Άλγεβρα

Β΄ Λυκείου

Τράπεζα Θεμάτων

lisari.blogspot.gr

lisari team

Εκφωνήσεις-Λύσεις

η καλύτερη ομάδα λόγω team_ής

(Έκδοση: 05 – 03 – 2015)

Οι απαντήσεις και οι λύσεις

είναι αποτέλεσμα της συλλογικής δουλειάς

των συνεργατών του δικτυακού τόπου

http://lisari.blogspot.gr

4η έκδοση: 05 – 03 – 2015 *(συνεχής ανανέωση)*

Περιεχόμενα

Σελίδες

Πρόλογος

Στο παρόν αρχείο δίνονται όλες οι ασκήσεις της **Τράπεζας Θεμάτων** που αφορούν στην **Άλγεβρα της Β΄ Λυκείου** μαζί με τις λύσεις τους. Η παρουσίαση των λύσεων είναι κατά το δυνατόν αναλυτική έτσι, ώστε το αρχείο να μπορεί να διαβαστεί και να μελετηθεί εύκολα από τους μαθητές. Σε αρκετές περιπτώσεις οι λύσεις συνοδεύονται με αναφορές σε παρόμοιες ασκήσεις του σχολικού βιβλίου ή της τράπεζας θεμάτων καθώς και με κάποια στοιχεία θεωρίας ή ακόμα και μεθοδολογίας.

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε από μια **διαδικτυακή** (και όχι μόνο) **ομάδα μαθηματικών** από διάφορα μέρη της Ελλάδος. Η ομάδα συγκροτήθηκε από τους μαθηματικούς που ανταποκρίθηκαν στο κάλεσμα που απεύθυνε μέσα από το blog **http://lisari.blogspot.gr** ο ακούραστος **Μάκης Χατζόπουλος.** Εργάστηκε με μεράκι, κάτω από πίεση χρόνου, για να προσφέρει στην εκπαιδευτική κοινότητα, μαθητές και καθηγητές, το συγκεκριμένο υλικό.

Επιθυμία όλων μας είναι να συμβάλλουμε, έστω και ελάχιστα, στην **βελτίωση της διδασκαλίας** των μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, μέσα από την παροχή υποστηρικτικού υλικού στην ελληνική εκπαιδευτική κοινότητα.

Μετά την αρχική συγγραφή των λύσεων έγιναν ενδελεχείς έλεγχοι, διορθώσεις και βελτιώσεις για την όσο το δυνατό **ποιοτικότερη παρουσίαση**. Ζητούμε συγνώμη για τυχόν παραλείψεις, λάθη ή αστοχίες οι οποίες ενδεχομένως θα έχουν διαλάθει της προσοχής μας, κάτι αναπόδραστο στην εκπόνηση μιας εργασίας τέτοιας έκτασης σε τόσο στενά περιθώρια χρόνου. Θα ακολουθήσουν επόμενες εκδόσεις, όπου το υλικό θα βελτιωθεί. Οποιαδήποτε σχόλια, παρατηρήσεις, διορθώσεις και βελτιώσεις των λύσεων είναι ευπρόσδεκτα στην ηλεκτρονική διεύθυνση lisari.blogspot@gmail.com.

Με εκτίμηση

Η ομάδα του lisari

30 – 11 – 2014

lisari team

Αντωνόπουλος Νίκος (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίου Κατεύθυνση - Άργος)
Αυγερινός Βασίλης (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίου ΔΙΑΤΑΞΗ - Ν. Σμύρνη και Νίκαια)
Βελαώρας Γιάννης (Φροντιστήριο ΒΕΛΑΩΡΑΣ - Λιβαδειά Βοιωτίας)
Βοσκάκης Σήφης (Φροντιστήριο Ευθύνη - Ρέθυμνο)
Γιαννόπουλος Μιχάλης (Αμερικάνικη Γεωργική Σχολή)
Γκριμπαβιώτης Παναγιώτης (Φροντιστήριο Αστρολάβος - Άρτα)
Δούδης Δημήτρης (3^{ο} Λύκειο Αλεξανδρούπολης)
Ζαμπέλης Γιάννης (Φροντιστήρια Πουκαμισάς Γλυφάδας)
Κακαβάς Βασίλης (Φροντιστήριο Ώθηση - Αργυρούπολη)
Κάκανος Γιάννης (Φροντιστήριο Παπαπαναγιώτου – Παπαπαύλου - Σέρρες)
Κανάβης Χρήστος (Διδακτορικό στο ΕΜΠ – 2ο ΣΔΕ φυλακών Κορυδαλλού)
Καρδαμίτσης Σπύρος (Πρότυπο Λύκειο Αναβρύτων)
Κοπάδης Θανάσης (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίων 19+ - Πολύγωνο)
Κουλούρης Αντρέας (3^{ο} Λύκειο Γαλατσίου)
Κουστέρης Χρήστος (Φροντιστήριο Στόχος - Περιστέρι)
Μανώλης Ανδρέας (Φροντιστήριο Ρηγάκης - Κοζάνη)
Μαρούγκας Χρήστος (3^{ο} ΓΕΛ Κηφισιάς)
Νάννος Μιχάλης (1^{ο} Γυμνάσιο Σαλαμίνας)
Νικολόπουλος Θανάσης (Λύκειο Καταστραρίου, Ζάκυνθος)
Παγώνης Θεόδωρος (Φροντιστήριο Φάσμα - Αγρίνιο)
Παντούλας Περικλής (Φροντιστήρια Γούλα-Δημολένη - Ιωάννινα)
Παπαδομανωλάκη Μαρία (Ιδιοκτήτρια Πρότυπου Κέντρου Μάθησης ΔΙΑΚΡΙΣΙΣ - Ρέθυμνο)
Παπαμικρούλης Δημήτρης (Εκπαιδευτικός Οργανισμός Ρόμβος)
Πορίχης Λευτέρης (Γυμνάσιο Λιθακιάς – Ζάκυνθος)
Ράπτης Γιώργος (6^{ο} ΓΕΛ Βόλου)
Σίσκας Χρήστος (Φροντιστήριο Μπαχαράκης - Θεσσαλονίκη)
Σκομπρής Νίκος (Συγγραφέας – 1^{ο} Λύκειο Χαλκίδας)
Σπλήνης Νίκος (Φροντιστήριο ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ - Ηράκλειο Κρήτης)
Σπυριδάκης Αντώνης (Γυμνάσιο Βιάννου - Λασίθι)
Σταυρόπουλος Παύλος (Ιδιωτικά Εκπαιδευτήρια Δούκα)
Σταυρόπουλος Σταύρος (Γραμματέας Ε.Μ.Ε Κορινθίας - Γυμνάσιο Λ.Τ. Λέχαιου Κορινθίας)
Τηλέγραφος Κώστας (Φροντιστήριο Θεμέλιο - Αλεξανδρούπολη)
Τρύφων Παύλος (1^{ο} Εσπερινό ΕΠΑΛ Περιστερίου)
Φιλιππίδης Χαράλαμπος (Ελληνογαλλική Σχολή Καλαμαρί)
Χαραλάμπους Σταύρος (Μουσικό Σχολείο Λαμίας)
Χατζόπουλος Μάκης (Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων)

