Απαντήσεις στα θέματα του ηλεκτρονικού περιοδικού

«Όπερ έδει δείξαι» τεύχος 8. 2012

Επιμέλεια Θεμάτων: Ζανταρίδης Νίκος

Διαγώνισμα Γ Λυκείου

Επίλυση ασκήσεων : Ζανταρίδης Νίκος - Χατζόπουλος Μάκης

Α. Σχολικό βιβλίο σελ. 262

Β. 1. Σ 2. Σ 3. Σ 4. Λ 5. Σ

Θέμα 2

Α) Για $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$ έχουμε διαδοχικά,

i. $|\mathrm{Re}(z)| \le |z| \Leftrightarrow |x| \le \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow x^2 \le x^2 + y^2 \Leftrightarrow 0 \le y^2$, που ισχύει, οπότε ισχύει $|\mathrm{Re}(z)| \le |z|$

ii. $|\mathrm{Im}(z)| \le |z| \Leftrightarrow |y| \le \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow y^2 \le x^2 + y^2 \Leftrightarrow 0 \le x^2$, που ισχύει, οπότε ισχύει $|\mathrm{Im}(z)| \le |z|$

iii. $|\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)| \le \sqrt{2} \cdot |z| \Leftrightarrow |x + y| \le \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 \le 2x^2 + 2y^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (x - y)^2 \ge 0$$

που ισχύει, οπότε ισχύει $|\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)| \le \sqrt{2} \cdot |z|$

Β) i. Έχουμε $|z| = 1 \Leftrightarrow |z - (0 + 0i)| = 1$, επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων (0, 0) και ακτίνα ρ =1.

Έχουμε,

$$w = \frac{1 - 2z}{z - 2} \Leftrightarrow wz - 2w = 1 - 2z \Leftrightarrow (2 + w)z = 2w + 1$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{2w + 1}{2 + w},\ w \ne -2$$

Έχουμε, $|z| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{2w+1}{2+w}\right| = 1 \\ w \ne -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|2w+1|}{|2+w|} = 1 \\ w \ne -2 \end{cases} \Leftrightarrow |2w + 1| = |2 + w|$

$$\Leftrightarrow |2w + 1|^2 = |w + 2|^2$$
$$\Leftrightarrow (2w + 1)(2\overline{w} + 1) = (w + 2)(\overline{w} + 2)$$

$\Leftrightarrow 4w\overline{w}+2w+2\overline{w}+1=w\overline{w}+2w+2\overline{w}+4$

$\Leftrightarrow w\overline{w}=1$

$\Leftrightarrow |w|^2=1$

$\Leftrightarrow |w|=1$

επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι ο μοναδιαίος κύκλος $x^2+y^2=1$.

ii. Για $z=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$, τότε $x^2+y^2=1\Leftrightarrow y^2=1-x^2$, όμως

$|\mathrm{Re}(z)|\le|z|\Leftrightarrow|x|\le1\Leftrightarrow-1\le x\le1$, άρα $x\in[-1,1]$.

Έχουμε,

$$|z-w|=\left|z-\frac{1-2z}{z-2}\right|$$

$$=\left|x+yi-\frac{1-2(x+yi)}{(x+yi)-2}\right|$$

$$=\left|\frac{x(x-2)+xyi+y(x-2)i-y^2-(1-2x)+2yi}{(x-2)+yi}\right|$$

$$=\frac{\left|(x^2-y^2-1)+2xyi\right|}{\left|(x-2)+yi\right|}$$

$$\overset{y^2=1-x^2}{=}\frac{\left|2(x^2-1)+2xyi\right|}{\left|(x-2)+yi\right|}$$

$$=\frac{2\cdot\sqrt{(x^2-1)^2+(xy)^2}}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}$$

$$=2\sqrt{\frac{x^4-2x^2+1+x^2y^2}{x^2-4x+4+y^2}}$$

$$\overset{y^2=1-x^2}{=}2\sqrt{\frac{x^4-2x^2+1+x^2(1-x^2)}{5-4x}}$$

$$=2\sqrt{\frac{1-x^2}{5-4x}},\ x\in[-1,1]$$

β) Είναι $|z-w|^2=4\cdot\dfrac{1-x^2}{5-4x}=f(x),\ \ x\in[-1,1]$

Είναι φανερό ότι το $|z-w|$ γίνεται μέγιστο αν και μόνο αν το $|z-w|^2$ γίνεται μέγιστο.

