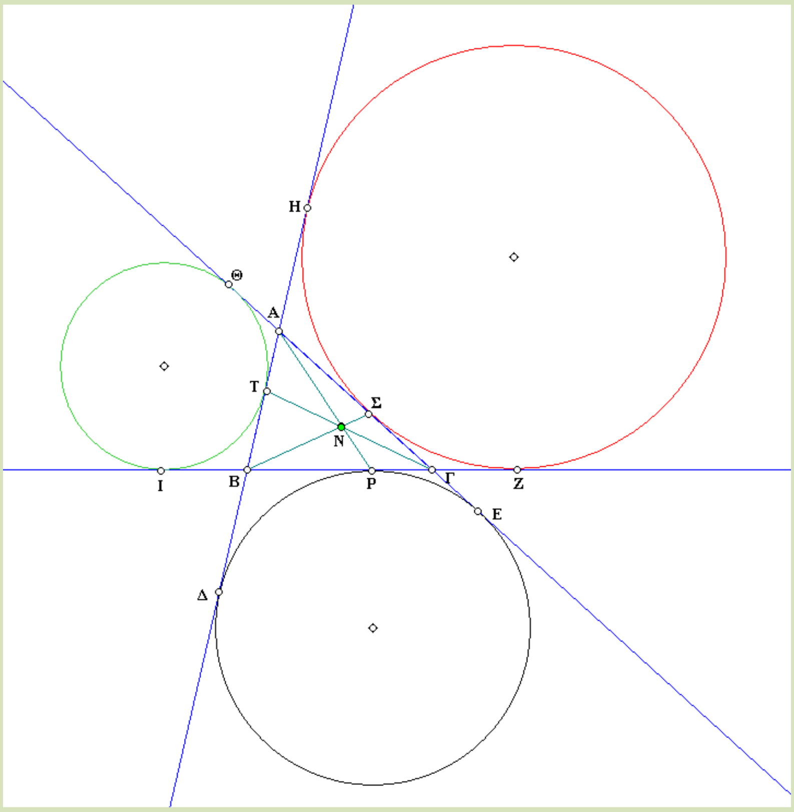
Το G είναι το σημείο Gergonne.

<u>Σημείωση</u>: Το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ ονομάζεται τρίγωνο Gergonne του τριγώνου $AB\Gamma$.
Το σημείο Gergonne είναι το σημείο Lemoinne του $A'B'\Gamma'$.

<u>Σχόλιο</u>: Joseph Gergonne (1771-1859),Γάλλος μαθηματικός.Το 1810 δημιούργισε το μαθηματικό περιοδικό Annales de Gergonne στο οποίο δημοσιεύτικαν εργασίες διάσημων μαθηματικών όπως των Poncelet,Chasles,Calois.

7. Σημείο Nagel

Έστω ένα τριγωνο $AB\Gamma$.Οι παραγγεγραμένοι κύκλοι του τριγώνου εφάπτονται των πλευρών $B\Gamma, A\Gamma, AB$ στα σημεία P, Σ, T.Τα τμήματα $AP, B\Sigma, \Gamma T$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.Το σημείο αυτό ονομάζεται σημείο Nagel.
Απόδειξη



Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι $A\Delta = AE = \tau, BZ = BH = \tau$ και $\Gamma\Theta = \Gamma I = \tau$.
Επίσης $B\Delta = BP = \tau - \gamma, P\Gamma = \Gamma E = \tau - \beta, \Gamma Z = \Sigma\Gamma = \tau - \alpha$ και $AH = \Sigma A = \tau - \gamma$,όπου τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου.
$\frac{PB}{P\Gamma} \cdot \frac{\Sigma\Gamma}{\Sigma A} \cdot \frac{TA}{TB} = \frac{\tau-\gamma}{\tau-\beta} \cdot \frac{\tau-\alpha}{\tau-\gamma} \cdot \frac{\tau-\beta}{\tau-\alpha} = 1$,οπότε τα τμήματα $AP, B\Sigma, \Gamma T$ διέρχονται από το ίδιο σημείο N.
Το N είναι το σημείο Nagel.

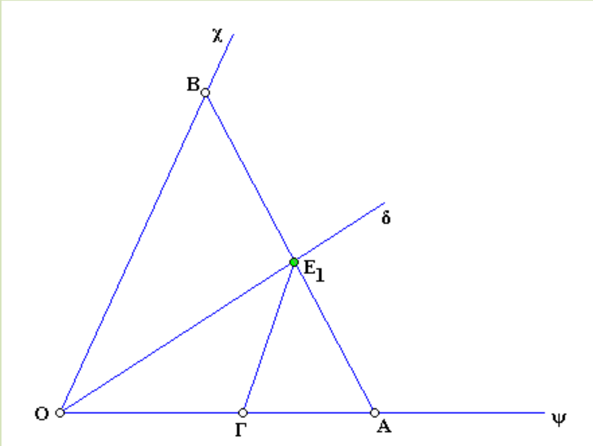
<u>Σχόλιο</u>: Christian Heinrich von Nagel (1803-1882),Γερμανός γεωμέτρης.