Τράπεζα Θεμάτων
Άλγεβρα Β΄ τάξης

14 Δεκεμβρίου 2014

Λύτες

Νίκος Αντωνόπουλος

Σήφης Βοσκάκης

Πάνος Γκριμπαβιώτης

Δημήτρης Δούδης

Γιάννης Ζαμπέλης

Γιάννης Κάκανος

Χρήστος Κουστέρης

Θανάσης Νικολόπουλος

Μαρία Παπαδομανωλάκη

Δημήτρης Παπαμικρούλης

Σταύρος Σταυρόπουλος

Νίκος Σπλήνης

Αντώνης Σπυριδάκης

Παύλος Τρύφων

Χαράλαμπος Φιλιππίδης

Μάκης Χατζόπουλος

Έλεγχος

Κεφάλαιο 1ο

Σήφης Βοσκάκης

Γιάννης Κάκανος

Κεφάλαιο 2ο

Βασίλης Αυγερινός

Σταύρος Χαραλάμπους

Κεφάλαιο 3ο

Δημήτρης Δούδης

Δημήτρης Παπαμικρούλης

Κεφάλαιο 4ο

Θεόδωρος Παγώνης

Χαράλαμπος Φιλιππίδης

Κεφάλαιο 5ο

Θεόδωρος Παγώνης

Χαράλαμπος Φιλιππίδης

Συντονιστής

Παύλος Τρύφων

Εξώφυλλο

Μιχάλης Νάννος

Επιμελητής

Μάκης Χατζόπουλος

Παύλος Τρύφων

Πρόλογος

Ανδρέας Κουλούρης

lisari team

η καλύτερη ομάδα λόγω team_ής!

Η ΘΕΩΡΙΑ ΜΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ

Συστήματα - Ορίζουσες

Για την γενική επίλυση του συστήματος $\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$ ορίζουμε:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \gamma_1\beta_2 - \gamma_2\beta_1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1$$

Για το σύστημα ισχύει ότι:

- Αν $D \neq 0$, τότε έχει μοναδική λύση, την $x = \frac{D_x}{D}$ και $y = \frac{D_y}{D}$
- Αν $D = 0$ τότε είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις.

Παραμετρικό σύστημα

Παραμετρικό λέγεται το σύστημα που οι συντελεστές του δεν είναι συγκεκριμένοι αριθμοί, αλλά εξαρτώνται από ένα γράμμα μ, λ κτλ που λέγεται παράμετρος.

Για την λύση – διερεύνησή του, εργαζόμαστε ως εξής:

- Υπολογίζουμε τις ορίζουσες D, D_x, D_y και τις παραγοντοποιούμε.
- Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

  α) Αν $D \neq 0$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση

  β) Αν $D = 0$, βρίσκουμε τις τιμές της παραμέτρου που συμβαίνει αυτό και αντικαθιστούμε στο σύστημα και βλέπουμε αν είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις (***Προσοχή!*** *Στην περίπτωση των απείρων λύσεων θα πρέπει να δίνουμε τη γενική μορφή της λύσης).*

Γραμμικό σύστημα 3x3

Για τη επίλυση ενός τέτοιου συστήματος εργαζόμαστε με την μέθοδο της αντικατάστασης.

Μη γραμμικό σύστημα

Για τη επίλυση ενός τέτοιου συστήματος εργαζόμαστε με την μέθοδο της αντικατάστασης.

1.1 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

«Θέμα Β»

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (16950)
α) Να κατασκευάσετε ένα γραμμικό σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους με συντελεστές διάφορους του μηδενός, το οποίο να είναι αδύνατο.

Μονάδες 10

β) Να παραστήσετε γραφικά στο επίπεδο τις δυο εξισώσεις του συστήματος που ορίσατε στο α) ερώτημα και, με βάση το γράφημα, να εξηγήσετε γιατί το σύστημα είναι αδύνατο.

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ
α) Για να είναι γραμμικό σύστημα αδύνατο θα πρέπει οι ευθείες που παριστάνει κάθε εξίσωση να είναι παράλληλες, άρα:

$$\text{π.χ. } \begin{cases} 2x-4y=12 \\ 2x-4y=8 \end{cases}$$

<u>**1ος Τρόπος:**</u> Εύκολα παρατηρούμε ότι η $\varepsilon_1 : 2x-4y=12$ έχει $\lambda_{\varepsilon_1}=\frac{1}{2}$ και η $\varepsilon_2 : 2x-4y=8$ έχει $\lambda_{\varepsilon_2}=\frac{1}{2}$, άρα $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$, άρα το σύστημα αδύνατο.

<u>**2ος Τρόπος:**</u> Μια άλλη προσέγγιση θα ήταν με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών ή της αντικατάστασης:

$$\left.\begin{matrix} 2x-4y=12 \\ 2x-4y=8 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \Rightarrow 2x=4y+12 \quad (1) \\ \overset{(1)}{\Rightarrow} 4y+12-4y=8 \Rightarrow 12=8 \quad \text{αδύνατο} \end{matrix}$$

β) Για να παραστήσουμε γραφικά κάθε ευθεία θα χρειαστούμε 2 σημεία. Βρίσκουμε τα σημεία που κάθε μία από αυτές τέμνει τους άξονες.