Για κάθε $x \in [-1,1]$ έχουμε,

$$f'(x) = 4 \cdot \left(\frac{1-x^2}{5-4x} \right)'$$

$$= 4 \cdot \left[\frac{-2x(5-4x) - (1-x^2)(-4)}{(5-4x)^2} \right]$$

$$= 8 \cdot \frac{2x^2 - 5x + 2}{(5-4x)^2}$$

Έχουμε,

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \\ x \in [-1,1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 = 0 \\ -1 \le x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \\ x \in [-1,1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 > 0 \\ -1 \le x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le x < \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} f'(x) < 0 \\ x \in [-1,1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 < 0 \\ -1 \le x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x \le 1$$

x	-1	$\frac{1}{2}$	**1**
f'	+	0	−
f	τ.ε ↗		↘ τ.ε

Το $|z-w|^2$ γίνεται μέγιστο για $x = \frac{1}{2}$ με μέγιστη τιμή $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1-\frac{1}{4}}{5-2} = 1$,

άρα και το μέγιστο του $|z-w|$ είναι $|z-w|_{max} = \sqrt{f_{max}} = \sqrt{1} = 1$ όταν $x = \frac{1}{2}$

<u>Εύρεση του z</u>

Αν $x = \frac{1}{2}$, τότε από την σχέση $x^2 + y^2 = 1$ παίρνουμε, $y^2 = 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$,

οπότε $z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

Εύρεση του w

Για $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, έχουμε $w=\frac{5x-4}{5-4x}+\frac{3y}{5-4x}i=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ και

για $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, έχουμε $w=\frac{5x-4}{5-4x}+\frac{3y}{5-4x}i=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Θέμα 3

1) Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε,

$$\int_1^{x+1}\frac{f(x)}{x}\,dt+2\int_0^x f'(x)\,dt=\frac{2}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}(x+1-1)+2f'(x)(x-0)=\frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow f(x)+2x\cdot f'(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}\ \left(\text{διαιρούμε κάθε όρο με το } 2\sqrt{x}>0\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2\sqrt{x}}f(x)+\sqrt{x}\cdot f'(x)=\frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}\right)'f(x)+\sqrt{x}\cdot f'(x)=\frac{1}{x}$$

$$\overset{**}{\Leftrightarrow}\left(\sqrt{x}\cdot f(x)\right)'=(\ln x)'$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x}\cdot f(x)=\ln x+c\quad c\in\mathbb{R}$$

** *Αν οι συναρτήσεις h, f είναι ορισμένες σ' ένα διάστημα Δ με τις h, h·f παραγωγίσιμες στο Δ και* $h(x)\neq 0$, *για κάθε* $x\in\Delta$, *τότε και η f είναι παραγωγίσιμη στο Δ.*

Εύρεση του c

Για x = 1, έχουμε $\sqrt{1}\cdot f(1)=\ln 1+c$ δηλαδή $c=0$,

άρα $\sqrt{x}\cdot f(x)=\ln x\Leftrightarrow f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}, x>0$.

