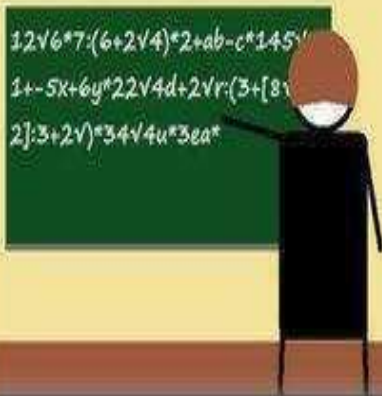


Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου

Μεθοδική Επανάληψη

Τι είναι γραμμένο στον πίνακα




$12\sqrt{6} \cdot 7 \cdot (6+2\sqrt{4}) \cdot 2+ab-c \cdot 145'$
 $1+-5x+6y \cdot 22\sqrt{4d}+2\sqrt{r} \cdot (3+[8$
 $2]:3+2\sqrt{)} \cdot 34\sqrt{4u} \cdot 3ea'$

Τι νομίζει η δασκάλα πως είναι γραμμένο στον πίνακα

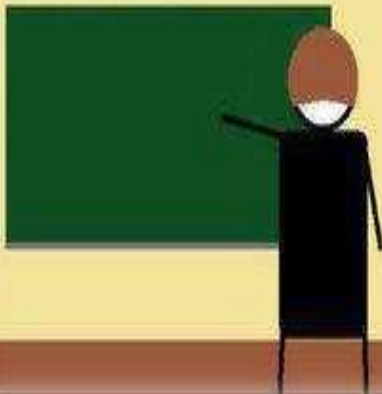

$$2 + 2 = 4$$

Τι νομίζουν οι μαθητές πως είναι γραμμένο στον πίνακα



而不是键入一個美好的譯員
胡說我有一個夢想，夢想雞E
話'的事情在衣櫃裡，他驚的抽
縮到有經驗的獵人阿哈小兒

Τι θυμούνται οι μαθητές



Τι νομίζουν οι μαθητές ότι θα πέσει στο τεστ



9485*6446/1784*(184-123)/77**746/1og[7747+//3431*
/76+6742-(p*782/4+log(421)3874/(42-24+43)-42*3
e-n)7X2((n+22^2)0ab2-ein2o-2ena"cos"sin)(p)-sin
+cos"cos"sin/(cos(0)-cos"cos-sin"sin"sin)92*
cos(90°)+4544*924/321-6132113289-53215/og(5484
/og(43.8894"no"78.654231588a-ye"b)X-sin
p(-e)-(p-0)/(p-c)-0e"sin0.5646845310x+4e"3-5+46.6
*(2-2°)/log(a+5321.314716e)/3.1415926535897932
4626433832/2abog(2b-)/2ac"mi-476.842887e"e-b/2
+648650)//d542117c1y(3a2"e)-e1-0485.874664321
c1y(28471.6584"no) 9449*23198+708og (/og-d/u/p/e

Τι νομίζει η καθαρίστρια ότι είναι γραμμένο στον πίνακα



Στέλιος Μιχαήλογλου

Η επανάληψη των Μαθηματικών βήμα - βήμα

Άλγεβρα

Κεφάλαιο 1ο: Άλγεβρικές παραστάσεις

1.1. Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς (επαναλήψεις – συμπληρώσεις)

A. Οι πραγματικοί αριθμοί και οι πράξεις τους.

1. Ποιοι αριθμοί λέγονται ρητοί και ποιοι άρρητοι; Ποιοι είναι οι πραγματικοί αριθμοί;

Απάντηση

Ρητός λέγεται κάθε αριθμός που έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή ενός κλάσματος $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν ακέραιοι αριθμοί και $\nu \neq 0$. Άρρητος λέγεται κάθε αριθμός που δεν είναι ρητός. Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται από τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς.

2. Πως προσθέτουμε δύο ομόσημους αριθμούς και πως δύο ετερόσημους;

Απάντηση

Για να προσθέσουμε δύο ομόσημους αριθμούς, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμά αυτό βάζουμε ως πρόσημο το κοινό τους πρόσημο.

Για να προσθέσουμε δύο ετερόσημους αριθμούς, αφαιρούμε την μικρότερη απόλυτη τιμή από τη μεγαλύτερη και στη διαφορά αυτή βάζουμε πρόσημο, το πρόσημο του αριθμού που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

3. Πως πολλαπλασιάζουμε δύο ομόσημους αριθμούς και πως δύο ετερόσημους;

Απάντηση

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ομόσημους αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους, και στο γινόμενο αυτό βάζουμε πρόσημο +.

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ετερόσημους αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους, και στο γινόμενο αυτό βάζουμε πρόσημο -.

4. Ποιες είναι οι ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού πραγματικών αριθμών;

Απάντηση

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$a + \beta = \beta + a$	$a\beta = \beta a$
Προσεταιριστική	$a + (\beta + \gamma) = (a + \beta) + \gamma$	$a(\beta\gamma) = (a\beta)\gamma$
Ουδέτερο στοιχείο	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$
	$a + (-a) = 0$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1, a \neq 0$
Επιμεριστική	$a(\beta + \gamma) = a\beta + a\gamma$	

5. Πότε δύο αριθμοί λέγονται αντίθετοι και πότε αντίστροφοι;

Απάντηση

Δύο αριθμοί που έχουν άθροισμα μηδέν, λέγονται αντίθετοι.

Δύο αριθμοί που έχουν γινόμενο τη μονάδα, λέγονται αντίστροφοι.

6. Πως βρίσκουμε τη διαφορά δύο αριθμών και πως το ηλίκο τους;

Απάντηση

Για να βρούμε τη διαφορά δύο αριθμών, προσθέτουμε στο μειωτέο τον αντίθετο του αφαιρετέου.

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

Για να βρούμε το ηλίκο δύο αριθμών ($\alpha : \beta$, ή με $\beta \neq 0$), πολλαπλασιάζουμε το διαιρέτέο με τον

αντίστροφο του διαιρέτη. $\alpha : \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$ ή $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$

Βασικές ασκήσεις

1. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(+\frac{1}{12}\right)$$

$$\beta) -\left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{3} - \frac{11}{6}\right)$$

$$\gamma) -5 \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - 5 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right)$$

$$\delta) \left(1 - \frac{7}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{5}\right) - \frac{3}{5} : \left(-\frac{2}{5} + \frac{2}{3}\right)$$

2. Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:

$$\alpha) 8 - (\alpha - \beta) + (\alpha - 5 - \beta) = 3$$

$$\beta) 2 - (\alpha + \beta - \gamma) - (4 + \gamma - \beta) - (-2 - \alpha) = 0$$

$$\gamma) -2 \cdot (\alpha - 3) + \alpha \cdot (-7 + 9) - 3(+2) = 0$$

B. Δυνάμεις πραγματικών αριθμών

7. Πως ορίζεται η δύναμη ενός πραγματικού αριθμού α με εκθέτη ένα φυσικό αριθμό $n \geq 2$. Πως ορίζονται οι δυνάμεις α^0 , α^1 και α^{-n} ;

Απάντηση

Η **δύναμη** με βάση έναν πραγματικό αριθμό α και εκθέτη ένα φυσικό αριθμό $n \geq 2$ συμβολίζεται με α^n και είναι το γινόμενο n παραγόντων ίσων με τον αριθμό α .

Δηλαδή $\alpha^n = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_{n\text{-παράγοντες}}$

Ορίζουμε ακόμη: $\alpha^0 = 1$, $\alpha^1 = \alpha$ και $\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}$

8. Ποιες είναι οι ιδιότητες των δυνάμεων;

Απάντηση

$$1. \alpha^m \cdot \alpha^n = \alpha^{m+n}$$

$$2. \alpha^m : \alpha^n = \alpha^{m-n}$$

$$3. (\alpha \cdot \beta)^n = \alpha^n \cdot \beta^n$$

$$4. \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = \frac{\alpha^n}{\beta^n}$$

$$5. (\alpha^m)^n = \alpha^{m \cdot n}$$

$$6. \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-n} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n$$

9. Ποια είναι η προτεραιότητα των πράξεων;

Απάντηση

- Πρώτα υπολογίζουμε τις δυνάμεις.
- Στη συνέχεια κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις.
- Τέλος, κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.

- Όταν η παράσταση περιέχει και παρενθέσεις, εκτελούμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις με τη σειρά που αναφέραμε παραπάνω.

