ΟΡΙΣΜΟΣ 1

Μια συνάρτηση $f:A\to\Re$ **λέγεται συνάρτηση** 1-1, **όταν για οποιαδήποτε** $x_1,x_2\in A$ **ισχύει η συνεπαγωγή: αν** $x_1\neq x_2$, **τότε** $f(x_1)\neq f(x_2)$**.**

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 (Ισοδύναμος ορισμός που χρησιμεύει σε ασκήσεις)

Μια συνάρτηση $f:A\to\Re$ **είναι συνάρτηση** 1-1, **αν και μόνο αν για οποιαδήποτε** $x_1,x_2\in A$ **ισχύει η συνεπαγωγή: αν** $f(x_1)=f(x_2)$, **τότε** $x_1=x_2$ **.**

Παρατηρήσεις.

1. **Όταν μία συνάρτηση είναι 1-1, λέμε ότι είναι αντιστρέψιμη, δηλαδή ορίζεται η αντίστροφη της συνάρτηση.**
2. **Αν μία συνάρτηση είναι 1-1, τότε οποιαδήποτε οριζόντια ευθεία τέμνει την γραφική της παράσταση το πολύ σε ένα σημείο.**
3. **Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη τότε είναι συνάρτηση** 1-1.
   Το αντίστροφο ΔΕΝ ισχύει. Δηλαδή αν μία συνάρτηση είναι 1-1, **δεν είναι αναγκαστικά και γνησίως μονότονη.**

- **ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ**

Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι 1-1 **υπάρχουν τρεις τρόποι:**

1. **Με τον ορισμό 1: ξεκινάμε έστω** $x_1\neq x_2$ **και καταλήγουμε** $f(x_1)\neq f(x_2)$.

   (ο τρόπος αυτός δεν ενδείκνυται για συναρτήσεις που έχουν προκύψει με πρόσθεση – αφαίρεση – πολλαπλασιασμό και διαίρεση βασικών συναρτήσεων, ΓΙΑΤΙ;)

2. **Με τον ορισμό 2: Υποθέτουμε ότι** $f(x_1)=f(x_2)$ **και καταλήγουμε** $x_1=x_2$, οπότε συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση είναι 1-1.

3. **Αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη άρα και** 1-1**.**

- **ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:**

ΑΣΚΗΣΗ 1 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^5 - 4$ είναι $1 - 1$.

<u>Λύση:</u>

1ος τρόπος: (ΟΡΙΣΜΟΣ 2)

Καταρχήν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι A=R.
Έστω $x_1, x_2 \in \Re$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^5 - 4 = x_2^5 - 4 \Rightarrow x_1^5 = x_2^5 \Rightarrow x_1 = x_2$.

άρα η συνάρτηση είναι 1-1.

2ος τρόπος: (Μονοτονία-ορισμό)

Έστω $x_1, x_2 \in \Re$ με

$x_1 < x_2$ τότε $x_1^5 < x_2^5 \Rightarrow x_1^5 - 4 < x_2^5 - 4 \Rightarrow (f(x_1) < f(x_2))$

άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο R, άρα είναι και 1-1.

1.3.18(25) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{e^x - 2}{e^x + 2}$ είναι 1-1 στο $\Re$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Re$ με $f(x_1) = f(x_2) = \dfrac{e^{x_1} - 2}{e^{x_1} + 2} = \dfrac{e^{x_2} - 2}{e^{x_2} + 2} \Rightarrow (e^{x_1} - 2)(e^{x_2} + 2) =$
$(e^{x_2} - 2)(e^{x_1} + 2) = \ldots \Rightarrow x_1 = x_2$ **άρα η συνάρτηση είναι 1-1.**
1.3.22 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + x - 2$ είναι 1-1.

<u>Λύση</u>:

Μόνον με τον 3ο τρόπο: Αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα άρα και $1 - 1$.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ f^{-1}

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ 1</u>

Έστω μια συνάρτηση $f:A \to \Re$ η οποία είναι 1-1. Ορίζουμε αντίστροφη συνάρτηση της f και συμβολίζουμε f^{-1} την συνάρτηση με πεδίο ορισμού f(A) (το σύνολο τιμών της f) τέτοια ώστε σε κάθε y=f(x) που ανήκει στο f(A) να αντιστοιχεί το xεA.