Η ευθεία $2x-4y=12$ τέμνει τον $x'x$, όπου $y=0$,

$$2x-4\cdot 0=12 \text{ ή } 2x=12 \text{ ή } x=6$$

άρα, τέμνει τον $x'x$ στο $A(6,0)$.

Η ευθεία $2x-4y=12$ τέμνει τον yy' όπου $x=0$,

$$0\cdot x-4\cdot y=12 \text{ ή } -4y=12 \text{ ή } y=-3$$

άρα, τέμνει τον yy' στο $B(0,-3)$.

Η ευθεία $2x-4y=8$ τέμνει τον $x'x$ όπου $y=0$,

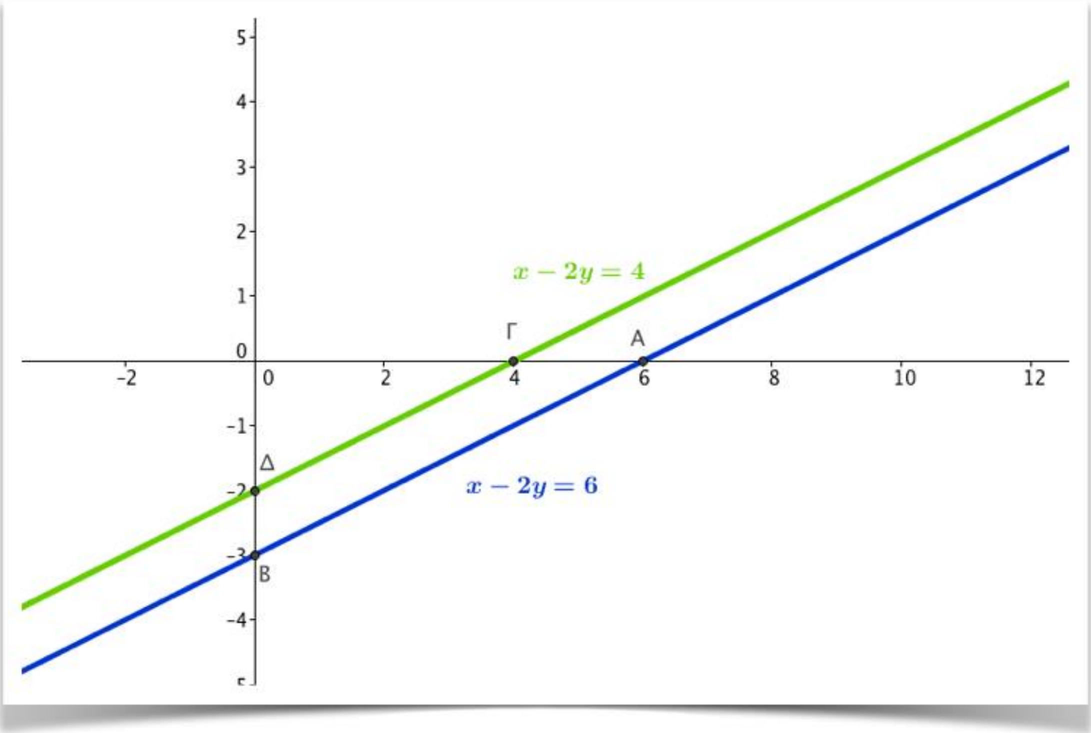
$$2x-4\cdot 0=8 \text{ ή } 2x=8 \text{ ή } x=4$$

Άρα, τέμνει τον $x'x$ στο $\Gamma(4,0)$.

Η ευθεία $2x-4y=8$ τέμνει τον yy' όπου $x=0$,

$$2\cdot 0-4\cdot y=8 \text{ ή } -4y=8 \text{ ή } y=-2$$

άρα, τέμνει τον yy' στο $\Delta(0,-2)$.



Από το σχήμα παρατηρούμε ότι οι ευθείες είναι παράλληλες, άρα δεν θα τέμνονται ποτέ. Άρα, το σύστημα είναι αδύνατο.

Παρόμοιες Ασκήσεις : Σχολικό βιβλίο: Α΄ Ομάδας / Άσκηση 1 (ii)

ΑΣΚΗΣΗ Β2 (16954)

Δίνεται η εξίσωση: $8x+2y=7\,(1)$

α) Να γράψετε μια άλλη εξίσωση που να μην έχει καμία κοινή λύση με την εξίσωση (1).

Μονάδες 10

β) Να παραστήσετε γραφικά στο επίπεδο τις δυο εξισώσεις και, με βάση το γράφημα, να εξηγήσετε γιατί το σύστημα είναι αδύνατο.

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Για να βρούμε μια εξίσωση που να μην έχει καμία κοινή λύση με την εξίσωση (1) θα πρέπει το σύστημα να είναι αδύνατο.

Μια τέτοια εξίσωση είναι η $8x+2y=16$.

<u>1ος Τρόπος:</u> Εύκολα παρατηρούμε ότι η $\varepsilon_1: 8x+2y=7$ έχει $\lambda\varepsilon_1=-4$ και η $\varepsilon_1: 8x+2y=16$ έχει $\lambda\varepsilon_2=-4$.

Άρα, $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$, άρα το σύστημα αδύνατο, άρα δεν έχουν καμία κοινή λύση.

<u>2ος Τρόπος:</u> Μια άλλη προσέγγιση θα ήταν με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών ή της αντικατάστασης.

$$8x + 2y = 7 \Rightarrow 2y = 7 - 8x \ (1)$$

$8x + 2y = 16 \overset{(1)}{\Rightarrow} 8x + 7 - 8x = 16 \Rightarrow 7 = 16$, αδύνατο, άρα δεν έχουν καμιά κοινή λύση.

β) Για να παραστήσουμε γραφικά κάθε ευθεία θα χρειαστούμε 2 σημεία.

Η ευθεία $8x + 2y = 7$ για $x = 1$ γίνεται,

$8 \cdot 1 + 2y = 7 \Rightarrow 2y = -1 \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2}$.