Βασικές ασκήσεις

3. Να υπολογίσετε την τιμή κάθε παράστασης:

α) $(2^{-2})^3 \cdot 2^8$ β) $(-3)^2 \cdot (-3)^{-4}$ γ) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{12} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-14}$ δ) $\frac{2^3 \cdot 2^8}{2^6}$ ε) $\frac{(2^{-2})^{-2} (2^{400})^0}{(2^4)^3 : (2^3)^3}$

4. Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

$A = 3 \cdot (-2)^2 + 4 - (-7)^0 \cdot 2 - 8(2^{-1} - 1) - 2 \cdot 3^2$ $B = (-4)^2 : 2 - 5 - (-3) \cdot 2^2 - (-2)^4$

Γ. Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού

10. Τι ονομάζεται τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού x και ποια είναι η τετραγωνική ρίζα του μηδέν;

Απάντηση

Η τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού x συμβολίζεται με \sqrt{x} και είναι ο θετικός αριθμός που όταν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον αριθμό x. Ορίζουμε ακόμη $\sqrt{0} = 0$.

11. Να γράψετε τις ιδιότητες των ριζών.

Απάντηση

Για δύο μη αρνητικούς αριθμούς α, β μπορούμε να αποδείξουμε ότι:

- Το γινόμενο των τετραγωνικών ριζών τους ισούται με την τετραγωνική ρίζα του γινομένου τους.

$$\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$$

- το πηλίκο των τετραγωνικών ριζών τους ισούται με την τετραγωνική ρίζα του πηλίκου τους.

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} \text{ με } \beta > 0.$$

Βασικές ασκήσεις

5. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\sqrt{2}(\sqrt{18} + \sqrt{8})$ β) $\sqrt{6}(\sqrt{27} - \sqrt{3})$ γ) $(\sqrt{75} + \sqrt{45} - \sqrt{300}) : \sqrt{15}$

6. Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα, που έχουν άρρητους παρονομαστές, σε ισοδύναμα κλάσματα με ρητούς παρονομαστές:

α) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ β) $\frac{4}{\sqrt{6}}$ γ) $\frac{5}{2\sqrt{5}}$ δ) $\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

1.2. Μονώνυμα - Πράξεις με μονώνυμα

A. Αλγεβρικές παραστάσεις - Μονώνυμα

12. Ποιες παραστάσεις λέγονται αριθμητικές και ποιες αλγεβρικές; Πότε μια αλγεβρική παράσταση λέγεται ακέραια; Τι ονομάζεται αριθμητική τιμή της αλγεβρικής παράστασης;

Απάντηση

Μαθηματικές εκφράσεις-παραστάσεις που περιέχουν μόνο αριθμούς ονομάζονται αριθμητικές παραστάσεις.

Μαθηματικές εκφράσεις-παραστάσεις οι οποίες, εκτός από αριθμούς, περιέχουν και μεταβλητές (γράμματα που παριστάνουν αριθμούς) λέγονται αλγεβρικές παραστάσεις.

Ειδικότερα μια αλγεβρική παράσταση λέγεται ακέραια, όταν μεταξύ των μεταβλητών της σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες των μεταβλητών της είναι φυσικοί αριθμοί.

Αν σε μια αλγεβρική παράσταση αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με αριθμούς και κάνουμε τις πράξεις, θα προκύψει ένας αριθμός που λέγεται αριθμητική τιμή ή απλά τιμή της.

13. Τι ονομάζεται μονώνυμο; Τι ονομάζεται κύριο μέρος του μονωνύμου και τι συντελεστής του; Τι ονομάζεται βαθμός του μονωνύμου ως προς μια μεταβλητή του και τι βαθμός ως προς όλες τις μεταβλητές;

Απάντηση

- Οι ακέραιες αλγεβρικές παραστάσεις, στις οποίες μεταξύ των μεταβλητών σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού, λέγονται μονώνυμα.
- Σ' ένα μονώνυμο ο αριθμητικός παράγοντας λέγεται συντελεστής του μονωνύμου, ενώ το γινόμενο όλων των μεταβλητών του με τους αντίστοιχους εκθέτες τους λέγεται κύριο μέρος του μονωνύμου.
- Ο εκθέτης μιας μεταβλητής λέγεται βαθμός του μονωνύμου ως προς τη μεταβλητή αυτή, ενώ ο βαθμός του μονωνύμου ως προς όλες τις μεταβλητές του λέγεται το άθροισμα των εκθετών των μεταβλητών του.

14. Πότε δύο μονώνυμα λέγονται όμοια, πότε ίσα και πότε αντίθετα; Ποιο μονώνυμο λέγεται σταθερό και ποιο μηδενικό;

Απάντηση

Όμοια μονώνυμα λέγονται εκείνα που έχουν ίδιο κύριο μέρος. Για παράδειγμα τα μονώνυμα είναι όμοια.

Τα όμοια μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή λέγονται ίσα ενώ, αν έχουν αντίθετους συντελεστές, λέγονται αντίθετα.

Οι αριθμοί είναι μονώνυμα και τα ονομάζουμε σταθερά μονώνυμα και είναι μηδενικού βαθμού. Ειδικότερα, ο αριθμός 0 λέγεται μηδενικό μονώνυμο και δεν έχει βαθμό.

B. Πράξεις με μονώνυμα

15. Πως προσθέτουμε δύο μονώνυμα;

Απάντηση

Το άθροισμα ομοίων μονωνύμων είναι μονώνυμο όμοιο με αυτά και έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους.

16. Πως πολλαπλασιάζουμε μονώνυμα;

Απάντηση

Το γινόμενο μονωνύμων είναι μονώνυμο με:

- συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους και
- κύριο μέρος το γινόμενο όλων των μεταβλητών τους με εκθέτη κάθε μεταβλητής το άθροισμα των εκθετών της.

1.3. Πολυώνυμα - Πρόσθεση και Αφαίρεση πολυωνύμων

17. Τι ονομάζεται πολυώνυμο; Πότε ένα πολυώνυμο λέγεται διώνυμο και πότε τριώνυμο;

Απάντηση

Τα Αθροίσματα μη ομοίων μονωνύμων είναι μια αλγεβρική παράσταση, που λέγεται **πολυώνυμο**.

Ειδικότερα, ένα πολυώνυμο που δεν έχει όμοιους όρους λέγεται διώνυμο, αν έχει δύο όρους και τριώνυμο, αν έχει τρεις όρους.

18. Τι ονομάζεται βαθμός του πολυωνύμου; Ποιο πολυώνυμο λέγεται σταθερό και ποιο μηδενικό;

Απάντηση

Βαθμός ενός πολυωνύμου ως προς μία ή περισσότερες μεταβλητές του, είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του.

Κάθε αριθμός μπορεί να θεωρηθεί και ως πολυώνυμο, οπότε λέγεται σταθερό πολυώνυμο. Ο αριθμός μηδέν λέγεται μηδενικό πολυώνυμο και δεν έχει βαθμό, ενώ κάθε άλλο σταθερό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.

19. Ποια διαδικασία ονομάζεται αναγωγή ομοίων όρων;

Απάντηση

Αν σε ένα πολυώνυμο υπάρχουν όμοια μονώνυμα, ή όπως λέμε όμοιοι όροι, τότε μπορούμε να τους αντικαταστήσουμε με το άθροισμά τους. Η εργασία αυτή λέγεται αναγωγή ομοίων όρων.

Βασικές ασκήσεις

7. Δίνεται το πολυώνυμο $A = -2xy^2 + y^3 + 2x^3 - xy^2$

α) Να βρείτε την αριθμητική τιμή του για $x = 2$ και $y = -1$.

β) Να γράψετε το πολυώνυμο κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του y . Ποιος είναι ο βαθμός του ως προς x και y ;

8. Αν $P(x) = (-5x^2 + 4x - 3) - (x^2 - 2x + 1) + (3x^2 + x)$ και $Q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, να βρείτε τις τιμές των α, β, γ ώστε τα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα πολυώνυμα.

1.4. Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

20. Πως πολλαπλασιάζουμε μονώνυμο με πολυώνυμο και πως πολυώνυμο με πολυώνυμο;

Απάντηση

Για να πολλαπλασιάσουμε μονώνυμο με πολυώνυμο, πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

Για να πολλαπλασιάσουμε πολυώνυμο με πολυώνυμο, πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός πολυωνύμου με κάθε όρο του άλλου πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

1.5. Αξιοσημείωτες ταυτότητες

21. Τι ονομάζεται ταυτότητα;

Απάντηση

Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της.

22. Να γράψετε το ανάπτυγμα της ταυτότητας $(\alpha + \beta)^2$ και στη συνέχεια να το αποδείξετε.

