

6^ο ΛΥΚΕΙΟ ΒΟΛΟΥ

Άλγεβρα

A-ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

12

ΘΕΜΑΤΑ

ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΙΟΥΝΙΟΥ

Οδηγίες για τις εξετάσεις των μαθητών της Α Λυκείου και πως θα βαθμολογηθούν τα θέματα.

Άλγεβρα και Γεωμετρία

Οι γραπτές προαγωγικές εξετάσεις στην Άλγεβρα και Γεωμετρία γίνονται ως εξής:

1. Στους μαθητές δίνονται τέσσερα (4) θέματα από την εξεταστέα ύλη, με τα οποία ελέγχεται η γνώση εννοιών και ορολογίας, η δυνατότητα αναπαραγωγής γνωστικών στοιχείων, η ικανότητα εκτέλεσης γνωστών αλγορίθμων, η ικανότητα του μαθητή να αναλύει, να συνθέτει και να επεξεργάζεται δημιουργικά ένα δεδομένο υλικό, καθώς και η ικανότητα επιλογής και εφαρμογής κατάλληλης μεθόδου.

2. Τα τέσσερα θέματα που δίνονται στους μαθητές διαρθρώνονται ως εξής:

α. Το πρώτο θέμα αποτελείται από δύο μέρη.

Το πρώτο μέρος περιέχει πέντε (05) ερωτήσεις αντικειμενικού τύπου (πολλαπλής επιλογής, Σωστού -Λάθους, αντιστοίχισης) με τις οποίες ελέγχεται η γνώση και η κατανόηση των βασικών εννοιών και των σπουδαιότερων συμπερασμάτων της θεωρίας σε όσο το δυνατόν ευρύτερη έκταση της εξεταστέας ύλης.

Στο δεύτερο μέρος ζητείται η απόδειξη μίας απλής πρότασης (ιδιότητας, λήμματος, θεωρήματος ή πορίσματος), που είναι αποδεδειγμένη στο σχολικό εγχειρίδιο.

β. Το δεύτερο θέμα αποτελείται από μία άσκηση που είναι εφαρμογή ορισμών, αλγορίθμων ή προτάσεων (ιδιοτήτων, θεωρημάτων, πορισμάτων).

γ. Το τρίτο θέμα αποτελείται από μία άσκηση που απαιτεί από τον μαθητή ικανότητα συνδυασμού και σύνθεσης εννοιών και αποδεικτικών ή υπολογιστικών διαδικασιών.

δ. Το τέταρτο θέμα αποτελείται από μία άσκηση ή ένα πρόβλημα που η λύση του απαιτεί από τον μαθητή ικανότητες συνδυασμού και σύνθεσης γνώσεων, αλλά και την ανάληψη πρωτοβουλιών για την ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσής του.

Το δεύτερο, τρίτο και τέταρτο θέμα μπορούν να αναλύονται σε επιμέρους ερωτήματα που διευκολύνουν τον μαθητή στη λύση.

3. Η βαθμολογία κατανέμεται ανά εικοσιπέντε (25) μονάδες στο καθένα από τα τέσσερα (4) θέματα.

Ειδικότερα,

στο πρώτο θέμα το πρώτο μέρος βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες, ενώ το δεύτερο μέρος βαθμολογείται με δεκαπέντε (15) μονάδες.

Στο δεύτερο, τρίτο και τέταρτο θέμα η κατανομή της βαθμολογίας στα επιμέρους ερωτήματα μπορεί να διαφοροποιείται ανάλογα με το βαθμό δυσκολίας τους και καθορίζεται στη διατύπωση των θεμάτων.

4. Το δεύτερο και το τέταρτο θέμα λαμβάνονται με κλήρωση από την τράπεζα θεμάτων.