8. Σημεία Emmerich

**Α. Έστω σταθερή γωνία $\widehat{\chi O \psi}$ σε μέγεθος και θέση και λ σταθερός θετικός αριθμός.Υπάρχουν άπειρες ευθείες που τέμνουν τις πλευρές της γωνίας στα σημεία A, B έτσι ώστε να ισχύει $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{\lambda}$ (1).
Όλες αυτές οι ευθείες διέρχεται από σταθερό σημείο.Το σταθερό αυτό σημείο ονομάζεται πρώτο σημείο Emmerich.**

Απόδειξη

Πάνω στην πλευρά $O\psi$ της γωνίας παίρνουμε τμήμα $O\Gamma = \lambda$.Από το Γ φαίρνουμε παράλληλο προς την πλευρά $O\chi$ που τέμνει τη διχοτόμο δ της γωνίας $\widehat{\chi O \psi}$ στο E_1.



Από το E_1 φέρνουμε ευθεία που τέμνει την πλευρά $O\psi$ στο A , έτσι ώστε το A να είναι στη προέκταση του $O\Gamma$, και τη πλευρά $O\chi$ στο B.

Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το τρίγωνο $\Gamma O E_1$ είναι ισοσκελές με $\Gamma O = \Gamma E_1$.

$\Gamma E_1 // O\chi \Rightarrow \frac{\Gamma E_1}{OB} = \frac{\Gamma A}{OA} \Leftrightarrow \frac{O\Gamma}{OB} = \frac{OA - O\Gamma}{OA} \Leftrightarrow \frac{O\Gamma}{OB} = 1 - \frac{O\Gamma}{OA} \Leftrightarrow \lambda\left(\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{\lambda}$..

Άρα κάθε ευθεία που διέρχεται από το E_1 και τέμνει τις πλευρές της γωνίας όπως στο παραπάνω σχήμα ικανοποιεί την (1).

Το σημείο Γ είναι σταθερό.Το σημείο E_1 προκύπτει ως τομή σταθερών ευθειών,οπότε είναι σταθερό.

Το σημείο E_1 είναι το σημείο Emmerich

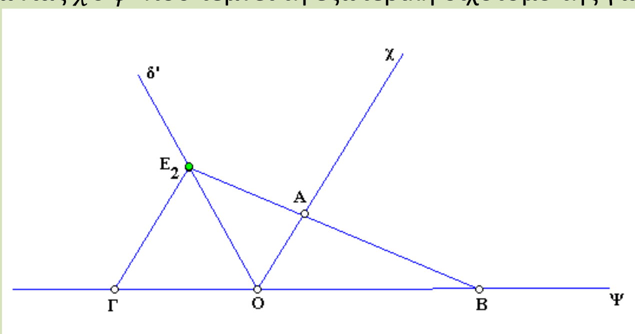
Β. Έστω σταθερή γωνία $\widehat{\chi O \psi}$ σε μέγεθος και θέση και λ σταθερός θετικός αριθμός.Υπάρχουν άπειρες ευθείες που τέμνουν τις πλευρές της γωνίας στα σημεία A, B έτσι ώστε να ισχύει $\frac{1}{OA} - \frac{1}{OB} = \frac{1}{\lambda}$ (1).

Όλες αυτές οι ευθείες διέρχεται από σταθερό σημείο.

Το σταθερό αυτό σημείο ονομάζεται δεύτερο σημείο Emmerich.

Υπόδειξη

Πάνω στην αντικείμενη ημειευθεία της $O\psi$ παίρνουμε τμήμα $O\Gamma = \lambda$.Από το Γ φέρουμε παράλληλο προς την πλευρά $O\chi$ της γωνίας $\widehat{\chi O \psi}$ που τέμνει τη εξωτερική διχοτόμο της γωνίας στο E_2.



Από το E_2 φέρουμε ευθεία που τέμνει την $O\chi$ στο A και την $O\psi$ στο B.Είναι $OB > OA$

Εργαζόμαστε όπως στο Α.

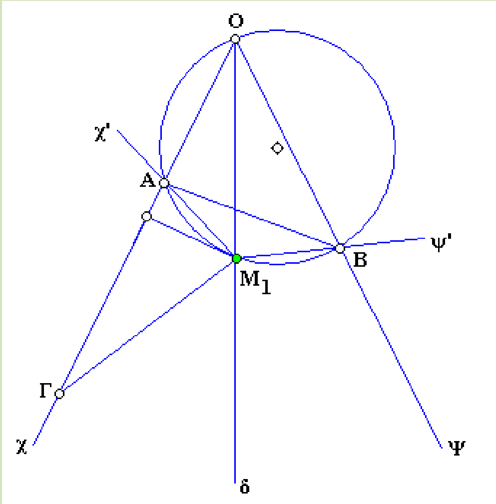
Το E_2 είναι το δεύτερο σημείο Emmerich.