Απάντηση

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

Απόδειξη: $(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta) = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

23. Να γράψετε το ανάπτυγμα της ταυτότητας $(\alpha - \beta)^2$ και στη συνέχεια να το αποδείξετε.

Απάντηση

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

Απόδειξη: $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta - \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

24. Να γράψετε το ανάπτυγμα της ταυτότητας $(\alpha + \beta)^3$ και στη συνέχεια να το αποδείξετε.

Απάντηση

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

Απόδειξη: $(\alpha + \beta)^3 = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) =$
 $\alpha^3 + 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 + \beta^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

25. Να γράψετε το ανάπτυγμα της ταυτότητας $(\alpha - \beta)^3$ και στη συνέχεια να το αποδείξετε.

Απάντηση

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

Απόδειξη: $(\alpha - \beta)^3 = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) =$
 $\alpha^3 - 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 - \beta^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

26. Να γράψετε το ανάπτυγμα της ταυτότητας $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$ και στη συνέχεια να το αποδείξετε.

Απάντηση

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

Απόδειξη: $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta + \alpha\beta - \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2$

Βασικές ασκήσεις

9. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = (x - 3)^2 + (3x + 1)^2 - 10(x - 1)(x + 1)$ είναι σταθερό.

10.Α) Να αποδείξετε ότι $\left(\alpha + \frac{5}{\alpha}\right)^2 - \left(\alpha - \frac{5}{\alpha}\right)^2 = 20$

Β) Να υπολογίσετε τον αριθμό $x = \left(2005 + \frac{1}{401}\right)^2 - \left(2005 - \frac{1}{401}\right)^2$

11. Να αποδείξετε ότι:

α) $(x - 2y)^2 - (2x - y)^2 + 3x^2 = 3y^2$

β) $(4\alpha - 1)^3 - \alpha(8\alpha + 1)(8\alpha - 1) - 47\alpha^2 = 12\alpha - 1$

γ) $(\alpha - 3\beta)^2 + (3\alpha + 2\beta)(3\alpha - 2\beta) - (3\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + 4\beta^2$ **δ)** $(\alpha^2 + \beta^2)^2 - (2\alpha\beta)^2 = (\alpha^2 - \beta^2)^2$

12. Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα, που έχουν άρρητους παρονομαστές, σε ισοδύναμα κλάσματα με ρητούς παρονομαστές.

α) $\frac{1}{\sqrt{5} - 1}$

β) $\frac{6}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$

γ) $\frac{5}{3 + \sqrt{2}}$

δ) $\frac{12}{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}$

13. Αν $x = 3 + \sqrt{5}$ και $y = 3 - \sqrt{5}$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) xy

β) $x^2 - y^2$

γ) $x^2 + y^2$

δ) $x^3 + y^3$

1.6. Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων

27. Ποια διαδικασία ονομάζεται παραγοντοποίηση;

Απάντηση

Η διαδικασία με την οποία μια παράσταση, που είναι άθροισμα, μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων, λέγεται παραγοντοποίηση.

Βασικές ασκήσεις

14. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $3\beta + 3\beta$ β) $2x - 8$ γ) $8\omega^2 + 6\omega$ δ) $-9x^2 - 6x$
ε) $8\alpha^2\beta + 4\alpha\beta^2$ στ) $2x^2 - 2xy + 2x$ ζ) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha\beta$

15. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $(3x - 1)(x - 2) - (x + 4)(x - 2)$ β) $\alpha^2(\alpha - 2) - 3(\alpha - 2)$
γ) $4x(x - 1) - x + 1$ δ) $2x^2(x - 3) - 6x(x - 3)^2$

16. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^2 + xy + \alpha x + \alpha y$ β) $x^3 - x^2 + x - 1$ γ) $x^3 - 5x^2 + 4x - 20$
δ) $2x^3 - 3x^2 + 4x - 6$ ε) $4x^2 - 8x - \alpha x + 2\alpha$ στ) $9\beta - 18\beta^2 + 10\beta - 5$

17. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $7\alpha^2 + 10\alpha\beta + 3\beta^2$ β) $5x^2 - 8xy + 3y^2$ γ) $3x^2 - xy - 2y^2$

18. α) Να αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων η παράσταση $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha - \beta$.

β) Αν για τους αριθμούς α, β ισχύει: $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha + \beta$, να αποδειχθεί ότι οι αριθμοί α, β είναι αντίθετοι ή αντίστροφοι.

19. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^2 - 9$ β) $16x^2 - 1$ γ) $2x^2 - 32$ δ) $\alpha^2\beta^2 - 4$
ε) $5\alpha x^2 - 80\alpha$ στ) $4(x + 1)^2 - 9(x - 2)^2$ ζ) $\frac{1}{x^2} - 16$ η) $x^2 - 3$

20. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^2 + 2x + 1$ β) $\omega^2 - 6\omega + 9$ γ) $1 - 4\beta + 4\beta^2$ δ) $4y^2 - 12y + 9$
ε) $3x^2 + 24x + 48$ στ) $-y^2 + 4y - 4$ ζ) $2\alpha^2 - 8\alpha\beta + 8\beta^2$ η) $4\alpha^3 + 12\alpha^2 + 9\alpha$

21. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^2 + 3x + 2$ β) $y^2 - 4y + 3$ γ) $\omega^2 + 5\omega + 6$ δ) $\alpha^2 + 6\alpha + 5$

22. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^2y^2 - 4y^2 - x^2 + 4$ β) $x^4 - 1 + x^3 - x$ γ) $x^3(x^2 - 1) + 1 - x^2$ δ) $(x^2 + 9)^2 - 36x^2$
ε) $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha + \beta$ θ) $2(x - 1)(x^2 - 4) - 5(x - 1)(x - 2)^2$

1.8. Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. ακεραίων αλγεβρικών παραστάσεων

28. Τι ονομάζεται Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων και τι Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) τους;

Απάντηση

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.

Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μικρότερο από τους εκθέτες του.

1.9. Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις

29. Ποια παράσταση ονομάζεται ρητή αλγεβρική παράσταση;

Απάντηση

Μια αλγεβρική παράσταση που είναι κλάσμα και οι όροι του είναι πολυώνυμα, λέγεται ρητή αλγεβρική παράσταση ή απλώς ρητή παράσταση.

Βασικές ασκήσεις

23. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$\begin{array}{lllll} \alpha) \frac{6x}{2x^2 + 4x} & \beta) \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} & \gamma) \frac{y^2 - 1}{y^2 + 2y + 1} & \delta) \frac{y - 1}{1 - y} & \epsilon) \frac{\omega - 2}{(2 - \omega)^2} \\ \sigma\tau) \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 4} & \zeta) \frac{y(y - 3) + y^2 - 9}{4y^2 - 9} & \eta) \frac{(2\omega + 1)^2 - (\omega + 2)^2}{\omega^4 - 1} & & \end{array}$$

1.10. Πράξεις ρητών παραστάσεων

A. Πολλαπλασιασμός - Διάρθρωση ρητών παραστάσεων

Βασικές ασκήσεις

24. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \left(\frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{4x+4}{x+2} \right) : \frac{8x-8}{x+2} \quad \beta) \frac{x+2}{x-1} : \left(\frac{2x+6}{x-1} \cdot \frac{x+2}{x+3} \right)$$

B. Πρόσθεση - Αφαίρεση ρητών παραστάσεων

25. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{x-2}{x} + \frac{4}{x-2} - \frac{8}{x^2-2x} \quad \beta) \left[\frac{x+3}{x^2-1} + \frac{x-3}{(x-1)^2} \right] : \frac{x^2-3}{(x-1)^2}$$

Κεφάλαιο 2ο: Εξισώσεις - Ανισώσεις

2.1. Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς (επαναλήψεις – συμπληρώσεις)

30. Ποιες είναι οι λύσεις της εξίσωσης $ax + \beta = 0$;

Απάντηση

- Αν $a \neq 0$, τότε; η εξίσωση $ax + \beta = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = -\frac{\beta}{a}$
- Αν $a = 0$, τότε η εξίσωση $ax + \beta = 0$ γράφεται $0x = -\beta$ και
 - αν $\beta \neq 0$, δεν έχει λύση (αδύνατη), ενώ
 - αν $\beta = 0$, κάθε αριθμός είναι λύση της (ταυτότητα ή αόριστη)

2.2. Εξισώσεις δευτέρου βαθμού

A. Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων

Βασικές ασκήσεις

26. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x-4)(x-1)=0$

β) $x^2 = 7x$

γ) $2\omega^2 - 72 = 0$

δ) $(2x-1)^2 - 1 = 0$

B. Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με τη βοήθεια τύπου

31. Τι είναι η Διακρίνουσα; Ποιες είναι οι λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$;

Απάντηση

Διακρίνουσα Δ είναι ο αριθμός $\beta^2 - 4\alpha\gamma$, δηλαδή $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$.

