ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1.

Α. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα (α,x_o) , (x_o,β) και συνεχής στο x_o. Αν ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_o)$ και $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_o,\beta)$ να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει στο x_o τοπικό μέγιστο.

Β. Ερωτήσεις Σωστό – Λάθος

1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε κάθε παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$ είναι της μορφής $\int_\alpha^x f(t)dt + c\,,\, c\in R$

2. Αν η συνάρτηση $f:(\alpha,\beta)\to R$ είναι συνεχής στο $x_o\in(\alpha,\beta)$ και ισχύουν $f(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_o)$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(x_o,\beta)$ τότε κατ'ανάγκη είναι $f(x_o)=0$

3. Αν η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι συνεχής στο R με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$ και είναι $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$ $(\alpha,\beta\in R)$, τότε κατ'ανάγκη είναι $\alpha=\beta$.

4. Εστω μια συνάρτηση $f:R\to R$. Αν η f^2 είναι παραγωγίσιμη στο R τότε , πάντα θα ισχύει $(f^2(x))'=2\cdot f(x)\cdot f'(x)$, $x\in R$

5. Αν οι ρίζες x_1,x_2 της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $(\alpha,\beta,\gamma\in R$, $\alpha\neq 0)$ είναι μη πραγματικοί μιγαδικοί αριθμοί , τότε πάντοτε ισχύει $|x_1|=|x_2|$

ΘΕΜΑ 2.

Α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $z\in C$ ισχύουν

i) $|Re(z)|\leq|z|$

ii) $|Im(z)|\leq|z|$

iii) $|Re(z)+Im(z)|\leq \sqrt{2}\cdot|z|$

Β) Εστω z,w$\in$C με |z|=1 και $w=\dfrac{1-2z}{z-2}$

i) Να βρεθούν οι γεωμετρικοί τόποι των εικόνων των μιγαδικών z και w

ii) Αν z=x+yi , x,y$\in$R τότε

α) $|z-w|=2\cdot\sqrt{\dfrac{1-x^2}{5-4x}}$, x$\in$[-1,1]

β) Να βρείτε το μέγιστο του |z-w| καθώς και τους μιγαδικούς για τους οποίους επιτυγχάνεται

ΘΕΜΑ 3.

Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f:(0,+∞)$\rightarrow$R ισχύει

$$\int_1^{x+1}\frac{f(x)}{x}dt+2\int_0^x f'(x)dt=\frac{2}{\sqrt{x}}$$

για κάθε x>0 και f(1)=0

1) Να αποδείξετε ότι f(x)= $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, x>0

2) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της f

3) Να βρείτε την μικρότερη τιμή του κ$\in$R για την οποία ισχύει

$e^{\kappa\sqrt{x}}\geq x$, για κάθε x>0

4) Να βρείτε τους α,β,γ>0 ώστε να ισχύει $\alpha^{\sqrt{\beta\gamma}}\cdot\beta^{\sqrt{\gamma\alpha}}\cdot\gamma^{\sqrt{\alpha\beta}}=e^{\frac{6\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{e}}$

5) Να λυθεί η εξίσωση $4^{\sqrt{x}}=x^2$, x$\geq$0

ΘΕΜΑ 4.

Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\rightarrow R$ ισχύει

$$f'(x)=f^2(x)\cdot f(-x) \text{ για κάθε } x\in R \text{ και } f(0)=1$$

1) Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x$, $x\in R$

2) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία , τα ακρότατα , την κυρτότητα

και τα σημεία καμπής η συνάρτηση $g(x)=f(\sqrt{x})$, $x\geq 0$

3) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_g , τον άξονα $x'x$

και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$

4) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\rightarrow+\infty}(g(x+1)-g(x))$

5) Να λυθεί η εξίσωση $f(e^x)+f(3x)=f(2x)+f(1-x)$