Άρα, διέρχεται από το σημείο $A\left(1, -\dfrac{1}{2}\right)$.

Επίσης,

$y = 5 \Rightarrow 8x + 2 \cdot 5 = 7 \Rightarrow 8x = -3 \Rightarrow x = -\dfrac{3}{8}$.

Άρα, διέρχεται από το σημείο $B\left(-\dfrac{3}{8}, 5\right)$.

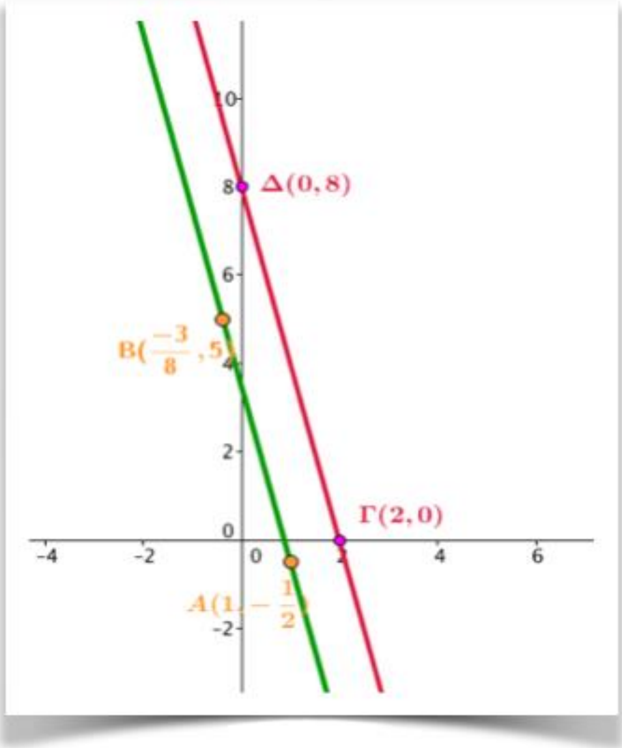
Όμοια για την ευθεία $8x + 2y = 16$,

$x = 2 \Rightarrow 8 \cdot 2 + 2y = 16 \Rightarrow y = 0$.

Άρα, διέρχεται από το σημείο $\Gamma(2, 0)$.

$x = 0 \Rightarrow 8 \cdot 0 + 2y = 16 \Rightarrow 2y = 16 \Rightarrow y = 8$.

Άρα, διέρχεται από το σημείο $\Delta(0, 8)$.



Από το σχήμα παρατηρούμε ότι οι ευθείες είναι παράλληλες, άρα δεν θα τέμνονται ποτέ. Άρα, το σύστημα είναι αδύνατο.

<u>Παρόμοιες Ασκήσεις :</u> Σχολικό βιβλίο: Α΄ Ομάδας / Άσκηση 1 (ii)

<u>Τράπεζα θεμάτων:</u> ΑΣΚΗΣΗ Β1 (16950)

ΑΣΚΗΣΗ Β3 (16957)

Δύο φίλοι, ο Μάρκος και ο Βασίλης, έχουν άθροισμα ηλικιών 27 χρόνια, και ο Μάρκος είναι μεγαλύτερος από το Βασίλη.

α) Μπορείτε να υπολογίσετε την ηλικία του καθενός;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 13

β) Δίνεται επιπλέον η πληροφορία ότι η διαφορά των ηλικιών τους είναι 5 χρόνια.

Να υπολογίσετε την ηλικία του καθενός.

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Έστω x η ηλικία του Μάρκου και y η ηλικία του Βασίλη. Πρέπει

$$x+y=27 \text{ και } x>y.$$

Δεν μπορούμε να βρούμε την ηλικία του καθενός με μοναδικό τρόπο,γιατί υπάρχουν πολλά ζεύγη τιμών που ικανοποιούν τις δοσμένες σχέσεις.

π.χ. $x=14$ και $y=13$ ή $x=15$ και $y=12$ ή $x=16$ και $y=11$ κ.τ.λ.

β) Εάν επιπλέον διαφέρουν κατά 5 χρόνια σημαίνει πως ο Μάρκος είναι 5 χρόνια μεγαλύτερος του Βασίλη, άρα: $x=5+y\ (1)$.

Άρα,

$$x+y=27 \overset{(1)}{\Rightarrow} 5+y+y=27 \Rightarrow 2y=22 \Rightarrow y=11.$$

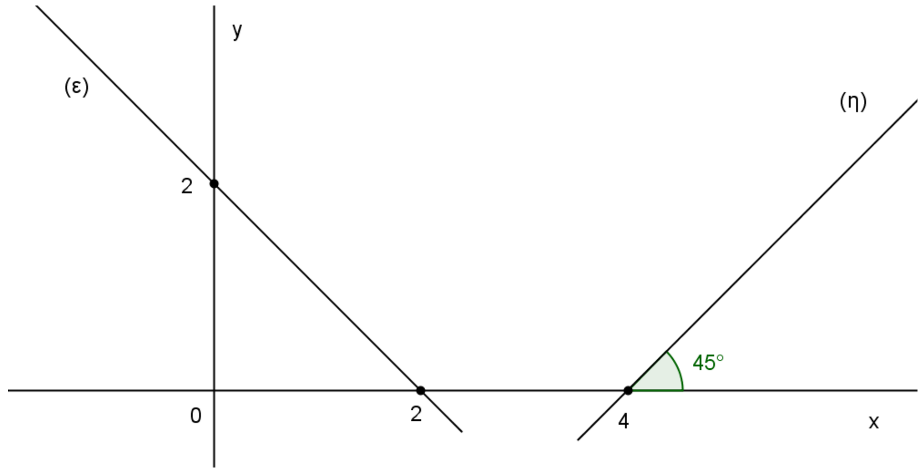
Άρα η σχέση (1) γίνεται,

$$x=5+11=16.$$

Άρα, ο Μάρκος είναι 16 χρονών και ο Βασίλης είναι 11 χρονών.

ΑΣΚΗΣΗ Β4 (16960)

α) Με βάση τα δεδομένα του σχήματος, να προσδιορίσετε τις εξισώσεις των ευθειών (ε) και (η).