Δηλαδή $\boldsymbol{x=f^{-1}(y)}$.

Παρατηρήσεις:

1. Το Πεδίο Ορισμού της f είναι το Σύνολο Τιμών της f^{-1} και

το Σύνολο Τιμών της f είναι το Πεδίο Ορισμού της f^{-1}.

2. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι

συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

ΓΙΑ ΝΑ ΒΡΟΥΜΕ ΤΗΝ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ f^{-1} **ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ** f:

- Αποδεικνύουμε ότι η f είναι συνάρτηση 1 – 1
- Θέτουμε f(x) = y και λύνουμε ως προς x.
- Αντικαθιστούμε όπου $\boldsymbol{x=f^{-1}(y)}$ και βρίσκουμε τον τύπο της αντίστροφης.
- Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης.

➢ ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ 1. ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Α. ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΕΡΙΤΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ:

Εάν ν περιττός φυσικός αριθμός, τότε η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$ άρα και 1 – 1. Η αντίστροφη συνάρτηση είναι δίκλαδη:

$x=\sqrt[\nu]{y}$, όταν $y \geq 0$ και $x=-\sqrt[\nu]{-y}$, όταν $y<0$.

Δηλαδή: $x=f^{-1}(y)=\begin{cases} \sqrt[\nu]{y}, & y\geq 0 \\ -\sqrt[\nu]{-y}, & y<0 \end{cases}$. Δηλαδή:

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} \sqrt[\nu]{x}, & x\geq 0 \\ -\sqrt[\nu]{-x}, & x<0 \end{cases}$$

Το πεδίο ορισμού καθώς και το σύνολο τιμών της f και της f^{-1} είναι το $\Re$.

Δηλαδή η αντίστροφη της f(x) = x³ είναι η $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}, & x\geq 0\\ -\sqrt[3]{-x}=-(-x)^{\frac{1}{3}}, & x<0\end{cases}$

Β. ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΑΡΤΙΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Εάν ν άρτιος φυσικός αριθμός, τότε η συνάρτηση $f(x) = x^{\nu}$ δεν είναι συνάρτηση 1 -1 στο ευρύτερο πεδίο ορισμού τους το $\Re$.
Μόνον αν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της η παραπάνω συνάρτηση έχει αντίστροφη, δηλαδή:

Εάν $x \geq 0$ τότε $x=\sqrt[\nu]{y}$ με $y \geq 0$, οπότε $x=f^{-1}(y)=\sqrt[\nu]{y}$ με $y \geq 0$
Δηλαδή: $f^{-1}(x)=\sqrt[\nu]{x}$ με $x \geq 0$.

παράδειγμα:

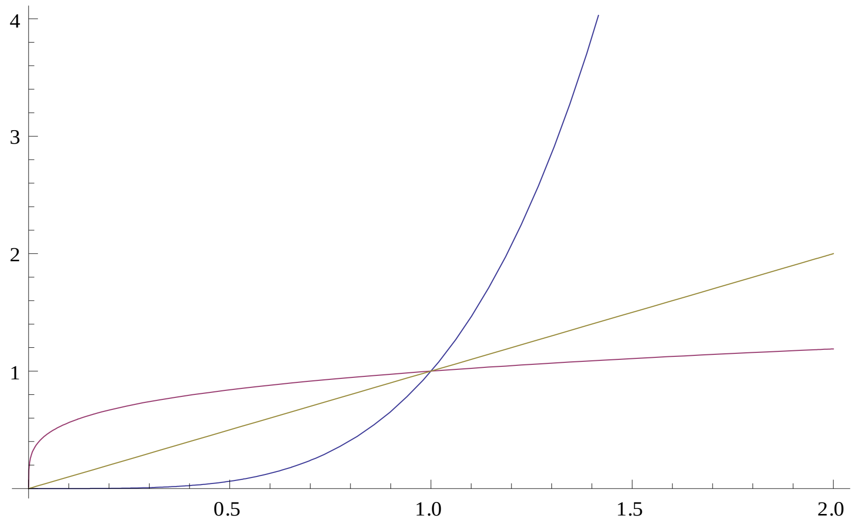
Έστω $f(x)= x^4$ με $x \geq 0$, να βρεθεί η αντίστροφη.