Αν $\Delta > 0$ τότε η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις τις $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

Αν $\Delta = 0$ η εξίσωση έχει μία διπλή λύση την $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$

Αν $\Delta < 0$ τότε η εξίσωση δεν έχει λύση (αδύνατη).

32. Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$, τότε πως παραγοντοποιείται το τριώνυμο $ax^2 + \beta x + \gamma$;

Απάντηση

Είναι $ax^2 + \beta x + \gamma = a(x - \rho_1)(x - \rho_2)$

Βασικές ασκήσεις

27. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 - x - 2 = 0$

β) $4y^2 + 3y - 1 = 0$

γ) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

δ) $x^2 - 4x = 5$

ε) $3x^2 - 2(x-1) = 2x + 1$

στ) $\frac{x^2-1}{3} - \frac{x+3}{5} = x-2$

28. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

α) $x^2 + 4x - 12$

β) $3y^2 - 8y + 5$

γ) $-2\omega^2 + 5\omega - 3$

2.3. Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού

Βασικές ασκήσεις

29. Να βρείτε ένα θετικό αριθμό, τέτοιο ώστε:

- α) Το μισό του τετραγώνου του να είναι ίσο με το διπλάσιό του.
- β) Το γινόμενο του μ' έναν αριθμό, που είναι κατά 2 μικρότερος, να είναι 24.
- γ) Το διπλάσιο του τετραγώνου του, να είναι κατά 3 μεγαλύτερο από το πενταπλάσιό του.

30. Ένα οικοπέδο έχει σχήμα ορθογωνίου με εμβαδόν 150 m^2 . Αν το μήκος του είναι 5 m μεγαλύτερο από το πλάτος του, να βρείτε πόσα μέτρα συρματόπλεγμα χρειάζονται για την περιφράξη του.

2.4. Κλασματικές εξισώσεις

Βασικές ασκήσεις

31. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{2}{x-1} = \frac{1}{2}$$

$$\beta) \frac{4}{(\alpha-2)^2} - \frac{3}{\alpha-2} = 1$$

$$\gamma) \frac{6}{x(x+3)} = \frac{x+2}{x} + \frac{x+1}{x+3}$$

$$\delta) \frac{\omega^2+5}{\omega^2-\omega} - \frac{\omega+5}{\omega-1} = \frac{1}{\omega}$$

$$\epsilon) \frac{1}{x^2-4x+4} = \frac{2x-1}{x^2-4}$$

$$\sigma\tau) 1 + \frac{3\alpha}{\alpha-2} = \frac{\alpha+4}{\alpha^2-3\alpha+2}$$

2.5. Ανισότητες – Ανισώσεις με έναν άγνωστο

33. Πως συγκρίνουμε δύο πραγματικούς αριθμούς α και β που δεν έχουν παρασταθεί με σημεία ενός άξονα;

Απάντηση

Για να συγκρίνουμε λοιπόν δύο πραγματικούς αριθμούς α και β , που δεν έχουν παρασταθεί με σημεία ενός άξονα, βρίσκουμε τη διαφορά τους $\alpha - \beta$ και εξετάζουμε αν είναι θετική ή αρνητική ή μηδέν, δηλαδή

Αν $\alpha - \beta > 0$ τότε $\alpha > \beta$

Αν $\alpha - \beta < 0$ τότε $\alpha < \beta$

Αν $\alpha - \beta = 0$ τότε $\alpha = \beta$

34. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ να αποδείξετε ότι $\alpha\gamma > \beta\delta$.

Απάντηση

Είναι $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$, οπότε σύμφωνα με την ιδιότητα (β) έχουμε $\alpha\gamma > \beta\gamma$ (1)

Είναι $\gamma > \delta$ και $\beta > 0$, οπότε για τον ίδιο λόγο έχουμε $\beta\gamma > \beta\delta$ (2)

Από τις ανισότητες (1), (2) και σύμφωνα με τη μεταβατική ιδιότητα έχουμε $\alpha\gamma > \beta\delta$.

Βασικές ασκήσεις

32. Να αποδείξετε ότι: α) Αν $\alpha > 1$ τότε $\alpha^2 > \alpha$ β) Αν $x > 2$ τότε $x^3 > 2x^2$

33. Αν $x > 3$ και $y < 2$, τότε να αποδείξετε ότι

$$\alpha) (x-3)(y-2) < 0$$

$$\beta) xy + 6 < 2x + 3y$$

34. Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y , να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) x^2 + 1 \geq 2x$$

$$\beta) (x+y)^2 \geq 4xy$$

$$\gamma) x^2 + y^2 + 1 \geq 2y$$

35. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\alpha) \frac{3-4x}{5} - \frac{3x}{10} > \frac{6-x}{2}$$

$$\beta) \frac{2x+1}{6} - x < \frac{3-2x}{3}$$

$$\gamma) 1 - \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{3} \right) < \frac{x+4}{6}$$

36. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων: $\begin{cases} 7x - 1 < 8 + 6x \\ 3x - 2 > x - 10 \end{cases}$

Κεφάλαιο 3ο: Συστήματα γραμμικών εξισώσεων

3.1. Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης

35. Τι ονομάζεται λύση της εξίσωσης $ax + by = \gamma$;

Απάντηση

Λύση μιας εξίσωσης $ax + by = \gamma$ ονομάζεται κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) που την επαληθεύει.

36. Πότε ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία;

Απάντηση

Ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία, τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

37. Τι παριστάνει η εξίσωση $y = k$, $k \neq 0$ και τι η εξίσωση $y = 0$;

Απάντηση

Η εξίσωση $y = k$ με $k \neq 0$ παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, k)$, ενώ η εξίσωση $y = 0$ παριστάνει τον άξονα $x'x$.

38. Τι παριστάνει η εξίσωση $x = k$, $k \neq 0$ και τι η εξίσωση $x = 0$;

Απάντηση

Η εξίσωση $x = k$ με $k \neq 0$ παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(k, 0)$, ενώ η εξίσωση $x = 0$ παριστάνει τον άξονα $y'y$.

39. Τι ονομάζεται γραμμική εξίσωση με αγνώστους x, y ;

Απάντηση

Γραμμική εξίσωση με αγνώστους x, y ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής $ax + by = \gamma$ και παριστάνει ευθεία όταν $a \neq 0$ ή $b \neq 0$.

Βασικές ασκήσεις

37. Δίνεται η ευθεία: $\epsilon: 6x + 2y = 8 - 2\lambda$.

α) Να βρείτε τον αριθμό λ , ώστε η ευθεία να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Για $\lambda = 4$ να σχεδιάσετε την ευθεία ϵ σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

38. Αν η ευθεία $\epsilon: 4x + 3y = 12$ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία A και B αντίστοιχως, τότε:

α) Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες των σημείων A και B.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου OAB, όπου O η αρχή των αξόνων.

3.2. Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυσή του

40. Τι εννοούμε με την έκφραση: «επιλύουμε ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x, y »;

Απάντηση

Αν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις με δύο αγνώστους x, y , και αναζητούμε το ζεύγος των αριθμών (x, y) που είναι ταυτόχρονα λύση και των δύο εξισώσεων, τότε λέμε ότι έχουμε να επιλύσουμε ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y .

41. Τι ονομάζεται λύση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y;

Απάντηση

Λύση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y ονομάζεται κάθε ζεύγος (x, y) που επαληθεύει τις εξισώσεις του.

42. Πως ερμηνεύεται γραφικά ότι ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους έχει μία λύση ή είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις;

Απάντηση

Αν οι δύο ευθείες που αντιπροσωπεύουν τις δύο εξισώσεις του συστήματος τέμνονται, τότε οι συντεταγμένες του σημείου τομής τους αποτελούν τη μοναδική λύση του συστήματος.

Αν οι δύο ευθείες είναι παράλληλες τότε το σύστημα είναι αδύνατο και όταν οι ευθείες ταυτίζονται, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

3.3. Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος

Βασικές ασκήσεις

39. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 3x - y = 7 \\ -2x + y = 4 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} -2x + 3y = 5 \\ 6x - 9y = 3 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} 4x - 3(2x + 3y) = 20 - x + y \\ 2(x - 2y) + 5(x - 2) = 3y + 4 \end{cases}$$

40. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} \frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = \frac{1}{6} \\ \frac{3}{\alpha} + \frac{4}{\beta} = \frac{5}{6} \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} \frac{2}{\omega} - \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{3} \\ \frac{-6}{\omega} + \frac{9}{\varphi} = 1 \end{cases}$$

41. Αν το σύστημα $\begin{cases} \alpha x + \beta y = 7 \\ 2\alpha x - \beta y = 8 \end{cases}$ έχει ως λύση $x = 1$ και $y = 2$, να βρείτε τις τιμές των α, β .