Μονάδες 12

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους.

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (ε) έχει την μορφή $y=\alpha\cdot x+\beta$.

Αφού διέρχεται από τα σημεία $A(2,0)$ και $B(0,2)$ σημαίνει ότι αυτά τα σημεία θα την επαληθεύουν.

Άρα,

$$y=\alpha\cdot x+\beta \overset{B(0,2)}{\Rightarrow} 2=0\cdot\alpha+\beta \Rightarrow 2=\beta\ (1)$$

$$y=\alpha\cdot x+\beta \overset{A(2,0)}{\Rightarrow} 0=2\alpha+\beta \overset{(1)}{\Rightarrow} 0=2\alpha+2 \Rightarrow 2\alpha=-2 \Rightarrow \alpha=-1.$$

Άρα, $\varepsilon: y=-x+2$.

Η εξίσωση (η) έχει την μορφή $y=\alpha\cdot x+\beta$.

Αφού διέρχεται από το $\Gamma(4,0)$ σημαίνει ότι αυτό το σημείο θα την επαληθεύει.

Άρα,

$$y=\alpha\cdot x+\beta \overset{\Gamma(4,0)}{\Rightarrow} 0=4\alpha+\beta \ (2).$$

Όμως, η (η) σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία 45^o, άρα $\lambda_\eta=\varepsilon\varphi 45^o=1$, όμως $\lambda_\eta=\alpha$.

Άρα, $\alpha=1 \ (3)$.

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε,

$$0=4\cdot 1+\beta \Rightarrow \beta=-4.$$

Άρα, $(\eta): y=x-4$.

β) Για να βρούμε το σημείο τομής των $(\varepsilon): y=-x+2$ και $(\eta)=y=x-4$ λύνω το σύστημά τους:

$$\left.\begin{aligned} y&=-x+2 \\ y&=x-4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow -x+2=x-4 \Rightarrow 2+4=x+x \Rightarrow 6=2x \Rightarrow x=3$$

άρα $y=x-4 \Rightarrow y=3-4 \Rightarrow y=-1$

Άρα, οι $(\varepsilon),(\eta)$ τέμνονται στο $E(3,-1)$ στην προέκταση προφανώς του δοθέντος σχεδίου.

ΑΣΚΗΣΗ Β5 (17647)

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} x-2y=8 \\ \alpha x+\beta y=\gamma \end{cases}$ με παραμέτρους $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$

α) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α,β,γ ώστε το σύστημα αυτό να έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(2,-3)$

Μονάδες 13

β) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α,β,γ ώστε το σύστημα αυτό να είναι αδύνατο.

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

Έχουμε,

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}=\beta+2\alpha, \quad D_x=\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ \gamma & \beta \end{vmatrix}=8\beta+2\gamma, \quad D_y=\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ \alpha & \gamma \end{vmatrix}=\gamma-8\alpha$$

α) Επειδή το ζεύγος $(2,-3)$ είναι λύση του συστήματος θα πρέπει

$$D\neq 0 \text{ και } 2=\frac{D_x}{D}, -3=\frac{D_y}{D}$$

δηλαδή $\beta+2\alpha\neq 0$ και $2=\dfrac{8\beta+2\gamma}{\beta+2\alpha}, -3=\dfrac{\gamma-8\alpha}{\beta+2\alpha}$

άρα $\beta+2\alpha\neq 0$ και $2\alpha=3\beta+\gamma$

Επομένως αναζητούμε μία τιμή για τα α, β και γ που επαληθεύουν τις παραπάνω σχέσεις, έτσι πχ. για α = 2 και β = 1 έχουμε 4 = 3 + γ δηλαδή γ = 1.

Τελικά για α = 2, β = γ = 1 το σύστημα έχει μια μοναδική λύση την $(2,-3)$.

β) Για να είναι το σύστημα αδύνατο πρέπει:

$$D=0 \text{ και } D_x \neq 0 \text{ ή } D_y \neq 0$$

δηλαδή $\beta+2\alpha=0$ και $8\beta+2\gamma\neq 0 \Rightarrow \gamma\neq -4\beta$

Επομένως αναζητούμε μία τιμή για τα α, β και γ που επαληθεύουν τις παραπάνω σχέσεις, έτσι

πχ. για α = 2 τότε $\beta+2\cdot 2=0\Rightarrow \beta=-4$ άρα $\gamma\neq -4\beta \Rightarrow \gamma\neq -4\cdot(-4)\Rightarrow \gamma\neq 16$, οπότε

για α = 2, $\beta=-4$ και $\gamma\neq 16$, το σύστημα είναι αδύνατο.

Παρόμοιες Ασκήσεις : Σχολικό βιβλίο: Α΄ Ομάδας / Άσκηση 1 (ii)
Τράπεζα θεμάτων: ΑΣΚΗΣΗ Β14 (18637), ΑΣΚΗΣΗ Β15 (18638)

ΑΣΚΗΣΗ Β6 (17651)

Στο δημοτικό parking μιας επαρχιακής πόλης στις 10 το πρωί, το σύνολο των δίκυκλων και τετράτροχων οχημάτων που έχουν παρκάρει είναι 830 και το πλήθος των τροχών τους 2.700.

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

Μονάδες 13

β) Να βρείτε τον αριθμό των δίκυκλων καθώς και τον αριθμό των τετράτροχων οχημάτων.

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Έστω x το πλήθος των δίκυκλων οχημάτων, και y το πλήθος των τετράτροχων οχημάτων, όπου x και y θετικοί ακέραιοι.

Είναι

$$x+y=830$$

αφού το σύνολο των οχημάτων στο δημοτικό parking είναι 830.