Η συνάρτηση είναι 1 – 1 για $x \geq 0$ αφού είναι γνησίως αύξουσα για $x \geq 0$.

Από την εξίσωση $y = x^4$ λύνοντας ως προς x προκύπτει: $x=\sqrt[4]{y}$ με $y \geq 0$

άρα $f^{-1}(y)=\sqrt[4]{y}$ με $y \geq 0$.

Μετατρέποντας την ανεξάρτητη μεταβλητή σε x προκύπτει: $f^{-1}(x)=\sqrt[4]{x}$ με $x \geq 0$.



Εάν $x \leq 0$ τότε $x = -\sqrt[\nu]{y}$ με $y \geq 0$, οπότε $x = f^{-1}(y) = -\sqrt[\nu]{y}$ με $y \geq 0$

Δηλαδή: $f^{-1}(x) = -\sqrt[\nu]{x}$ με $x \geq 0$.

Παράδειγμα:

Έστω f(x)= x^4 με $x \leq 0$, να βρεθεί η αντίστροφη.

Η συνάρτηση είναι 1 – 1 για $x \leq 0$ αφού είναι γν. φθίνουσα για $x \leq 0$.

Από την εξίσωση y = x^4 λύνοντας ως προς x προκύπτει: $x = -\sqrt[4]{y}$ με $y \geq 0$

άρα $f^{-1}(y) = -\sqrt[4]{y}$ με $y \geq 0$.

Μετατρέποντας την ανεξάρτητη μεταβλητή σε x προκύπτει: $f^{-1}(x) = -\sqrt[4]{x}$ με $x \geq 0$.

➢ ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ 2. ΑΡΡΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt[\nu]{x}$ με $x \geq 0$ έχει αντίστροφη $f^{-1}(x)=x^{\nu}$, με $x \geq 0$.

Παράδειγμα: Να βρεθεί η αντίστροφη της συνάρτησης: $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ με $x \geq 1$.

Λύση:
Η συνάρτηση είναι 1 – 1 (αποδεικνύεται και με τους τρεις τρόπους)

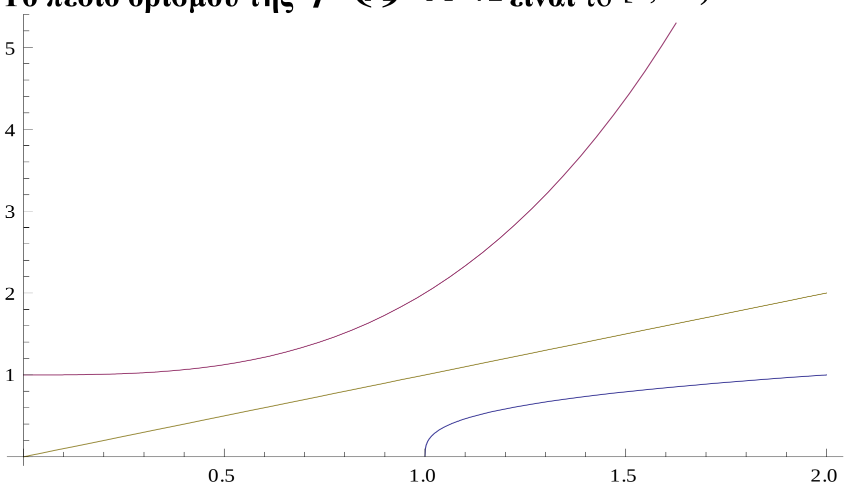
θέτουμε $y=f(x)$ και λύνουμε ως προς x:

$y=\sqrt[3]{x-1}$ με $y \geq 0$,
υψώνουμε και τα δύο μέλη εις την τρίτη, αφού έχουμε πάρει το περιορισμό ως προς y.

$x-1=y^3 \Rightarrow x=y^3+1$ με $y \geq 0$, άρα η αντίστροφη $f^{-1}(y)=y^3+1$, με $y \geq 0$.

Δηλαδή: $f^{-1}(x)=x^3+1$, με $x \geq 0$.