2. Για κάθε x > 0, έχουμε,

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x}-\ln x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^2}=\frac{2x-x\ln x}{2x^2\sqrt{x}}=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$$

Έχουμε,

$$\begin{cases} f'(x)=0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}=0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-\ln x=0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x=2 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x=\ln\left(e^2\right) \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=e^2 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=e^2$$

$$\begin{cases} f'(x)>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-\ln x>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x<2 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x<\ln\left(e^2\right) \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<e^2 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(0,e^2\right)$$

$$\begin{cases} f'(x)<0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}<0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-\ln x<0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x>2 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x>\ln\left(e^2\right) \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>e^2 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(e^2,+\infty\right)$$

<u>Πίνακας μεταβολών</u>

x	0	e^2	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$
f	$-\infty \nearrow$		$\searrow 0$

$$f\left(e^2\right)=\frac{2}{e}$$

Από το πρόσημο της f' που φαίνεται στον πίνακα προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,e^2\right]$ και γνησίως φθίνουσα $\left[e^2,+\infty\right)$. Η f παρουσιάζει στο $x_0=e^2$ ολικό μέγιστο το $\max f(x)=f\left(e^2\right)=\dfrac{2}{e}$.

<u>Εύρεση σύνολο τιμών της f</u>

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\left(\ln x\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=-\infty, \text{ γιατί } \lim_{x\to 0^+}(\ln x)=-\infty \text{ και } \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=+\infty$$

$$\text{και } \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{\left(\sqrt{x}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)=0$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\left(0,e^2\right]$ έπεται ότι

$$f\left(\left(0,e^2\right]\right)=\left(\lim_{x\to 0^+} f(x), f\left(e^2\right)\right]=\left(-\infty,\frac{2}{e}\right]$$

Ακόμα επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\left[e^2,+\infty\right)$ έπεται ότι

$$f\left(\left[e^2,+\infty\right)\right)=\left(\lim_{x\to+\infty} f(x), f\left(e^2\right)\right]=\left(0,\frac{2}{e}\right]$$

Άρα $f\left(\mathbb{R}_+^*\right)=f\left(\left(0,e^2\right]\right)\cup f\left(\left[e^2,+\infty\right)\right)=\left(-\infty,\frac{2}{e}\right]\cup\left(0,\frac{2}{e}\right]=\left(-\infty,\frac{2}{e}\right]$

3. Για κάθε $x>0$ έχουμε ,

$$e^{k\sqrt{x}}\geq x\Leftrightarrow \ln\left(e^{k\sqrt{x}}\right)\geq \ln x$$

$$\Leftrightarrow k\sqrt{x}\geq \ln x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\leq k$$

$$\Leftrightarrow f\left(x\right)\leq k$$

Επειδή η f έχει ολικό μέγιστο έπεται ότι για να ισχύει $f\left(x\right)\leq k$ για κάθε x > 0, πρέπει και αρκεί να είναι $\max f\left(x\right)\leq k$. Επομένως η μικρότερη τιμή του k για την οποία ισχύει $e^{k\sqrt{x}}\geq x$ για κάθε x > 0, είναι το $k_0=\max f\left(x\right)=\frac{2}{e}$.

4. Έχουμε,

$$\alpha^{\sqrt{\beta\gamma}}\cdot\beta^{\sqrt{\alpha\gamma}}\cdot\gamma^{\sqrt{\alpha\beta}}=e^{\frac{6\cdot\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{e}}\Leftrightarrow \ln\left(\alpha^{\sqrt{\beta\gamma}}\cdot\beta^{\sqrt{\alpha\gamma}}\cdot\gamma^{\sqrt{\alpha\beta}}\right)=\ln\left(e^{\frac{6\cdot\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{e}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\alpha^{\sqrt{\beta\gamma}}\right)+\ln\left(\beta^{\sqrt{\alpha\gamma}}\right)+\ln\left(\gamma^{\sqrt{\alpha\beta}}\right)=\frac{6\cdot\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{e}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\beta\gamma}\ln\alpha+\sqrt{\alpha\gamma}\ln\beta+\sqrt{\alpha\beta}\ln\gamma=\frac{6\cdot\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{e}$$

$$\Leftrightarrow \left(\text{διαιρούμε όλους τους όρους με } \sqrt{\alpha\beta\gamma}>0\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln\alpha}{\sqrt{\alpha}}+\frac{\ln\beta}{\sqrt{\beta}}+\frac{\ln\gamma}{\sqrt{\gamma}}=\frac{6}{e}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\alpha\right)+f\left(\beta\right)+f\left(\gamma\right)=\frac{6}{e}:\left(\Sigma\right)$$