Επιπλέον, επειδή κάθε δίκυκλο διαθέτει δύο τροχούς και κάθε τετράτροχο έχει τέσσερις τροχούς και το σύνολο των τροχών είναι 2700, θα ισχύει

$$2x+4y=2700.$$

Προκύπτει έτσι το σύστημα:

$$\begin{cases} x+y=830 \\ 2x+4y=2700 \end{cases}$$

β) θα λύσουμε το σύστημα του ερωτήματος (α) με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών:

$$\begin{cases} x+y=830 \\ 2x+4y=2700 \end{cases}\begin{vmatrix} \\ \div 2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=830 \\ x+2y=1350 \end{cases}\begin{vmatrix} \cdot(-1) \\ \\ \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x-y=-830 \ (1) \\ x+2y=1350 \ (2) \end{cases}$$

Προσθέτουμε τις εξισώσεις (1) και (2) και έχουμε:

$$y = 520$$

Αντικαθιστούμε στην (2) και παίρνουμε:

$$x + 2\cdot 520 = 1350 \Leftrightarrow x = 1350 - 1040 \Leftrightarrow x = 310$$

Άρα, υπάρχουν 310 δίκυκλα και 520 τετράτροχα στο parking.

ΑΣΚΗΣΗ Β7 (17683)

Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases}(\lambda+1)x + 2y = 3\\ 4x + (\lambda-1)y = -6\end{cases}, \text{ με παράμετρο } \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Αν $\lambda = -3$, να δείξετε ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Να βρείτε μια λύση.

Μονάδες 8

β) Αν $\lambda = 3$, να δείξετε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.

Μονάδες 8

γ) Αν $\lambda = 0$, να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση την οποία και να προσδιορίσετε.

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Για $\lambda = -3$ το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases}(-3+1)x + 2y = 3\\ 4x + (-3-1)y = -6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2x + 2y = 3\\ 4x - 4y = -6\end{cases}$$

Αλλάζουμε τα πρόσημα της $1^{ης}$ εξίσωσης και διαιρούμε και τα δύο μέλη της $2^{ης}$ εξίσωσης με το 2.

Έτσι, το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases}2x - 2y = -3\\ 2x - 2y = -3\end{cases}$$

Δηλαδή το σύστημα έχει μία μόνο εξίσωση, την $2x - 2y = -3 \Leftrightarrow y = \dfrac{2x+3}{2}$.

Άρα το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων της μορφής $\left(k, \dfrac{2k+3}{2}\right)$, $k \in \mathbb{R}$.

Θέτοντας $k = 0$ βρίσκουμε μία λύση του συστήματος, την $\left(0, \dfrac{2\cdot 0+3}{2}\right) = \left(0, \dfrac{3}{2}\right)$.

β) Για $\lambda = 3$ το σύστημα γράφεται $\begin{cases}(3+1)x + 2y = 3\\ 4x + (3-1)y = -6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x + 2y = 3\\ 4x + 2y = -6\end{cases}$, το οποίο είναι αδύνατο.

γ) Για $\lambda = 0$ το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases}(0+1)x + 2y = 3\\ 4x + (0-1)y = -6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x + 2y = 3\\ 4x - y = -6\end{cases},$$

το οποίο έχει ορίζουσα

$D=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)-2\cdot 4=-9\neq 0$, οπότε το σύστημα έχει μοναδική λύση, την

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{\begin{vmatrix}3 & 2\\ -6 & -1\end{vmatrix}}{-9}=\frac{3\cdot(-1)-2\cdot(-6)}{-9}=\frac{9}{-9}=-1$$

και

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & -6\end{vmatrix}}{-9}=\frac{1\cdot(-6)-3\cdot 4}{-9}=\frac{-18}{-9}=2.$$

Άρα η μοναδική λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x,y)=(-1,2)$.

Παρόμοιες Ασκήσεις : -
Σχολικό βιβλίο: Β΄ Ομάδας / Άσκηση 8

ΑΣΚΗΣΗ Β8 (17703)

Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις, $(\varepsilon_1): 2x-y=-1$ και $(\varepsilon_2): (\lambda-1)x-y=6$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) να είναι παράλληλες.

Μονάδες 8

β) Να παραστήσετε γραφικά τις (ε_1) και (ε_2), για $\lambda=3$.

Μονάδες 8

γ) Υπάρχει τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες (ε_1)και (ε_2) να ταυτίζονται;
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Το σύστημα των εξισώσεων των δοσμένων ευθειών είναι,

$$\begin{cases} y=2x+1\\ y=(\lambda-1)x-6\end{cases}$$

είναι αδύνατο αν, και μόνο αν, οι ευθείες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$είναι παράλληλες, αν ισχύει

$$2=\lambda-1\Leftrightarrow\lambda=3$$

Διαφορετική αντιμετώπιση του α) (με ύλη της Α' λυκείου)
Ισχύει ότι:

$\varepsilon_1//\varepsilon_2$ αν και μόνο αν έχουν τους ίδιους συντελεστές διεύθυνσης

Οι ευθείες $(\varepsilon_1): y=2x+1$ και $(\varepsilon_2): y=(\lambda-1)x-6$ έχουν συντελεστές διεύθυνσης $\alpha_1=2$ και $\alpha_2=\lambda-1$ αντίστοιχα, άρα πρέπει

$$\alpha_1=\alpha_2\Leftrightarrow 2=\lambda-1\Leftrightarrow\lambda=3$$

β) Για $\lambda=3$ η ευθεία (ε_2) παίρνει τη μορφή,

$$(\varepsilon_2): y = 2x - 6$$

Βρίσκουμε τα σημεία τομής των (ε_1) ,(ε_2) με τους άξονες για να τις σχεδιάσουμε.