9. Σημεία Maclaurin

Α. Έστω σταθερή γωνία $\widehat{\chi O \psi}$ σε μέγεθος και θέση και λ σταθερός θετικός αριθμός.Υπάρχουν άπειρες ευθείες που τέμνουν τις πλευρές της γωνίας στα σημεία A, B έτσι ώστε να ισχύει $OA + OB = \lambda$.

Ο περιγεγραμμένος κύκλος των τριγώνων OAB διέρχεται από ένα σταθερό σημείο που ονομάζεται πρώτο σημείο Maclaurin.

Απόδειξη



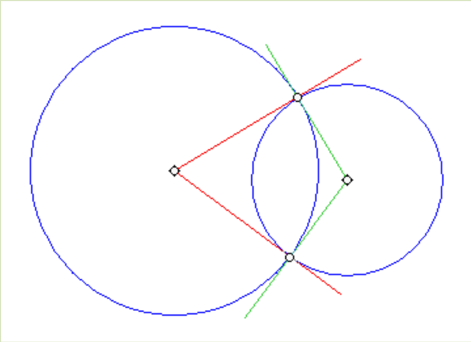
Στην πλευρά $O\chi$ παίρνουμε σημείο Γ έτσι ώστε $O\Gamma = \lambda$.Η μεσοκάθετος του $O\Gamma$ τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{\chi O\psi}$ στο σημείο M_1.Παίρνουμε σημείο A εσωτερικό του $O\Gamma$ και με πλευρά την M_1A κατασκευάζουμε γωνία $\chi'\widehat{M_1}\psi' = 180^0 - \widehat{\chi O\psi}$ που η δεύτερη πλευρά της τέμνει την $O\psi$ στο B.
Επειδή $\widehat{\chi O\psi} + \widehat{AM_1B} = 180^0$ το τετράπλευρο OAM_1B είναι εγγράψιμο οπότε ο περιγγεγραμένος κύκλος του τριγώνου OAB διέρχεται από το M_1.
Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι τα τρίγωνα $M_1A\Gamma$ και M_1OB είναι ίσα οπότε $OB = A\Gamma$.
Άρα $OA + OB = \lambda$.Οι ευθείες AB με τον τρόπο κατασκευής τους είναι άπειρες.
Το σημείο M_1 είναι τομή σταθερών ευθειών,οπότε είναι σταθερό.Έτσι δείχθηκε το ζητούμενο.
Το σημείο M_1 είναι το πρώτο σημείο Maclaurin.

Β. Έστω σταθερή γωνία $\widehat{\chi O\psi}$ σε μέγεθος και θέση και λ σταθερός θετικός αριθμός.Υπάρχουν άπειρες ευθείες που τέμνουν τις πλευρές της γωνίας στα σημεία A, B έτσι ώστε να ισχύει $OA - OB = \lambda$.
Ο περιγεγραμμένος κύκλος των τριγώνων OAB διέρχεται από ένα σταθερό σημείο που ονομάζεται δέυτερο σημείο Maclaurin.
Υπόδειξη
Σε μια πλευρά της $\widehat{\chi O\psi}$γωνίας πάρτε σημείο Γ έτσι ώστε $O\Gamma = \lambda$.Έστω M_2 το σημείο τομής της μεσοκαθέτου του $O\Gamma$ με τη διχοτόμο της παραπληρωματικής γωνίας της $\widehat{\chi O\psi}$.Ενεργήστε όπως στο A.
Το σημείο M_2 είναι το δεύτερο σημείο Maclaurin.

Σχόλιο: Colin Maclaurin (1698 – 1746),Σκωτσέζος μαθηματικός από τους μεγαλύτερους της εποχής του.
Μπήκε στο πανεπιστήμιο της Γκλασκώβης στην ηλικία των 11.Το 1917 εξελέγη στη νεαρή ηλικία των δεκαεννέα καθηγητής μαθηματικών στο Aberdeen.
Ασχολήθηκε με τη βαρυτική θεωρία του Νεύτωνα και τη γεωμετρία.