42. Η ευθεία με εξίσωση $\alpha x + y = \beta$ διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(-3, -2)$. Να βρείτε τις τιμές των α, β .

43. Να βρείτε τους αριθμούς λ, μ ώστε η εξίσωση $x^2 + (\lambda - \mu)x + \mu - 2\lambda = 0$ να έχει ρίζες τους αριθμούς -1 και 3 .

44. Ο μέσος όρος της βαθμολογίας ενός μαθητή στη Φυσική και τη Χημεία κατά το πρώτο τρίμηνο ήταν 16. Στο δεύτερο τρίμηνο ο βαθμός της Φυσικής μειώθηκε κατά 2 μονάδες, ο βαθμός της Χημείας αυξήθηκε κατά 4 μονάδες με αποτέλεσμα οι δύο βαθμοί να γίνουν ίσοι. Ποιους βαθμούς είχε ο μαθητής σε καθένα από τα δύο μαθήματα κατά το πρώτο τρίμηνο;

45. Από ένα σταθμό διοδίων πέρασαν 945 αυτοκίνητα και μοτοσικλέτες και εισπράχτηκαν 1810 €. Αν ο οδηγός κάθε αυτοκινήτου πλήρωσε 2 € και ο οδηγός κάθε μοτοσικλέτας πλήρωσε 1,2 €, να βρείτε πόσα ήταν τα αυτοκίνητα και πόσες οι μοτοσικλέτες.

Κεφάλαιο 4ο: Συναρτήσεις

4.1. Η συνάρτηση $y = ax^2$ με $a \neq 0$

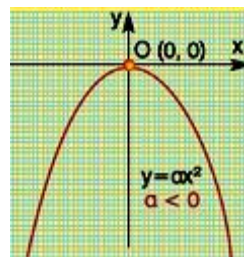
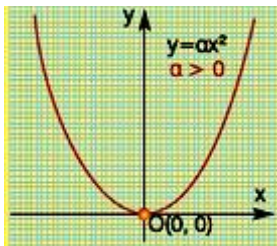
43. Πως ονομάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax^2$, $a \neq 0$. Πότε παρουσιάζει μέγιστη τιμή και ποια. Πότε παρουσιάζει ελάχιστη τιμή και ποια;

Απάντηση

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax^2$ με $a \neq 0$ λέγεται παραβολή με κορυφή το σημείο $O(0,0)$ και άξονα συμμετρίας τον y .

Αν $a > 0$ η παραβολή βρίσκεται πάνω από x ' x (εκτός από το O) και παίρνει ελάχιστη τιμή $y = 0$ για $x = 0$.

Αν $a < 0$ η παραβολή βρίσκεται κάτω τον άξονα x ' x (εκτός από το O) και παίρνει μέγιστη τιμή $y = 0$ για $x = 0$.



Βασικές ασκήσεις

46. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις παραβολές:

α) $y = x^2$, $y = \frac{1}{3}x^2$ και $y = 3x^2$ β) $y = \frac{3}{2}x^2$ και $y = -\frac{3}{2}x^2$

47. Αν η συνάρτηση $y = \frac{1}{\lambda}x^2$ παίρνει μέγιστη τιμή και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(2, \lambda)$, να βρείτε την τιμή του αριθμού λ .

4.2. Η συνάρτηση $y = ax^2 + bx + \gamma$ με $a \neq 0$

44. Πως ονομάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax^2 + bx + \gamma$ με $a \neq 0$;

Ποια είναι η κορυφή της και ποιος είναι ο άξονας συμμετρίας της; Πότε παρουσιάζει ελάχιστη τιμή και πότε μέγιστη τιμή και ποια είναι αυτή σε κάθε περίπτωση;

Απάντηση

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax^2 + bx + \gamma$ με $a \neq 0$ είναι παραβολή με:

- Κορυφή το σημείο $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$, όπου $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ και
- Άξονα συμμετρίας την κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από την κορυφή K και έχει εξίσωση $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$.
- Αν $a > 0$, η συνάρτηση $y = ax^2 + bx + \gamma$ παίρνει ελάχιστη τιμή $y = -\frac{\Delta}{4\alpha}$ όταν $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$,
- Αν $a < 0$, η συνάρτηση $y = ax^2 + bx + \gamma$ παίρνει μέγιστη τιμή $y = -\frac{\Delta}{4\alpha}$ όταν $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$.

Βασικές ασκήσεις

48. Να σχεδιάσετε τις παραβολές: α) $y = x^2 + 2x - 3$ β) $y = -2x^2 + 4x + 6$

49. Να σχεδιάσετε την παραβολή $y = x^2 - 6x + 5$. Αν Α, Β, Γ είναι τα κοινά της σημεία με τους άξονες, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

50. Να βρείτε τους αριθμούς β και γ, ώστε η συνάρτηση $y = x^2 + βx + γ$ για $x = 4$ να παίρνει ελάχιστη τιμή την $y = -7$.

Γεωμετρία

Κεφάλαιο 1ο

1.1. Ισότητα τριγώνων

45. Ποια είναι τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου;

Απάντηση

Τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου είναι οι πλευρές και οι γωνίες του.

46. Ποια είναι τα είδη τριγώνων με βάση τις γωνίες τους και τι γνωρίζετε γι' αυτά;

Απάντηση

Είναι το ορθογώνιο, το αμβλυγώνιο και το οξυγώνιο.

Το ορθογώνιο έχει μια ορθή γωνία, το αμβλυγώνιο έχει μια αμβλεία γωνία και στο οξυγώνιο τρίγωνο όλες του οι γωνίες είναι οξείες.

47. Ποια είναι τα είδη τριγώνων με βάση τις πλευρές τους και τι γνωρίζετε γι' αυτά;

Απάντηση

Είναι το ισόπλευρο το ισοσκελές και το σκαληνό.

Το ισόπλευρο έχει και τις τρεις πλευρές του ίσες. Στο ισοσκελές δύο πλευρές είναι ίσες και στο σκαληνό όλες οι πλευρές είναι άνισες.

48. Ποια είναι τα δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου και τι γνωρίζετε γι' αυτά;

Απάντηση

Τα δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου είναι η διάμεσος, το ύψος και η διχοτόμος.

Διάμεσος είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή του τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς.

Ύψος είναι το ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από μια κορυφή κάθετα στην ευθεία της απέναντι πλευράς.

Διχοτόμος είναι το ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από μια κορυφή, χωρίζει τη γωνία σε δύο ίσες γωνίες και καταλήγει στην απέναντι πλευρά.

49. Ποια είναι τα κριτήρια ισότητας τριγώνων;

Απάντηση

1ο κριτήριο ισότητας (Π - Γ - Π)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, τότε είναι ίσα. Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες

2ο κριτήριο ισότητας (Γ - Π - Γ).

Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα. Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.

3ο κριτήριο ισότητας (Π - Π - Π)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα. Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.

50. Ποια είναι τα κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων;

Απάντηση

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν:

- δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία ή
- μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση.

51. Ποιες είναι οι ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου;

Απάντηση

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

α) Οι γωνίες της βάσης του είναι ίσες.

β) Η διχοτόμος, το ύψος και η διάμεσος που φέρνουμε από την κορυφή προς τη βάση του συμπίπτουν.

52. Ποια είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου μιας γωνίας;

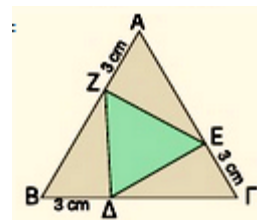
Απάντηση

Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας και αντιστρόφως κάθε εσωτερικό σημείο μιας γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου της.

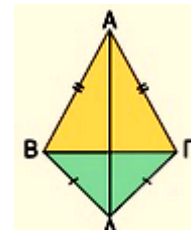
Βασικές ασκήσεις

51. Στη βάση ΒΓ ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ να πάρετε σημεία Δ, Ε, ώστε ΒΔ = ΓΕ. Να αποδείξετε ότι ΑΔ = ΑΕ.

52. Κάθε πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ είναι 8 cm. Αν είναι ΑΖ = ΒΔ = ΓΕ = 3 cm, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.



53. Τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ του διπλανού σχήματος έχουν κοινή βάση ΒΓ. Να αποδείξετε ότι η ΑΔ διχοτομεί τις γωνίες Α και Δ.



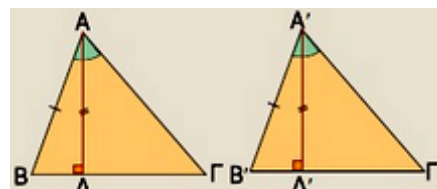
54. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α = 90°) να φέρετε τη διχοτόμο ΒΔ.

Αν ΔΕ ⊥ ΒΓ, να αποδείξετε ότι ΑΒ = ΒΕ.

55. Μια ευθεία (ε) διέρχεται από το μέσον Μ ενός τμήματος ΑΒ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β ισαπέχουν από την ευθεία (ε).

56. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν Α = Α' και ΑΒ = Α'Β'. Αν τα ύψη τους ΑΔ και Α'Δ' είναι ίσα, να αποδείξετε ότι:

- α) Β = Β'
- β) τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι ίσα.

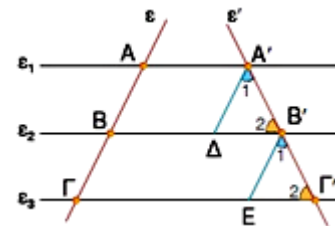


1.2. Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων

53. Αν παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία, να αποδείξετε ότι θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιαδήποτε άλλη ευθεία τις τέμνει.

Απάντηση

Παίρνουμε τρεις παράλληλες ευθείες $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ που τέμνουν την ευθεία ϵ στα σημεία A, B, Γ αντιστοίχως, έτσι ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα $AB, B\Gamma$ να είναι ίσα μεταξύ τους. Αν μια άλλη ευθεία ϵ' τέμνει τις $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ στα σημεία A', B', Γ' αντιστοίχως, τότε θα αποδείξουμε ότι και τα ευθύγραμμα τμήματα $A'B', B'\Gamma'$ είναι ίσα μεταξύ τους.



Πράγματι, αν φέρουμε $A'\Delta \parallel \epsilon, B'E \parallel \epsilon$ και συγκρίνουμε τα τρίγωνα $A'B\Delta$ και $B\Gamma'E$ παρατηρούμε ότι έχουν:

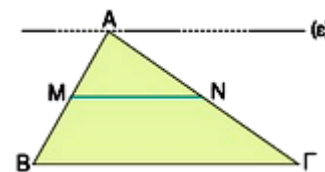
- $A'\Delta = B'E$ γιατί $A'\Delta = AB, B'E = B\Gamma$ ως απέναντι πλευρές των παραλληλογράμμων $AA'\Delta B, BB'E\Gamma$ αντιστοίχως και από την υπόθεση έχουμε $AB = B\Gamma$.
- $B'_2 = \Gamma'_2$ γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ϵ_2, ϵ_3 που τέμνονται από την ϵ' .
- $A'_1 = B'_1$ γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $A'\Delta, B'E$ που τέμνονται από την ϵ' .

Τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα, γιατί έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία. Άρα, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε $A'B' = B'\Gamma'$.

54. Να αποδείξετε ότι αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του, τότε αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.

Απάντηση

Σ' ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ από την κορυφή A φέρουμε ευθεία $\epsilon \parallel B\Gamma$ και από το μέσο M της AB φέρουμε $MN \parallel B\Gamma$. Οι παράλληλες $\epsilon, MN, B\Gamma$ αφού ορίζουν ίσα τμήματα στην AB , θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην $A\Gamma$. Άρα $AN = N\Gamma$.



55. Τι είναι ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων;

Απάντηση

Ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων είναι ίσος με το λόγο των μηκών τους, εφόσον έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα μέτρησης.

56. Πότε τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα β, δ ;

Απάντηση

Τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα β, δ , όταν ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$.

57. Ποιες είναι οι σημαντικότερες ιδιότητες των αναλογιών;

Απάντηση

- Σε κάθε αναλογία το γινόμενο των άκρων όρων είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων. Δηλαδή αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\alpha\delta = \beta\gamma$.
- Σε κάθε αναλογία μπορούμε να εναλλάξουμε τους μέσους ή τους άκρους όρους και να προκύψει πάλι αναλογία. Δηλαδή αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$ ή $\frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$.
- Λόγοι ίσοι μεταξύ τους είναι και ίσοι με το λόγο που έχει αριθμητή το άθροισμα των αριθμητών και

παρονομαστή το άθροισμα των παρονομαστών. Δηλαδή αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$

58. Με τι είναι ίση η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου;

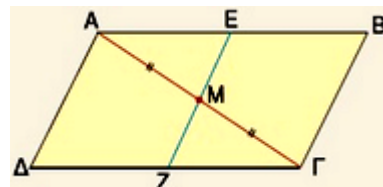
Απάντηση

Η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

Βασικές ασκήσεις

57. Από το μέσο M της διαγωνίου ΑΓ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, να φέρετε ΕΖ // ΑΔ. Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα σημεία Ε, Ζ είναι μέσα των πλευρών ΑΒ, ΔΓ αντιστοίχως.
- β) Τα τμήματα ΑΒ, ΑΓ είναι ανάλογα προς τα τμήματα ΑΕ, ΑΜ.



1.5. Ομοιότητα

Α. Όμοια πολύγωνα

59. Πότε δύο πολύγωνα είναι όμοια; Τι σχέση έχουν οι πλευρές τους στη περίπτωση αυτή;

Απάντηση

Αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι όμοια. Τότε έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

Β. Όμοια τρίγωνα

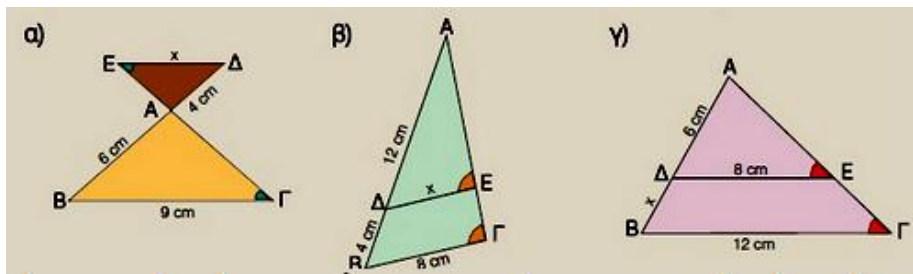
60. Πότε δύο τρίγωνα είναι όμοια;

Απάντηση

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

Βασικές ασκήσεις

58. Να υπολογίσετε το χ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:



59. Στις κάθετες πλευρές ΑΒ = 8 cm και ΑΓ = 12 cm ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ να πάρετε αντιστοίχως τα σημεία Δ και Ε, ώστε ΑΔ = 2 cm και ΑΕ = 3 cm. Να αποδείξετε ότι:

- α) ΔΕ // ΒΓ
- β) τα τρίγωνα ΑΔΕ, ΑΒΓ είναι όμοια.

1.6. Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων

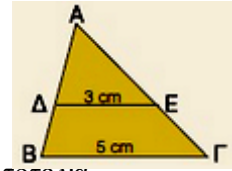
61. Με τι είναι ίσος ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων;

Απάντηση

Ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

Βασικές ασκήσεις

60. Στο διπλανό σχήμα είναι $\Delta E \parallel B\Gamma$. Αν το τρίγωνο $\Delta A E$ έχει εμβαδόν 18 cm^2 , τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $A B \Gamma$.



61. Αν Δ , E , Σ είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$, ΓA , $A B$ τριγώνου $A B \Gamma$ αντιστοίχως, τότε να υπολογίσετε τους λόγους: α) $\frac{(A Z E)}{(A B \Gamma)}$ β) $\frac{(\Delta E Z)}{(A B \Gamma)}$

Κεφάλαιο 2ο: Τριγωνομετρία

2.1. Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$

62. Πως ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου;

Απάντηση

Έστω ω οξεία γωνία ορθογωνίου τριγώνου. Τότε:

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} \quad \text{και}$$
$$\epsilon\varphi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}$$

63. Έστω $M(x,y)$ ένα σημείο του επιπέδου. Πως ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\omega = \angle xOM$;

Απάντηση

Έστω ρ η απόσταση του M από την αρχή O των αξόνων. Είναι $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{τεταγμένη του } M}{\text{απόσταση του } M \text{ από το } O} = \frac{y}{\rho}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{τετμημένη του } M}{\text{απόσταση του } M \text{ από το } O} = \frac{x}{\rho}$$
$$\epsilon\varphi\omega = \frac{\text{τεταγμένη του } M}{\text{τετμημένη του } M} = \frac{y}{x}$$

64. Ποιο είναι το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω ;

Απάντηση

Αν η γωνία ω είναι οξεία, τότε είναι $x > 0$, $y > 0$, $\rho > 0$, οπότε: $\eta\mu\omega > 0$, $\sigma\upsilon\nu\omega > 0$, $\epsilon\varphi\omega > 0$.