Για την $(\varepsilon_1): y = 2x + 1$ είναι,

αν $x = 0$ τότε $y = 1$, άρα το σημείο τομής με τον $y'y$ είναι το $A(0,1)$

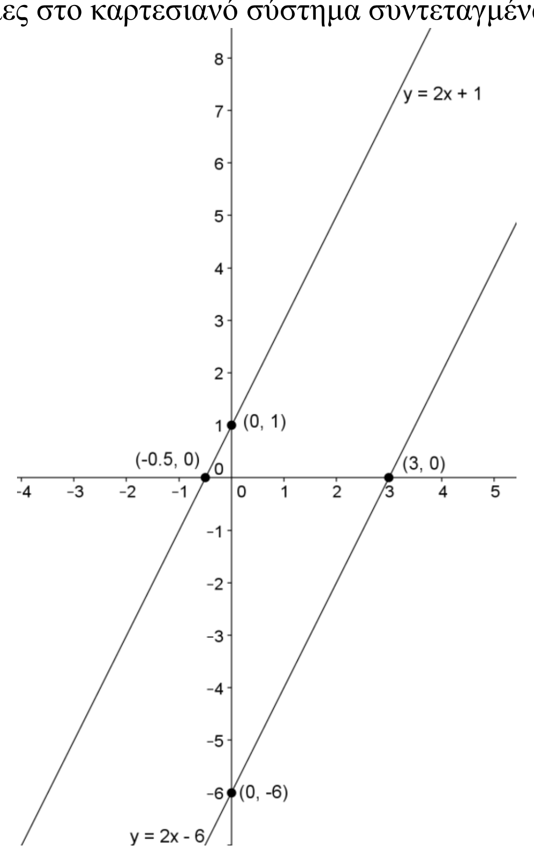
αν $y = 0$ τότε $0 = 2x + 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$, άρα το σημείο τομής με τον $x'x$ είναι το $B(-\frac{1}{2},0)$

Για την $(\varepsilon_2): y = 2x - 6$ ομοίως έχουμε,

αν $x = 0$ τότε $y = -6$, άρα το σημείο τομής με τον $y'y$ είναι το $\Gamma(0,-6)$

αν $y = 0$ τότε $0 = 2x - 6 \Leftrightarrow x = 3$, άρα το σημείο τομής με τον $x'x$ είναι το $\Delta(3,0)$

Επομένως οι ευθείες στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων δίνεται από το παρακάτω σχήμα



γ) Αν οι ευθείες (ε_1) ,(ε_2) ταυτίζονται, τότε το σύστημα των εξισώσεων τους,

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = (\lambda - 1)x - 6 \end{cases}$$

θα είναι αόριστο άρα πρέπει όλοι οι αντίστοιχοι συντελεστές των εξισώσεων να ταυτίζονται, δηλαδή

$$2 = \lambda - 1 \Leftrightarrow \lambda = 3 \text{ και } 1 = -6 \text{ που είναι αδύνατο.}$$

Άρα δεν υπάρχει τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) να ταυτίζονται.

Παρόμοιες Ασκήσεις : -
Σχολικό βιβλίο: Β΄ Ομάδας / Άσκηση 6

ΑΣΚΗΣΗ Β9 (17709)

Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): 2x+y=5$, $(\varepsilon_2): -2x+3y=-9$, $(\varepsilon_3): 3x+2y=7$

α) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$

ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των $(\varepsilon_1),(\varepsilon_3)$

Μονάδες 12

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α), να δείξετε ότι το κοινό σημείο των (ε_2) και (ε_3) είναι σημείο της (ε_1)

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) i. Το σημείο τομής των ευθειών (ε_1) ,(ε_2) είναι η λύση του συστήματος των εξισώσεών τους, δηλαδή η λύση του συστήματος,

$$\begin{cases} 2x+y=5 & (1) \\ -2x+3y=-9 & (2) \end{cases}$$

με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε

$0+4y=-4 \Leftrightarrow y=-1$ και αντικαθιστώντας στην (1): $2x-1=5 \Leftrightarrow 2x=6 \Leftrightarrow x=3$

Άρα το σημείο τομής των ευθειών (ε_1) ,(ε_2) είναι το $M(3,-1)$

ii. Όμοια το σημείο τομής των ευθειών (ε_1) ,(ε_3) είναι η λύση του συστήματος των εξισώσεών τους, δηλαδή η λύση του συστήματος,

$$\begin{cases} 2x+y=5 & (1) \\ 3x+2y=7 & (3) \end{cases}$$

πολλαπλασιάζουμε την (1) με -2 έχουμε, $-4x-2y=-10$ $(1)'$

προσθέτοντας τις (3) και $(1)'$ έχουμε,

$$-x+0=-3 \Leftrightarrow x=3$$

και αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε, $2\cdot 3+y=5 \Leftrightarrow y=-1$

Άρα το σημείο τομής και των ευθειών (ε_1) ,(ε_3) είναι το ίδιο σημείο, $M(3,-1)$

β) Από το υποερώτημα (α) προκύπτει ότι το σημείο $M(3,-1)$ ανήκει ταυτόχρονα και στις τρεις ευθείες (ε_1), (ε_2) και (ε_3), άρα είναι το σημείο τομής και των τριών ευθειών.

ΑΣΚΗΣΗ Β10 (17717)

Ένα θέατρο έχει 25 σειρές καθισμάτων χωρισμένες σε δύο διαζώματα.
Η κάθε μια από τις σειρές του κάτω διαζώματος έχει 14 καθίσματα και η κάθε μια από τις σειρές του πάνω διαζώματος έχει 16 καθίσματα, ενώ η συνολική χωρητικότητα του θεάτρου είναι 374 καθίσματα.

α) Αν x ο αριθμός σειρών του κάτω και y ο αριθμός σειρών του πάνω διαζώματος, να εκφράσετε τα δεδομένα του προβλήματος με ένα σύστημα δύο εξισώσεων.

Μονάδες 12

β) Πόσες σειρές έχει το πάνω και πόσες το κάτω διάζωμα;

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Είναι

$$\begin{cases} x+y=25 \\ 14x+16y=374 \end{cases}$$

β) Λύνουμε το σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης:

$$\begin{cases} x+y=25 \\ 14x+16y=374 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=25-x \\ 14x+16(25-x)=374 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=25-x \\ 14x+400-16x=374 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=25-x \\ -2x=-26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=12 \\ x=13 \end{cases},$$

άρα το πάνω διάζωμα έχει 12 σειρές και το κάτω έχει 13.

ΑΣΚΗΣΗ Β11 (17734)

Δίνονται οι ευθείες: $(\varepsilon_1): 2x+y=6 \quad, (\varepsilon_2): x-2y=-3$

α) Να προσδιορίσετε αλγεβρικά το κοινό τους σημείο Μ.

Μονάδες 13

β) Να βρείτε για ποια τιμή του α, η ευθεία $3x+\alpha y=\alpha+5$ διέρχεται από το Μ.