Επειδή όμως η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο μόνο στο $x_0=e^2$ το $f_{max}=f\left(e^2\right)=\frac{2}{e}$, έπεται ότι για κάθε x > 0, ισχύει $f\left(x\right)\leq\frac{2}{e}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=e^2$. Έτσι ισχύει,

$f\left(\alpha\right)\leq\frac{2}{e}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $\alpha=e^2$

$f\left(\beta\right)\leq\frac{2}{e}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $\beta=e^2$

$f\left(\gamma\right)\leq\frac{2}{e}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $\gamma=e^2$

οπότε με άθροιση κατά μέλη παίρνουμε $f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)\le\frac{6}{e}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο αν $\alpha=\beta=\gamma=e^2$. Άρα για να ισχύει η (Σ) πρέπει και αρκεί να είναι $\alpha=\beta=\gamma=e^2$

5. Η εξίσωση $4^{\sqrt{x}}=x^2,\ x\ge 0$: (E)

Είναι φανερό ότι ο αριθμός $x_0 = 0$ **δεν** είναι λύση της εξίσωσης (E). Αναζητούμε λοιπόν τις λύσεις της εξίσωσης στο $(0,+\infty)$.

Με x > 0, έχουμε,

$$4^{\sqrt{x}}=x^2 \Leftrightarrow \ln\left(4^{\sqrt{x}}\right)=\ln\left(x^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}\cdot\ln 4=2\ln x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\frac{\ln 4}{2}$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις

I) $x\in\left(0,e^2\right]$

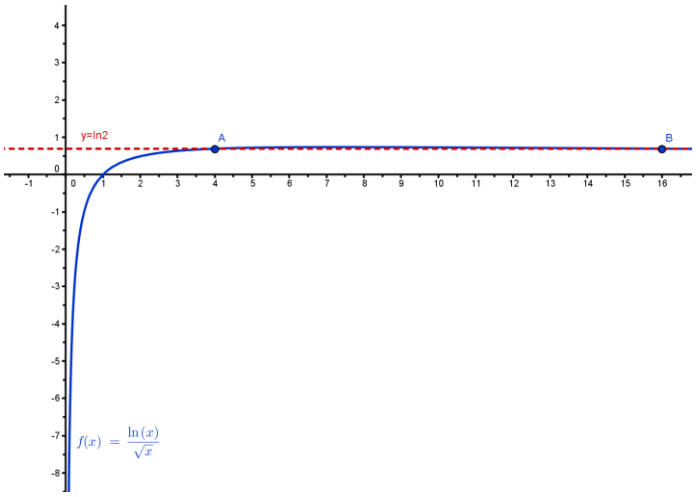
Έχουμε: $f(x)=\frac{\ln 4}{\sqrt{4}}\Leftrightarrow f(x)=f(4)$ με $x,4\in\left(0,e^2\right]$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη στο $\left(0,e^2\right]$ προκύπτει ότι x = 4. Έτσι στο $\left(0,e^2\right]$ η δοθείσα εξίσωση έχει ακριβώς μια λύση, το $x_1=4$.

II) $x\in\left(e^2,+\infty\right)$

Έχουμε,

$$f(x)=\frac{\ln 4}{2}=\frac{2\ln 4}{4}=\frac{\ln 4^2}{\sqrt{16}}=\frac{\ln 16}{\sqrt{16}}=f(16)$$

δηλαδή $f(x)=f(16)$ με $x,16\in\left(e^2,+\infty\right)$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη στο $\left(e^2,+\infty\right)$ προκύπτει ότι x = 16. Επομένως στο $\left(e^2,+\infty\right)$ η δοθείσα εξίσωση έχει ακριβώς μια λύση, το $x_2=16$.



Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η εξίσωση $4^{\sqrt{x}}=x^2,\ x\ge 0$ έχει ακριβώς δύο λύσεις τους αριθμούς $x_1=4,\ x_2=16$.

<u>Θέμα 4</u>

1) Από την δεδομένη σχέση $f'(x)=f^2(x)\cdot f(-x)\ :(1)$ πολλαπλασιάζοντας τα μέλη με το f(-x), έχουμε:

$$f'(x)\cdot f(-x)=f^2(x)\cdot f^2(-x):(2)$$

Από την (2) θέτοντας όπου x το – x έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει,

$$f'(-x)\cdot f(x)=f^2(-x)\cdot f^2(x)\ \ :(3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει,

$$f'(x)\cdot f(-x)=f'(-x)\cdot f(x)\Rightarrow f'(x)\cdot f(-x)-f'(-x)\cdot f(x)=0$$

$$\Rightarrow\left(f(x)\cdot f(-x)\right)'=0$$

$$\Rightarrow f(x)\cdot f(-x)=c,\ \ c\in\mathbb{R}$$

Για $x=0$ έχουμε, $f(0)\cdot f(-0)=c\Leftrightarrow c=\left(f(0)\right)^2=1^2=1$

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)\cdot f(-x)=1$

Έτσι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ από την (1) έχουμε,

$$f'(x)=f^2(x)\cdot f(-x)\Rightarrow f'(x)=f(x)\cdot\left(f(x)\cdot f(-x)\right)=f(x)\cdot 1=f(x)$$

$$\Rightarrow f'(x)=f(x)$$

$$\Rightarrow f(x)=c_1e^x,\ \ (c_1\in\mathbb{R})$$

Είναι f(0) = 1 $\Leftrightarrow c_1e^0=1\Leftrightarrow c_1=1$ άρα $f(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$, (που ικανοποιεί την υπόθεση).

2) Έχουμε, $g(x)=f\left(\sqrt{x}\right)=e^{\sqrt{x}}$, $x\geq 0$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot e^{\sqrt{x}}>0$ για κάθε $x>0$

και επειδή η g είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ έπεται ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, οπότε η g παρουσιάζει στο $x_0=0$ (ολικό) ελάχιστο το $\min g(x)=g(0)=e^{\sqrt{0}}=1$.

Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με,

$$g''(x)=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right)'=\frac{\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\cdot 2\sqrt{x}-e^{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\left(2\sqrt{x}\right)^2}=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)e^{\sqrt{x}}}{4x\sqrt{x}}$$

Εύκολα προκύπτει ο παρακάτω πίνακας

x	0	1	$+\infty$
g''	–	0	+
g'	+		+
g	↱		⤴

Από το πρόσημο της g'' στο $(0,+\infty)$ που φαίνεται στον πίνακα και επειδή η g είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ προκύπτει ότι η g είναι κοίλη στο [0 ,1] και κυρτή στο $[1,+\infty)$. Η g παρουσιάζει καμπή στο $x_0=1$ αφού η

g'' μηδενίζεται στο $x_0 = 1$ και αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν αυτού. Είναι $g(1) = e^{\sqrt{1}} = e$ οπότε το σημείο καμπής της C_g είναι το $M(1, e)$.