Αν η γωνία ω είναι αμβλεία, τότε είναι $x < 0$, $y > 0$, $\rho > 0$, οπότε: $\eta\mu\omega > 0$, $\sigma\upsilon\nu\omega < 0$, $\epsilon\varphi\omega < 0$.

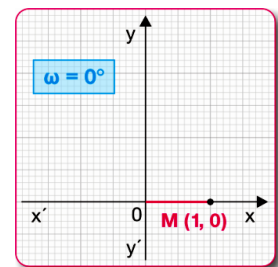
65. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των 0° , 90° και 180° .

Απάντηση

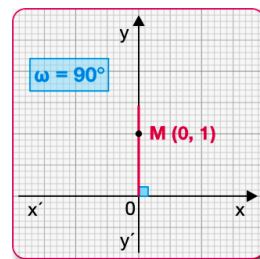
Θεωρούμε το σημείο $M(1, 0)$ του ημιάξονα Ox , είναι $\widehat{xOM} = 0^\circ$ και $\rho = OM = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$.

$$\text{Οπότε } \eta\mu 0^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{0}{1} = 0, \quad \sigma\upsilon\nu 0^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$\epsilon\varphi 0^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0.$$



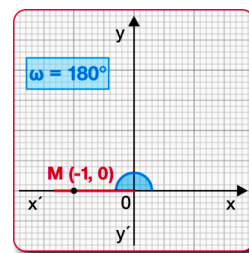
Θεωρούμε το σημείο $M(0, 1)$ του ημιάξονα Oy , είναι $\widehat{xOM} = 90^\circ$
 και $\rho = OM = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$. Άρα
 $\eta\mu 90^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{1} = 1$, $\sigma\upsilon\nu 90^\circ = \frac{\chi}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$, $\epsilon\phi 90^\circ$ δεν ορίζεται γιατί $\chi = 0$.



Θεωρούμε το σημείο $M(-1, 0)$ του ημιάξονα Ox' , είναι $\widehat{xOM} = 180^\circ$ και
 $\rho = OM = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$.

Οπότε $\eta\mu 180^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$, $\sigma\upsilon\nu 180^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{-1}{1} = -1$,

και $\epsilon\phi 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$.



Βασικές ασκήσεις

62. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο OBM είναι ισόπλευρο.

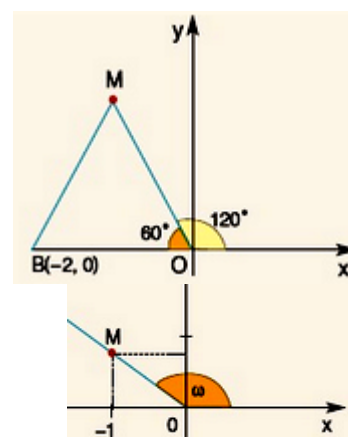
Να υπολογιστούν:

- α) οι συντεταγμένες του M .
- β) οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 120° .

63. Στο διπλανό σχήμα είναι $\epsilon\phi\omega = -\frac{3}{4}$. Αν η

τετμημένη του σημείου M είναι -1 , τότε να υπολογίσετε:

- α) την τεταγμένη του σημείου M .
- β) το $\eta\mu\omega$ και το $\sigma\upsilon\nu\omega$.



2.2. Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών

66. Αν δύο γωνίες είναι παραπληρωματικές, τότε ποια σχέση έχουν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί τους; Στη συνέχεια να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

$$\eta\mu(180^\circ - \omega) = \dots\dots\dots \quad \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = \dots\dots\dots \quad \epsilon\phi(180^\circ - \omega) = \dots\dots\dots$$

Απάντηση

Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς. $\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$ $\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$ $\epsilon\phi(180^\circ - \omega) = -\epsilon\phi\omega$

67. Αν δύο γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο, τότε ποια τι σχέση έχουν τα μέτρα αυτών των γωνιών;

Απάντηση

Αν δύο γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο και είναι από 0° μέχρι και 180° , τότε είναι ίσες ή παραπληρωματικές.

Βασικές ασκήσεις

64. Να αποδείξετε ότι:

α) $\sigma\upsilon\nu^2 45^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 135^\circ = 1$ β) $\eta\mu^2 30^\circ + \eta\mu^2 60^\circ + \eta\mu^2 120^\circ + \eta\mu^2 150^\circ = 2$

65. Να βρείτε τη γωνία x όταν:

α) $\eta_{\mu x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

β) $\eta_{\mu x} = 1 - \eta_{\mu x}$

γ) $\sigma_{\nu x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

δ) $\sigma_{\nu x} = -\frac{1}{2}$

ε) $\epsilon_{\phi x} = -\sqrt{3}$

στ) $2\epsilon_{\phi x} = 1 + \epsilon_{\phi x}$

2.3. Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας

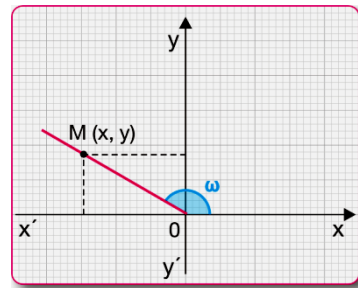
68. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε γωνία ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$ ισχύει ότι $\eta_{\mu}^2 \omega + \sigma_{\nu}^2 \omega = 1$

Απάντηση

Έστω γωνία $\widehat{xOM} = \omega$ τότε $OM = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ δηλαδή

$$x^2 + y^2 = \rho^2, \quad \eta_{\mu \omega} = \frac{y}{\rho}, \quad \sigma_{\nu \omega} = \frac{x}{\rho}. \text{ Οπότε}$$

$$\eta_{\mu}^2 \omega + \sigma_{\nu}^2 \omega = \left(\frac{y}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{x}{\rho}\right)^2 = \frac{y^2}{\rho^2} + \frac{x^2}{\rho^2} = \frac{y^2 + x^2}{\rho^2} = \frac{\rho^2}{\rho^2} = 1$$



69. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε γωνία ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$ με $\sigma_{\nu \omega} \neq 0$ ισχύει

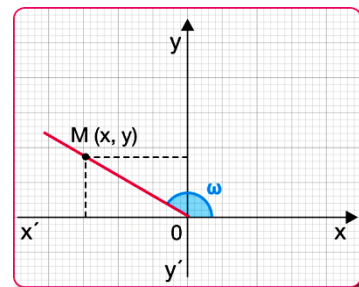
ότι: $\epsilon_{\phi \omega} = \frac{\eta_{\mu \omega}}{\sigma_{\nu \omega}}$

Απάντηση

Έστω γωνία $\widehat{xOM} = \omega$ τότε $OM = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

Είναι $\eta_{\mu \omega} = \frac{y}{\rho}$, $\sigma_{\nu \omega} = \frac{x}{\rho}$ και $\epsilon_{\phi \omega} = \frac{y}{x}$.

$$\text{Είναι } \frac{\eta_{\mu \omega}}{\sigma_{\nu \omega}} = \frac{\frac{y}{\rho}}{\frac{x}{\rho}} = \frac{y \cdot \cancel{\rho}}{x \cdot \cancel{\rho}} = \frac{y}{x} = \epsilon_{\phi \omega}$$



Βασικές ασκήσεις

66. Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $\sigma_{\nu \omega} = -\frac{1}{3}$, να υπολογιστούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω .

67. Αν για την οξεία γωνία ω ισχύει $\epsilon_{\phi \omega} = \frac{3}{4}$, να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω .

68. Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $\eta_{\mu \omega} = \frac{4}{5}$, τότε να υπολογιστεί η παράσταση:

$$A = \frac{1}{3} \eta_{\mu \omega} + \frac{2}{3} \sigma_{\nu \omega} - \frac{1}{10} \epsilon_{\phi \omega}$$

69. N' αποδείξετε ότι:

α) $\sigma_{\nu}^2 \alpha - \eta_{\mu}^2 \alpha = 2 \sigma_{\nu}^2 \alpha - 1$

β) $\eta_{\mu}^2 \alpha \cdot \sigma_{\nu}^2 \beta + \eta_{\mu}^2 \alpha \cdot \eta_{\mu}^2 \beta + \sigma_{\nu}^2 \alpha = 1$

70.Ν' αποδείξετε ότι: α) $\sin^2 x \cdot \varepsilon\varphi^2 x + \sin^2 x = 1$

β) $\frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{1 + \varepsilon\varphi x} = \sigma\upsilon\nu x$

71.Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α) $\eta\mu 50^\circ \cdot \eta\mu 130^\circ - \sigma\upsilon\nu 50^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 130^\circ$ β) $\eta\mu^2 14^\circ + \eta\mu^2 114^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 166^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 66^\circ$

2.4. Νόμος των ημιτόνων - Νόμος των συνημιτόνων

70.Να διατυπώσετε το νόμο των ημιτόνων.

Απάντηση

Οι πλευρές κάθε τριγώνου είναι ανάλογες προς τα ημίτονα των απέναντι γωνιών του.

71.Να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$

Απάντηση

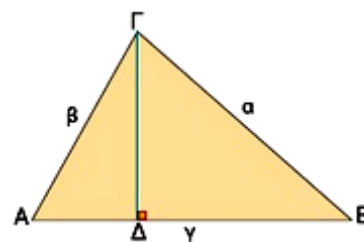
Έστω το οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ το ύψος του. Τότε στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ έχουμε:

$$\eta\mu B = \frac{A\Delta}{\gamma} \text{ ή } A\Delta = \gamma \cdot \eta\mu B \text{ (1) και}$$

$$\eta\mu \Gamma = \frac{A\Delta}{\beta} \text{ ή } A\Delta = \beta \cdot \eta\mu \Gamma \text{ (2).}$$

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $\gamma \cdot \eta\mu B = \beta \cdot \eta\mu \Gamma$ ή $\frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = \frac{\beta}{\eta\mu B}$.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι και $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B}$.



72.Να αποδείξετε ότι σε κάθε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$

Απάντηση

Έστω ΓΔ το ύψος του οξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΓ

έχουμε: $\alpha^2 = \Delta\Gamma^2 + \Delta B^2$ (1)

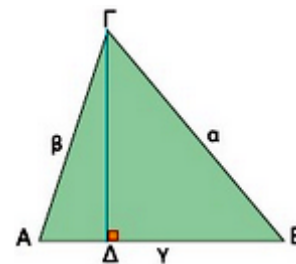
Επειδή $\Delta B = \gamma - A\Delta$ η ισότητα (1) γίνεται:

$$\alpha^2 = \Delta\Gamma^2 + (\gamma - A\Delta)^2 = \Delta\Gamma^2 + \gamma^2 - 2\gamma \cdot A\Delta + A\Delta^2 \text{ (2)}$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$$\Delta\Gamma^2 + A\Delta^2 = \beta^2 \text{ και } \sigma\upsilon\nu A = \frac{A\Delta}{\beta} \text{ ή } A\Delta = \beta\sigma\upsilon\nu A.$$

Η (2) γίνεται: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$



Βασικές ασκήσεις

72.Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ, όταν:

α) $\alpha = 2, \beta = \sqrt{2}$ και $B = 30^\circ$ β) $\beta = \sqrt{2}, \gamma = \sqrt{3}$ και $\Gamma = 60^\circ$

73.Να υπολογίσετε τις ίσες πλευρές β, γ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, αν $A = 120^\circ$ και $\alpha = 3\sqrt{3}$.

Επαναληπτικές ασκήσεις

74. Δίνονται οι παραστάσεις $A = (x+1)^2 - 2(x-1)^2 + (x+2)^2 - 5(2x+1)$ και

$$B = 2(x+1)(1-x) - (x+1)^2 + (x-1)^2 - 2$$

α) Να αποδείξετε ότι $A = -2$ και $B = -2x^2 - 4x$

β) Να λύσετε την εξίσωση $A - B + 4 = 0$

75. α) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις: $A = x^3 - 9x + x^2 - 9$ και $B = x^2 - 3x$

β) Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\frac{A}{B}$

76. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{x}{x-6}$, $B = \frac{x}{x-4}$ και $\Gamma = \frac{11}{x^2 - 10x + 24}$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 - 10x + 24$.

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις A, B, Γ .

γ) Να λύσετε την εξίσωση $2A + B + \Gamma = 0$

77. Δίνονται οι παραστάσεις $A = (x-1)^2 - 4$ και $B = x^2 + 2x + 1$.

α) Να παραγοντοποιήσετε τα A και B .

β) Να απλοποιήσετε τη παράσταση $\Gamma = \frac{A}{B}$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $\Gamma + 3 = x$

78. Δίνονται οι παραστάσεις $A = (2x-1)(x-3)^2 - 9(2x-1)$ και $B = 4x^4 - (2x^2 - 1)^2$

α) Να παραγοντοποιήσετε τα A και B .

β) Να απλοποιήσετε τη παράσταση $\frac{A}{B}$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $\frac{A}{B} = -\frac{5}{2x+1}$

79. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x+2}{x} - \frac{3}{x+2} = \frac{6}{x^2+2x}$

80. Να βρείτε τις τιμές του αριθμού λ για τις οποίες η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ έχει ως προς x λύση το 1.

81. Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} \frac{x+1}{3} - \frac{y}{4} = 1 \\ \frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 2 \end{cases}$$

82. Αν το σύστημα $\begin{cases} 2x + 3y = 3\alpha + \beta \\ x - 2y = \alpha + 2\beta \end{cases}$ έχει λύση το ζεύγος $(x, y) = (2, 3)$, να βρείτε τα α, β .

83. Δίνεται η ευθεία $3x - 5y = \lambda - 4$.

α) Να βρείτε τον αριθμό λ για τον οποίο η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Για $\lambda = 4$ να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 3x - y = \lambda \\ x + 3y = \lambda + 3 \end{cases}$

84. Έστω α η θετική ρίζα της εξίσωσης $x^2 = x$ και β η αρνητική ρίζα της εξίσωσης

$$\frac{x}{x-2} = \frac{x+2}{3}$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = -1$

β) Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} 2x + \beta y = -3 \\ x - 2\alpha y = \alpha + \beta \end{cases}$$

85. Να βρείτε τον αριθμό λ για τον οποίο το σημείο $(\lambda - 1, \lambda)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της παραβολής $y = x^2 - 5x + 6$.

86. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και AM η διάμεσος του. Φέρνω την $B\Delta$ κάθετη στην AM και τη ΓE κάθετη στην AM . Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $\Gamma E M$ είναι ίσα.

87. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Στις πλευρές $A\Gamma$ και $B\Gamma$ παίρνουμε τμήματα $\Gamma\Delta$ και ΓE αντίστοιχα έτσι, ώστε $\Gamma\Delta = \Gamma E$. Αν Z σημείο της διχοτόμου ΓH να δείξετε ότι:

α) $Z\Delta = ZE$

β) Οι αποστάσεις του Z από τις πλευρές $A\Gamma$ και $B\Gamma$ είναι ίσες.

88. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Φέρνουμε το ύψος AE και πάνω σ' αυτό παίρνουμε τυχαίο σημείο Z . Να δείξετε ότι

α) Τα τρίγωνα BZE , ΓEZ είναι ίσα.

β) Τα τρίγωνα AZB , $AZ\Gamma$ είναι ίσα.

γ) Η ZE είναι διχοτόμος της γωνίας $BZ\Gamma$.

89. Στην προέκταση της βάσης $B\Gamma$ ενός ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ να πάρετε σημεία Δ , E , ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι:

α) ΔDE τρίγωνο ισοσκελές

β) $BK = \Gamma\Lambda$ όπου $BK \perp A\Delta$ και $\Gamma\Lambda \perp AE$

γ) $A\Lambda + \Delta K = A\Delta$

90. Να σχεδιάσετε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$ και να φέρετε το ύψος του $A\Delta$.

α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια.

β) Να γράψετε τις ισότητες των λόγων που προκύπτουν και να δείξετε ότι $AB \cdot A\Gamma = B\Gamma \cdot A\Delta$

γ) Αν επιπλέον είναι $A\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$ να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

91. Έστω οξεία γωνία ω για την οποία γνωρίζουμε ότι $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$. Να βρείτε:

α) Το $\sigma\upsilon\nu\omega$ και την $\epsilon\phi\omega$.

β) Τη τιμή της παράστασης $A = \frac{\eta\mu(180^\circ - \omega)}{\epsilon\phi(180^\circ - \omega)\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega)}$

92. Να αποδείξετε ότι $(3\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu x)^2 + (4\eta\mu x - 3\sigma\upsilon\nu x)^2 = 25$