1

Θέμα 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

- i. Η εξίσωση $3x = 0$ είναι αδύνατη.
- ii. Ισχύει: $\sqrt{(-2)^2} = -2$
- iii. Η εξίσωση $x^2 + x - \lambda^2 = 0$ έχει πάντα δυο ρίζες άνισες
- iv. $|x^2 + 1| = x^2 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- v. Οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν: $\beta^2 = \alpha + \gamma$.

B. Να δείξετε ότι: $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Θέμα 2^ο

α) Να λυθεί η ανίσωση: $3x - 7 > x + 1$ (1)

β) Να λυθεί η ανίσωση: $|x - 2| < 3$ (2)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2).

Θέμα 3^ο

Δίνεται η ευθεία (ε): $y = (4 - \lambda^2) \cdot x + 2\lambda + 4$

A. Για ποιες τιμές του λ η (ε) σχηματίζει οξεία γωνία;

B. Αν $\lambda = 1$

- i) Να εξετάσετε ποιο από τα σημεία : $A(-3, -15), B(3, 15)$ είναι σημείο της ευθείας (ε)
- ii) Να βρείτε σε ποια σημεία η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες.

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση : $x^2 + \lambda x + \lambda - 1 = 0$ με $\lambda \neq 2$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πάντοτε δύο πραγματικές και άνισες ρίζες : x_1, x_2 .

β) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

$$x_1 + x_2,$$
$$x_1 \cdot x_2,$$
$$x_1 \cdot x_2^2 + x_1^2 \cdot x_2$$

γ) Να βρεθεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει η σχέση : $3x_1 + 3x_2 = x_1^2 \cdot x_2^2 - 2\lambda - 3$

2

Θέμα 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

α) $d(a, \beta) = |a - \beta|$ όπου $d(a, \beta)$ η απόσταση δύο αριθμών a και β .

β) $|a| \geq a$ και $|a| \geq -a$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

γ) Αν $\Delta > 0$ τότε: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = (x - x_1)(x - x_2)$ όπου x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου.

δ) Ισχύει: $|a| + |\beta| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ή $\beta = 0$

ε) Οι αριθμοί a, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου όταν $\frac{\beta}{a} = \frac{\gamma}{\beta}$

B. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$. Να αποδείξετε ότι:

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Θέμα 2^ο

A) Να λυθεί η εξίσωση: $|x - 2| + 2 = 14 - 2|x - 2|$

B) Να λυθεί η ανίσωση: $2|x - 1| - 4 \geq 0$

Γ) Να βρεθούν οι κοινές λύσεις της εξίσωσης και ανίσωσης.

Δ) Δίνεται η ευθεία: (ε): $y = (\kappa + \lambda) \cdot x + 2014$, όπου κ, λ οι κοινές λύσεις του ερωτήματος (Γ) με $\kappa < \lambda$.

Τι είδους γωνία σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα $x'x$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Θέμα 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 3}{x^2 - 9}$

A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

B) Να απλοποιηθεί ο τύπος της συνάρτησης

Γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (\lambda - 3)x - \lambda - 1 = 0$ (1) με $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι: $\lambda^2 - 2\lambda + 13 > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

γ) Να βρεθεί ο λ αν γνωρίζετε ότι:

$$4|x_1 + x_2| - 15 = |x_1 \cdot x_2 + 4| \text{ όπου } x_1, x_2 \text{ οι ρίζες της (1)}$$

Θέμα 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος.

- i. $\sqrt{a^2} = a$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$
- ii. Αν $a > 0$ και $\beta > 0$ τότε ισχύει: $\sqrt{a+\beta} = \sqrt{a} + \sqrt{\beta}$
- iii. Η εξίσωση $x^2 + 4x - 4\kappa^2 = 0$ έχει πάντα δυο ρίζες άνισες
- iv. $|a - \beta| = |\beta - a|$ για κάθε $a, \beta \in \mathbb{R}$
- v. Οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν: $\beta + \alpha = \gamma - \beta$.