3) Η g είναι συνεχής στο [0, 1] και ισχύει $g(x) = e^{\sqrt{x}} > 0$, για κάθε $x \in [0,1]$, οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E(\Omega) = \int_0^1 |g(x)|\, dx = \int_0^1 e^{\sqrt{x}}\, dx$$

Θέτουμε, $\sqrt{x} = u$ οπότε $x = u^2$ και $dx = 2udu$. Ακόμη για $x = 0$ έχουμε $u = 0$ και για $x = 1$ έχουμε $u = 1$, άρα

$$E(\Omega) = \int_0^1 2ue^u\, du = 2\int_0^1 u\left(e^u\right)'\, du = \left[2ue^u\right]_0^1 - 2\int_0^1 e^u\, du = 2e - 2(e-1) = 2 \text{ τ.μ.}$$

4) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, οπότε για $x \in (1, +\infty)$ η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[x, x+1]$.

Άρα υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ ώστε $g'(\xi) = \dfrac{g(x+1) - g(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow g(x+1) - g(x) = g'(\xi) : (\Sigma)$

(το ξ για δεδομένο x είναι μοναδικό αφού η παράγωγος της g είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$ ως κυρτή, έτσι από την (Σ) ορίζεται η συνάρτηση ξ (x)).

Επειδή, $x < \xi < x+1$ έπεται ότι, όταν $x \to +\infty$ έχουμε και $\xi \to +\infty$ (από κριτήριο παρεμβολής).

Ακόμη είναι

$$\lim_{x\to+\infty} g'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(e^{\sqrt{x}}\right)'}{\left(2\sqrt{x}\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{2} = +\infty$$

Έτσι έχουμε, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x+1) - g(x)\right) = \lim\limits_{\xi\to+\infty} g'(\xi) = +\infty$.

5. **<u>Θα λύσουμε την εξίσωση</u>,** $f\left(e^x\right) + f(3x) = f(2x) + f(1-x)$

Αρχικά θα συγκρίνουμε το e^x και $1-x$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Θέτουμε, $h(x) = e^x - (1-x) = e^x + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$, παρατηρούμε ότι $h(0) = 0$, επίσης

$h'(x) = e^x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Έτσι έχουμε,

I) Για $x > 0 \Rightarrow h(x) > h(0) \Rightarrow e^x + x - 1 > 0 \Rightarrow e^x > 1 - x$ και

II) Για $x < 0 \Rightarrow h(x) < h(0) \Rightarrow e^x + x - 1 < 0 \Rightarrow e^x < 1 - x$

Για την εξίσωση $f\left(e^x\right)+f\left(3x\right)=f\left(2x\right)+f\left(1-x\right)$

- Μια **προφανής λύση** της εξίσωσης είναι ο αριθμός $x_0=0$, αφού

$$f\left(e^0\right)+f\left(0\right)=f\left(0\right)+f\left(1-0\right)\Leftrightarrow f\left(1\right)+f\left(0\right)=f\left(1\right)+f\left(0\right)$$ που ισχύει,

θα δείξουμε ότι **δεν** έχει άλλη λύση.

- $$x>0\Rightarrow\begin{cases}3x>2x\\ e^x>1-x\end{cases}\overset{f:\nearrow\mathbb{R}}{\Rightarrow}\begin{cases}f\left(3x\right)>f\left(2x\right)\\ f\left(e^x\right)>f\left(1-x\right)\end{cases}\Rightarrow f\left(e^x\right)+f\left(3x\right)>f\left(2x\right)+f\left(1-x\right)$$

επομένως στο διάστημα $\left(0,+\infty\right)$ η δοθείσα εξίσωση **δεν** έχει λύση.

- $$x<0\Rightarrow\begin{cases}3x<2x\\ e^x<1-x\end{cases}\overset{f:\nearrow\mathbb{R}}{\Rightarrow}\begin{cases}f\left(3x\right)<f\left(2x\right)\\ f\left(e^x\right)<f\left(1-x\right)\end{cases}\Rightarrow f\left(e^x\right)+f\left(3x\right)<f\left(2x\right)+f\left(1-x\right)$$

επομένως στο διάστημα $\left(-\infty,0\right)$ η δοθείσα εξίσωση **δεν** έχει λύση.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η δοθείσα εξίσωση έχει μοναδική λύση τον αριθμό $x_0 = 0$.