Το πεδίο ορισμού της $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ είναι το $A=[1,+\infty)$
Το σύνολο τιμών της $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ είναι $f(A)=[0,+\infty)$
Το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)=x^3+1$ είναι το $[0,+\infty)$



➢ ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ 3. ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ – ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ

Η συνάρτηση $f(x)=e^x$ έχει πεδίο ορισμού το $\Re$ και σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$

είναι συνάρτηση 1 – 1 αφού είναι γν. αύξουσα στο $\Re$ άρα έχει αντίστροφη συνάρτηση:

$y=e^x \Leftrightarrow x=\ln y$ με $y>0$, άρα η αντίστροφη: $f^{-1}(y)=\ln y$ με $y>0$,

δηλαδή $f^{-1}(x)=\ln x$ με πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$ και σύνολο τιμών το $\Re$.

Παρατηρείστε ότι από τη γραφική παράσταση αποδεικνύεται ότι η γραφική παράσταση της εκθετικής $f(x)=e^x$ βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της ευθείας y = x. Δηλαδή:

$e^x > x$ **για κάθε πραγματική τιμή του x** $\Leftrightarrow e^x - x > 0, \forall x \in \Re$.

Παράδειγμα

Να βρεθεί η αντίστροφη της συνάρτησης $f(x)=\ln(x-2)+1$ με $x>2$.

Λύση:

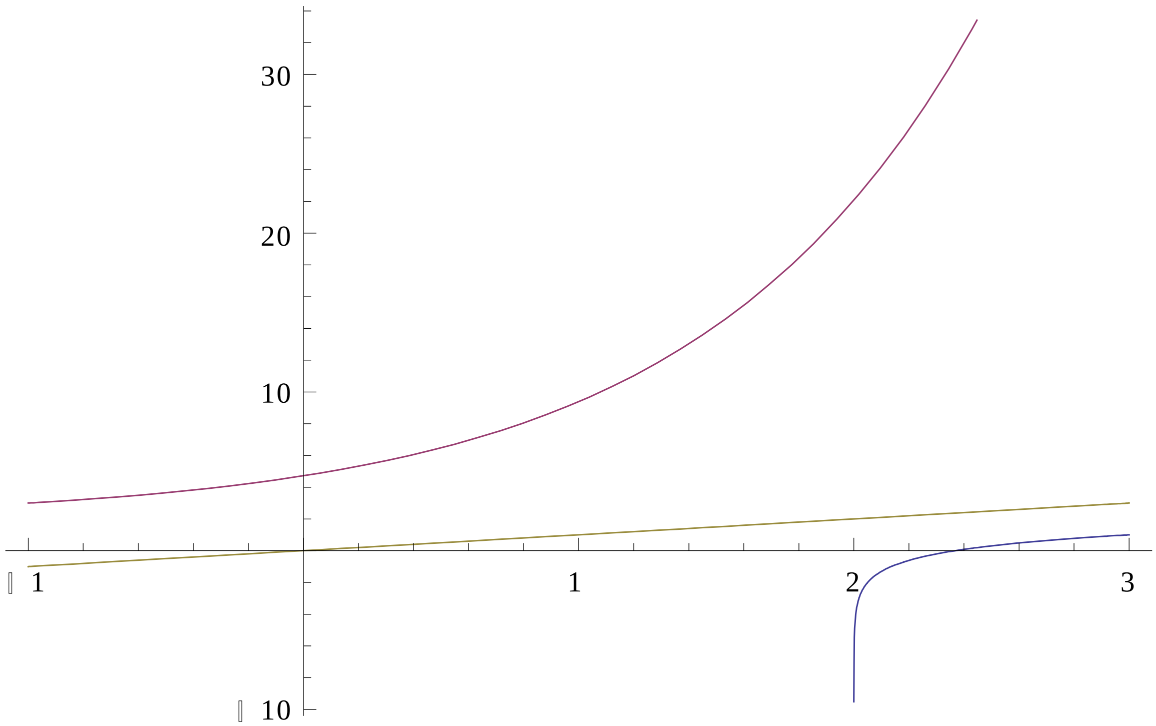
Η συνάρτηση είναι 1 – 1 (αποδεικνύεται και με τους τρεις τρόπους)

έστω $y=\ln(x-2)+1 \Leftrightarrow \ln(x-2)=y-1 \Leftrightarrow x-2=e^{y-1} \Leftrightarrow x=e^{y-1}+2$

Οπότε η αντίστροφη $f^{-1}(y)=e^{y-1}+2$ με $y\in\Re$, δηλαδή:

$f^{-1}(x)=e^{x-1}+2$, με $x\in\Re$.

(Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης και της αντίστροφής της). Η γραφική τους παράσταση είναι:


30
20
10
10
1
1
2
3

➢ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.3.16 Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις θεωρίας:

(i) Έστω μια συνάρτηση $f: A \to \Re$. Πότε λέγεται **συνάρτηση** $\mathbf{1-1}$;
(ii) Με ποιους τρόπους αποδεικνύουμε ότι μία συνάρτηση είναι $\mathbf{1-1}$;
(iii) Να αναφέρεται ποιες από τις βασικές συναρτήσεις είναι συναρτήσεις $\mathbf{1-1}$, στο ευρύτερο πεδίο ορισμού τους.

1.3.17 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος:

(i) Μια συνάρτηση f είναι $\mathbf{1-1}$, αν και μόνο αν: Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της συνάρτησης η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.
(ii) Μια συνάρτηση f είναι $\mathbf{1-1}$, αν και μόνο αν : Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη.
(iii) Μια συνάρτηση f είναι $\mathbf{1-1}$, αν και μόνο αν: κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f ακριβώς σε ένα σημείο.
(iv) Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε προφανώς, είναι συνάρτηση "1−1".
(v) Αν μια συνάρτηση είναι "1−1", τότε προφανώς, είναι γνησίως μονότονη.
(vi) Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α και f^{-1} η αντίστροφή της. Τότε ισχύει: $f^{-1}(f(x))=x, \quad x \in A$ $\quad f(f^{-1}(y))=y, \ y \in$
(vii) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

1.3.18 Αφού αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι 1-1, να βρεθεί η αντίστροφη καθώς και το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f και f^{-1}:

1) $f(x)=2x-4$
2) $f(x)=(x-2)^2$, με $x \geq 2$
3) $f(x)=(x-2)^2$, με $x \leq 2$
4) $f(x)=(x-2)^2+1$, με $x \geq 2$
5) $f(x)=(x-2)^2+1$, με $x \leq 2$
6) $f(x)=x^3+1$
7) $f(x)=(x-2)^3$
8) $f(x)=(x-2)^3+3$
9) $f(x)=(x+4)^4+3$, με $x \geq -4$
10) $f(x)=(x+4)^4+3$, με $x \leq -4$
11) $f(x)=(x+1)^5-2$
12) $f(x)=\sqrt{x}$, με $x \geq 0$
13) $f(x)=\sqrt{x-4}$, με $x \geq -4$
14) $f(x)=-\sqrt{x-1}+3$, με $x \geq 1$
15) $f(x)=-\sqrt{x+3}+5$ με $x \geq -3$
16) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, με $x \geq 0$
17) $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$, με $x \geq 1$
18) $f(x)=-\sqrt[3]{x+1}-5$, με $x \geq -1$
19) $f(x)=e^{-x+1}+2$, με $x \in \Re$
20) $f(x)=-e^{x}+4$, με $x \in \Re$
21) $f(x)=e^{x-1}+6$, με $x \in \Re$
22) $f(x)=1-\ln(x-2)+3$, με $x > 2$

23) $f(x)=-\ln(1-x)+2$, με $x<1$

24) $f(x)=\ln(e^{x}+1)$, με $x\in\Re$

25) $f(x)=\dfrac{e^{x}-2}{e^{x}+2}$, με $x\in\Re$

26) $f(x)=\sqrt{2+\sqrt{1-x}}$, με $x\le 1$

27) $f(x)=\sqrt{5+\sqrt{x+2}}$, με $x\ge -2$

28) $f(x)=1-2\ln(x+1)$, με $x>-1$

29) $f(x)=\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}$, με $x\in\Re$

30) $f(x)=3x^{3}-2$, με $x\in\Re$

31) $f(x)=x^{2}+1$, με $x\ge 0$

32) $f(x)=-x^{4}+1$, με $x\le 0$

33) $f(x)=3-5\sqrt{7-x}$, με $x\le 7$

34) $f(x)=\sqrt{e-e^{x}}$, με $x\le 1$

35) $f(x)=3-\sqrt{1-\ln x}$, με $0<x\le e$.