B. Να αποδείξετε ότι : για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ισχύει : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Θέμα 2^ο

Δίνονται με περιγραφή τα σύνολα :

$$A = \{x \in \mathbb{Z} / |x - 1| \leq 2\} \text{ και } B = \{x \in \mathbb{Z} / (x + 2) \cdot (x^2 - 2x - 3) = 0\}.$$

Να βρείτε με αναγραφή :

- | | |
|--------------------------------|-------------------------------|
| A. Το σύνολο A . | B. Το σύνολο B . |
| Γ. Το σύνολο $A \cap B$ | Δ. Το σύνολο $A - B$. |

Θέμα 3^ο

Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - \lambda x - 4 = 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πάντοτε δύο πραγματικές και άνισες ρίζες : x_1, x_2 .
- β) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις : $x_1 + x_2$ και $x_1 \cdot x_2$.
- γ) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε οι ρίζες της εξίσωσης να είναι αντίθετες.

Θέμα 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = (\alpha - 3)x + 4$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

A). Να βρεθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$, αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο M(1,6).

B). Για $\alpha = 5$ τότε:

- I) Να λυθεί η ανίσωση: $|f(x)| < 6$.
- II) Να λυθεί η εξίσωση: $|f(x)| + |x^2 - 4| = 0$.

Θέμα 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις :

- i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|x^2| = x^2$
- ii. Αν $a < b$ και $\gamma < 0$ τότε $a\gamma < b\gamma$
- iii. Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς αν $\Delta \geq 0$
- iv. Η εξίσωση $x^\nu = a$ με $a < 0$ και ν άρτιος φυσικός αριθμός είναι αδύνατη
- v. Ισχύει: $|-x| = -|x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα **A** και **A'** ισχύει: $P(A') = 1 - P(A)$

Θέμα 2^ο

Έστω **A**, **B** δύο ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω για τα οποία είναι :

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{2}{5} \quad \text{και} \quad P(A \cup B) = \frac{4}{5}.$$

Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

K: «πραγματοποιείται το **A** και το **B**»

L: «δεν πραγματοποιείται το **A**»

M: «πραγματοποιείται μόνο το **B**»

N: «δεν πραγματοποιείται κανένα από τα **A** και **B**».

Θέμα 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \frac{\sqrt{25-x^2}}{|x-2|-3}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(3) = -2$

β) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

γ) Να λύσετε την εξίσωση : $x^4 + x^2 + f(3) = 0$

Θέμα 4^ο

Δίνεται το τριώνυμο : $f(x) = x^2 - 2x + |\lambda - 1|$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

I) Ναδειχθεί ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta = 4(1 - |\lambda - 1|)$.

II) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ρίζα διπλή;

III) Για ποιές τιμές του λ ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$;

IV) Για $\lambda = 2$ να λυθεί η ανίσωση : $\frac{(4-x^2) \cdot f(x)}{(1-x)^2} \leq 0$.

Θέμα 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις :

α. $|-α| = -|α|$ όπου $α ∈ ℝ$.

β. $\sqrt[μ]{α} \cdot \sqrt[ν]{α} = \sqrt[μν]{α}$ όπου $α ≥ 0$ και $μ, ν ∈ ℕ$ με $μ, ν > 1$.

γ. Η ευθεία με εξίσωση $y = αx + β$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, β)$.

δ. Το γινόμενο των ριζών x_1, x_2 μιας εξίσωσης $αx^2 + βx + γ = 0, α ≠ 0$

δίνεται από τον τύπο $P = \frac{γ}{α}$.

ε. Οι αριθμοί $α, β, γ$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν: $\frac{β}{α} = \frac{γ}{β}$.

B. Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου $Ω$ με $A ⊆ B$, να αποδείξετε ότι $P(A) ≤ P(B)$.

Θέμα 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4$.

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

B. Να βρεθεί η τιμή: $f(1)$

Γ. Έστω το σημείο $A(1, f(1))$. Να βρείτε το συμμετρικό του:

α) ως προς τον άξονα $x'x$.