10. Σημεία Poncelet

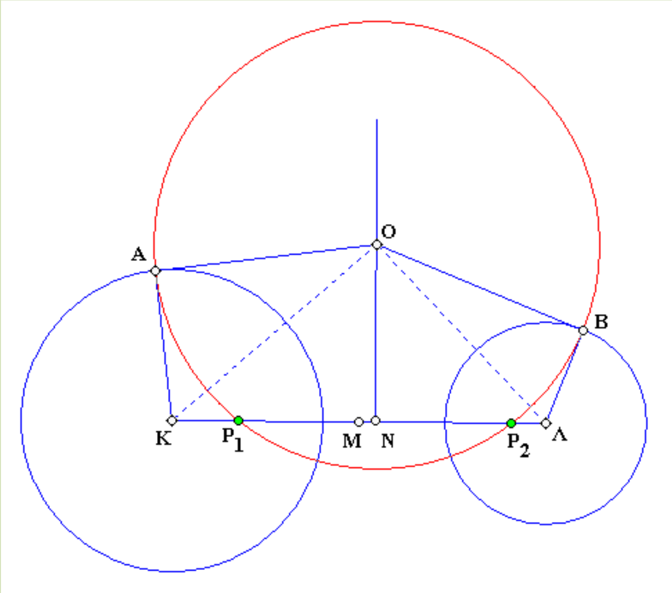
Ορισμός: **Δύο κύκλοι που τέμνονται λέμε ότι τέμνονται ορθογώνια όταν οι εφαπτομένες των κύκλων στα κοινά τους σημεία σχηματίζουν ορθή γωνία.**



▶ Έστω δύο κύκλοι (K, R_1),(Λ, R_2) που ο ένας είναι στο εξωτερικό του άλλου.Κάθε κύκλος που τέμνει ορθογώνια τους προηγούμενους κύκλους διέρχεται από δύο σταθερά σημεία.Τα σημεία αυτά ονομάζονται σημεία Poncelet.

Απόδειξη

Έστω ότι $R_1 > R_2$.



Έστω ότι ο κύκλος (O) τέμνει οθογώνια τους κύκλους $(K), (\Lambda)$ στα σημεία A, B αντίστοιχα.
Η OA είναι εφαπτομένη του κύκλου (K) οπότε $OA^2 = OK^2 - R_1^2$ (1),όμοια η OB είναι εφαπτομένη του κύκλου (Λ) οπότε $OB^2 = O\Lambda^2 - R_2^2$ (2).
Από τις (1),(2) έχουμε $OK^2 - R_1^2 = O\Lambda^2 - R_2^2 \Leftrightarrow OK^2 - O\Lambda^2 = R_1^2 - R_2^2$ (3).Φέρουμε $ON \perp$ΚΛ.
Λόγω της (3) είναι $OK > O\Lambda$.
Έστω M το μέσο της διακέντρου. (3) $\Leftrightarrow 2K\Lambda.MN = R_1^2 - R_2^2 \Leftrightarrow MN = \frac{R_1^2 - R_2^2}{2K\Lambda}$ σταθερό.Άρα το O είναι σημείο σταθερής ευθείας κάθετης της διακέντρου που απέχει από το M απόσταση $\frac{R_1^2 - R_2^2}{2K\Lambda}$ (ριζικός άξονας των κύκλων $(K), (\Lambda)$).
Είναι $KN > R_1 = KA \Leftrightarrow KN^2 > KA^2 \Leftrightarrow OK^2 - ON^2 > OK^2 - OA^2 \Leftrightarrow ON < OA$.Άρα ο κύκλος (O) θα έχει με τη διάκεντρο δύο κοινά σημεία P_1, P_2.
Το τρίγωνο OP_1P_2 είναι ισοσκελές οπότε $P_1N = P_2N$.Έστω R η ακτίνα του κύκλου (O).
$KP_1.KP_2 = KA^2 \Leftrightarrow (KN - P_1N)(KN + P_2N) = R_1^2 \Leftrightarrow KN^2 - P_1N^2 = R_1^2 \Leftrightarrow P_1N = \sqrt{KN^2 - R_1^2}$ (4).
Αφού $P_1N = P_2N$ λόγω της (4) προκύπτει ότι τα σημεία P_1, P_2 είναι σταθερά.
Τα σημεία P_1, P_2 είναι τα σημεία Poncelet.

__Σημείωση__: Αν $(K), (\Lambda)$ δύο κύκλοι ο ένας στο εξωτερικό του άλλου,τότε ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Poncelet τέμνει τους κύκλους οθογώνια.
Αν οι κύκλοι εφάπτονται τα σημεία Poncelet ταυτίζονται με το σημείο επαφής.

<u>Σχόλιο</u>: Jean-Victor Poncelet (1788-1867),Γάλλος μηχανικός και μαθηματικός.Ασχολήθηκε με την προβολική γεωμετρία και οι ανακαλύψεις του οδήγησαν στην αρχή της δυαδικότητας (μετασχηματισμοί που εναλλάσσονται).Επίσης βοήθησε στην ανάπτυξη των μιγαδικών αριθμών.