β) ως προς τον άξονα $y'y$

γ) ως προς την αρχή των αξόνων.

Θέμα 3^ο

Ένα θέατρο έχει 15 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 60 θέσεις και στη τελευταία 18 θέσεις. Αν το πλήθος των θέσεων ελαττώνεται από σειρά σε σειρά κατά τον ίδιο πάντα αριθμό θέσεων, να βρείτε:

I) τον αριθμό των θέσεων που ελαττώνεται από σειρά σε σειρά.

II) τον αριθμό των θέσεων της μεσαίας σειράς.

III) τον αριθμό όλων των θέσεων του θεάτρου.

IV) Τον αριθμό των θέσεων από την 5^η σειρά έως την 13^η σειρά.

Θέμα 4^ο

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος με έκτο όρο $α_6 = -5$ και $α_{21} = 55$.

A. Να βρεθεί η διαφορά $ω$.

B. Να υπολογίσετε τον όρο $α_4$ και το άθροισμα S_5 των πέντε πρώτων όρων της.

Γ. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $f(x) = \sqrt{α_4 x^2 + (S_5 - 8)x - 1}$

Θέμα 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις :

- α).** $|\alpha| \geq 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.
- β)** Για κάθε πραγματικό αριθμό a ισχύει: $\sqrt{a^v} = a$.
- γ)** Για κάθε πραγματικό αριθμό a ισχύει: $a > -1 \Rightarrow a + 2 > 0$.
- δ)** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ αν και μόνο αν ισχύει η ισότητα: $f(x_0) = y_0$.
- ε)** Τα σημεία $A(2, \sqrt[3]{27})$ και $B(3, \sqrt[4]{16})$ είναι συμμετρικά ως προς την διχοτόμο του α' και γ' τεταρτημορίου των αξόνων.

B. Να δείξετε ότι: Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Θέμα 2^ο

Δίνεται η συνάρτησης: $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$

I. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης.

II. Να βρεθεί η τιμή: $f(1)$

III. Να λυθεί η ανίσωση: $f(1) \cdot x + 10 < 2$.

Θέμα 3^ο

Οι αριθμοί $\alpha = x - 3$, $\beta = 1 - 2x$, $\gamma = 3x - 11$ ($x \in \mathbb{R}$) με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_v)

I. Να βρείτε ο X

II. Για $x = 2$ να υπολογίσετε τους αριθμούς α, β, γ

III. Αν ο αριθμός α είναι ο 4^{05} όρος της αριθμητικής προόδου (α_v) να βρείτε

α. τον πρώτο όρο α_1

β. το άθροισμα των είκοσι πρώτων όρων της S_{20} .

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση δευτέρου βαθμού: $x^2 + (\mu - 1)x + 1 = 0$ (1) όπου $\mu \in \mathbb{R}$.

I. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = \mu^2 - 2\mu - 3$.

II. Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες.

III. Να βρείτε την τιμή του μ ώστε το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης να είναι 4.

IV. Για $\mu = -3$ να λύσετε την εξίσωση.

Θέμα 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις :

I) Η εξίσωση $x^v = a$ με $a < 0$ και v περιττό φυσικό αριθμό είναι αδύνατη.

II) Ένας τύπος που δίνει το άθροισμα των v πρώτων όρων μία αριθμητικής προόδου

με πρώτο όρο το a_1 και διαφορά ω είναι ο $S_v = \frac{v}{2}[2a_1 + (v-1)\omega]$.

III) Ισχύει $\sqrt{a^2} = a$ για οποιονδήποτε θετικό αριθμό a .

IV) Το συμμετρικό του σημείου $M(a, \beta)$ ως προς τον άξονα $y'y$ είναι το $M'(-a, \beta)$.

V) Η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f μπορεί να τέμνει τον άξονα $y'y$ σε περισσότερα από ένα σημεία.

B. Να δείξετε ότι: Η απόλυτη τιμή του γινομένου δύο αριθμών ισούται με το γινόμενο των απολύτων τιμών τους. Δηλαδή : $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Θέμα 2^ο

I) Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 + 2x - 3 = 0$ (1)

II) Σχηματίζουμε αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο : $\alpha_1 =$ Η μεγαλύτερη ρίζα της (1)

και διαφορά : $\omega =$ Η μικρότερη ρίζα της (1)

να βρείτε:

α) τον όρο: a_{21}

β) το άθροισμα των εικοσιένα πρώτων όρων της.

Θέμα 3^ο

Δίνεται η ανίσωση: $|x|^2 + 2x^2 + 3x \leq |x^2 + 2|$ (1)

I. Να δείξετε ότι η ανίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την ανίσωση: $2x^2 + 3x - 2 \leq 0$

II. Να λυθεί η ανίσωση: $2x^2 + 3x - 2 \leq 0$.

III. Να κάνετε γινόμενο την παράσταση: $2x^2 + 3x - 2$.

Θέμα 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{|x+2|} - 3 + \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

I. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

II. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(5, 3)$

να βρείτε τη τιμή του κ .

Για $\kappa = 1$

III. να βρείτε σε ποια σημεία τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ (αν τους τέμνει) η γραφική παράσταση της f .

IV. Να δείξετε ότι : $f(2016) \cdot (\sqrt{2015} - 1) = 2014$.

Θέμα 1^ο

Α.

Ι. Αν $x < 0$ η παράσταση $A = |x| + x$ είναι ίση με:

Α. $2x$, Β. x , Γ. $-2x$, Δ. 2 , Ε. 0 .

ΙΙ. Αν $|α| + |β| = 0$ προκύπτει ότι:

Α. $α = 0$ ή $β = 0$ Β. $α = 0$ και $β = 0$ Γ. $α = 0$ και $β \neq 0$
 Δ. $α \neq 0$ ή $β \neq 0$. Ε. $α \neq 0$ και $β = 0$.

ΙΙΙ. Η ανίσωση $|x| \geq -x$ αληθεύει για:

Α. $x < 0$, Β. για κάθε x πραγματικό,
 Γ. $x \geq 0$, Δ. Δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα.

ΙV. Αν $α < 0 < β$ τότε η παράσταση: $A = |α| - |β| - |α - β|$ είναι ίση με:

Α. $-2α$, Β. $2α$, Γ. $2β$, Δ. $-2β$. Ε. $2α + 2β$.

V. Πότε μπορούμε να γράψουμε : $\sqrt{-α}$;

Α. Ποτέ Β. αν $α > 0$ Γ. αν $α \leq 0$ Δ. αν $|α| > 0$
 Ε. Για κάθε $α \in \mathbb{R}$.

Β. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $αx^2 + βx + γ = 0$ με $α \neq 0$. Αν με P συμβολίσουμε το γινόμενο $x_1 \cdot x_2$ να δείξετε ότι : $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$

Θέμα 2^ο

Δίνεται η συνάρτησης: $f(x) = \frac{x+13}{x^2-1}$

Ι. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης.

ΙΙ. Να λυθεί η εξίσωση: $|f(3) - 3x| = 10$

Θέμα 3^ο

Οι αριθμοί : $α = 3x - 2$, $β = x + 1$, και $γ = 2x - 5$ είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου $(α_n)$, τότε:

Α) Να βρεθεί ο x .

Β) Για $x = 3$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

Γ) Αν ο αριθμός $α$ είναι ο έκτος όρος της προόδου, να βρείτε:

α) τον πρώτο όρο της προόδου

β) το άθροισμα S_{20} των 20 πρώτων όρων της προόδου.

Θέμα 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $k \in \mathbb{R}$.

I. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

II. Να βρείτε τις τιμές: $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$

III. Να αποδείξετε ότι:
$$\frac{\sqrt{f(0)}}{\sqrt{f(1)+5} - \sqrt{f(0)}} + \frac{\sqrt{f(3)+5}}{\sqrt{f(0)+2} + \sqrt{f(4)}} = 4.$$

Θέμα 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις :

α. Για κάθε πραγματικό α ισχύει: $|\alpha - |\alpha|| = |\alpha| - \alpha$

β. Αν $\alpha \leq 0$ και n άρτιος τότε $\sqrt[n]{\alpha^n} = -\alpha$

γ. Η εξίσωση : $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει δυο άνισες ρίζες όταν $\Delta \leq 0$.

δ. Τα σημεία (α, β) και $(-\alpha, \beta)$ του καρτεσιανού επιπέδου, είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$.

ε. Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$ γίνεται ομόσημο του α μόνο όταν $\Delta > 0$ και για τις τιμές του χ που είναι μεταξύ των ριζών.

B. Να αποδείξετε ότι $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Πότε ισχύει το « \Rightarrow ».

Θέμα 2^ο

I) Να βρείτε το λ ώστε το $A(1,4)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = x^2 - 7x + \lambda$$

II) Για $\lambda=10$ να βρείτε σε ποια σημεία η πιο πάνω συνάρτηση τέμνει τους άξονες.

Θέμα 3^ο

A. Δίνεται η ευθεία : $(\varepsilon) : y = (|\lambda| - 2)x + 2014$.

Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η (ε) σχηματίζει με τον $x'x$ οξεία γωνία;

B. Δίνεται η ευθεία : $(\eta) : y = (\lambda^2 - 4\lambda + 3)x + \lambda - 2013$.

Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η (η) σχηματίζει με τον $x'x$ αμβλεία γωνία;

Γ. Υπάρχουν τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η (ε) να σχηματίζει με τον $x'x$ οξεία γωνία και η (η) να σχηματίζει αμβλεία γωνία;

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - \lambda x + \lambda - 1 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$ (1)

A) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση έχει πάντα ρίζες πραγματικές.

B) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης της εξίσωσης (1):

I) να υπολογίσετε με τη βοήθεια του λ τις τιμές των παραστάσεων. $x_1 + x_2, x_1 \cdot x_2,$

II) να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει ότι: $12 + 2|x_1 + x_2 + 2| - 5|x_1 x_2 + 3| \geq 3$.

III) να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $f(\lambda) = \frac{\sqrt{x_1 + x_2 + 2}}{x_1 \cdot x_2}$.

Θέμα 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις :

- α.** Η απόσταση των αριθμών α και β ισούται με $|\alpha + \beta|$.
- β.** Το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$, ($a \neq 0$) με $\Delta > 0$ και x_1, x_2 ρίζες, είναι ετερόσημο του α , **μόνο** για τις τιμές του x που βρίσκονται **μεταξύ των ριζών**.
- γ.** Αν $\rho \in \mathbb{R}$ με $\rho > 0$ και $x \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει: $|x| < \rho \Leftrightarrow -\rho < x < \rho$.
- δ.** Για κάθε πραγματικό αριθμό α και φυσικό αριθμό ν ισχύει: $\sqrt[\nu]{\alpha\beta^\nu} = \alpha\beta$.
- ε.** Η ευθεία $y = \alpha x + \beta$, με $\alpha > 0$ σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$.

B. Αν $\alpha, \beta \geq 0$ να αποδείξετε ότι $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu \cdot \nu]{\alpha}$.

Θέμα 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = |x| - 3$

- α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- β)** Να βρείτε σε ποια σημεία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες.
- γ)** Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f με τετμημένη -2 .

Θέμα 3^ο

Οι αριθμοί: $\alpha = 2x + 4$, $\beta = -3x + 3$, και $\gamma = 6x + 16$ είναι οι τρεις πρώτοι όροι μιας αριθμητικής προόδου (a_n), τότε:

- A)** Να βρεθεί η μεταβλητή x
- B)** Για $x = -1$
 - i)** Να βρεθεί η διαφορά της αριθμητικής προόδου.
 - ii)** Να βρεθεί το άθροισμα: $a_{11} + a_{12} + a_{13} + \dots + a_{21}$

Θέμα 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\kappa}{x-4} + \sqrt{x^2 - 9}$ με κ, x πραγματικοί αριθμοί και $\kappa \neq 0$.

- A.** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f
- B. I)** Αν το σημείο $M(5,10)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης να βρείτε την τιμή του κ
- II)** Για $\kappa = 6$ να βρείτε το $f(\sqrt{10})$.

Θέμα 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις :

I). Για ένα ενδεχόμενο A και το συμπληρωματικό του A' ενός δειγματικού χώρου Ω

$$\text{ισχύει: } P(A) + P(A') = 1$$

II) Ισχύει: $x^2 \leq 9 \Leftrightarrow x \leq 3$

III). Ισχύει: $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

IV). Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει η ισότητα:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

V). Αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$ τότε $\alpha > \gamma$.

B. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$. Αν με S συμβολίσουμε

$$\text{το άθροισμα } x_1 + x_2 \text{ να δείξετε ότι: } S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Θέμα 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1-4x}{x^2-1}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(-2) = 3$.

β) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - 5x + f(-2) = 0$

Θέμα 3^ο

Ο νιοστός όρος μιας ακολουθίας είναι $a_n = 3n + 2$.

α) Να βρείτε τον επόμενο όρο a_{n+1}

β) Να δείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος.

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της.

δ) Να βρείτε την τάξη του όρου της που είναι ίσος με 65.

Θέμα 4^ο

Δίνεται εξίσωση: $x^2 - x \cdot \sqrt{14 + \lambda} + 2\lambda = 0$, με $\lambda > -14$.

I) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

II) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης είναι ετερόσημες;

III) Αν $\lambda = 2$ να δείξετε ότι η εξίσωση έχει μία ρίζα ρ την οποία να προσδιορίσετε.

IV) Για την τιμή του ρ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να υπολογίσετε

$$\text{την τιμή της παράστασης: } \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{\rho}} + \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{3} - \sqrt{\rho}} = 5$$

Θέμα 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις :

- i.** Για κάθε, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $v \in \mathbb{N}$, ισχύει : $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^v > \beta^v$.
- ii.** Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $|\alpha| + |\beta| \leq |\alpha + \beta|$.
- iii.** Η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f μπορεί να τέμνει τον άξονα $x'x$ σε περισσότερα από ένα σημεία.
- iv.** Για κάθε $\alpha \geq 0$ ισχύει $\sqrt[\mu]{\alpha^\nu} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$, όπου $\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$.
- v.** Για $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $x \in [-2, 3] \Leftrightarrow -2 < x < 3$.

B. Να αποδείξετε ότι: $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$ αν $\alpha, \beta \geq 0$ και $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu > 1$.

Θέμα 2^ο

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος : $-5, -2, 1, \dots$

I) Να βρεθεί ο 21^{ος} όρος της.

II) Να βρεθεί ποιος όρος της ισούται με 82.

III) Να βρεθεί το άθροισμα των εικοσιένα πρώτων όρων της.

Θέμα 3^ο

Δίνεται η συνάρτησης: $f(x) = \frac{\sqrt{3 - |3 - x|}}{x^2 - 1}$

I. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης.

II. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x - \lambda = 0$ $\lambda \in \mathbb{R}$.

I. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

II. Για $\lambda = 4$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις : $x_1 + x_2$ και $x_1 \cdot x_2$,
όπου x_1, x_2 οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης.

III. Για $\lambda = 4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = (x_1 + 1)^{2014} \cdot (x_2 + 1)^{2014}$.