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Αρκεί να λύσουμε το σύστημα $\begin{cases} 2x+y=6 \\ x-2y=-3 \end{cases}$.

Έχουμε:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-4-1=-5,\ D_x=\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}=-12+3=-9,\ D_y=\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-6-6=-12$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{-9}{-5},\frac{-12}{-5}\right)=\left(\frac{9}{5},\frac{12}{5}\right),$$

δηλαδή το κοινό σημείο των ευθειών είναι το $M\left(\frac{9}{5},\frac{12}{5}\right)$.

β) Για να διέρχεται η ευθεία από το Μ, αρκεί να την επαληθεύει, δηλαδή

$$3\frac{9}{5}+\alpha\frac{12}{5}=\alpha+5 \overset{\cdot 5}{\Leftrightarrow} 27+12\alpha=5\alpha+25 \Leftrightarrow 7\alpha=-2 \Leftrightarrow \alpha=-\frac{2}{7}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β12 (18637)

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} x-2y=9 \\ \alpha x+\beta y=\gamma \end{cases}$ με παραμέτρους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

α) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ, ώστε το σύστημα αυτό να έχει μοναδική λύση του ζεύγος $(1,-4)$

Μονάδες 13

β) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ, ώστε το σύστημα αυτό να είναι αδύνατο και να επαληθεύσετε γραφικά την επιλογή σας.

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Αφού το ζεύγος $(1,-4)$ είναι λύση του συστήματος, άρα θα επαληθεύει τις εξισώσεις του συστήματος. Είναι,

$$x-2y=9 \underset{y=-4}{\overset{x=1}{\Rightarrow}} 1-2\cdot(-4)=9 \Rightarrow 9=9$$

άρα επαληθεύει την εξίσωση $x-2y=9$

Είναι:

$$\alpha x+\beta y=\gamma \underset{y=-4}{\overset{x=1}{\Rightarrow}} \alpha\cdot 1+\beta\cdot(-4)=\gamma \Rightarrow \alpha-4\beta=\gamma$$

Για α = 2 και β = 1 προκύπτει:

$$\alpha-4\beta=\gamma \underset{\beta=1}{\overset{\alpha=2}{\Rightarrow}} 2-4=\gamma \Rightarrow \gamma=-2$$

Άρα,

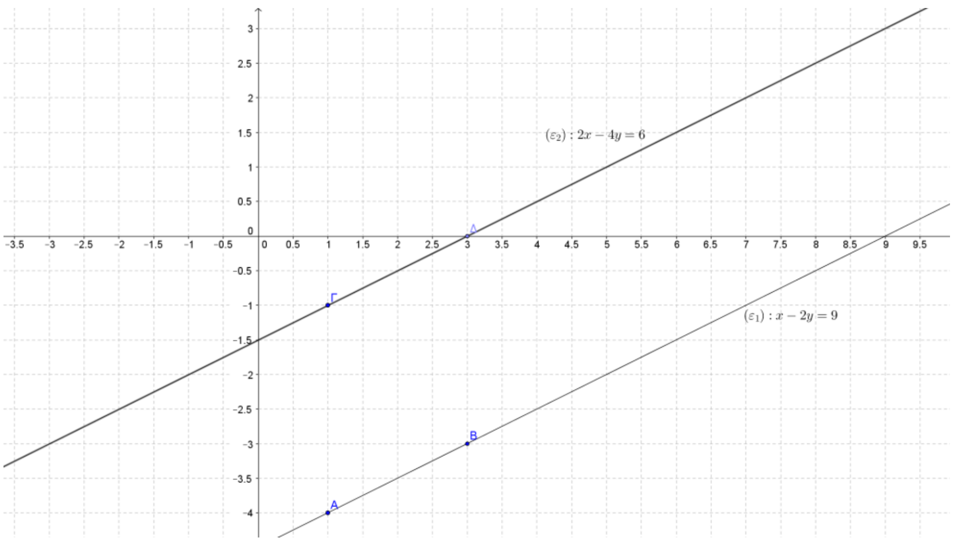
$$(\alpha, \beta, \gamma)=(2,1,-2)$$

β) Για να είναι ένα σύστημα αδύνατο πρέπει οι συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών να είναι ίσοι και οι σταθεροί όροι άνισοι, δηλαδή οι ευθείες θα πρέπει να είναι παράλληλες.

Άρα, για α = 2, β = –4 και γ = 6 προκύπτει σύστημα ΑΔΥΝΑΤΟ

Πράγματι, σχηματίζουμε τις ευθείες:

$(\varepsilon_1): x-2y=9$, $(\varepsilon_2): 2x-4y=6$ σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.



Παρόμοιες Ασκήσεις : -
Τράπεζα θεμάτων: ΑΣΚΗΣΗ Β5 (17647), ΑΣΚΗΣΗ Β15 (18638)

ΑΣΚΗΣΗ Β13 (18638)

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} 2x+y=3 \\ \alpha x+\beta y=\gamma \end{cases}$ με παραμέτρους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

α) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ, ώστε το σύστημα αυτό να έχει μοναδική λύση του ζεύγος $(-1, 5)$

Μονάδες 13

β) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ, ώστε το σύστημα αυτό να έχει άπειρες λύσεις και να επαληθεύσετε γραφικά την επιλογή σας.

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Αφού το ζεύγος $(-1, 5)$ είναι λύση του συστήματος, άρα θα επαληθεύει τις εξισώσεις του συστήματος.

Είναι:

$$2x+y=3 \overset{x=-1}{\underset{y=5}{\Rightarrow}} 2\cdot(-1)+5=3 \Rightarrow 3=3$$

άρα επαληθεύει την εξίσωση $2x+y=3$

Είναι:

$$\alpha x+\beta y=\gamma \overset{x=-1}{\underset{y=5}{\Rightarrow}} \alpha\cdot(-1)+\beta\cdot 5=\gamma \Rightarrow -\alpha+5\beta=\gamma$$

Για α = 1 και β = 1 προκύπτει: $-\alpha+5\beta=\gamma \overset{\alpha=1}{\underset{\beta=1}{\Rightarrow}} -1+5=\gamma \Rightarrow \gamma=4$

Άρα: $(\alpha, \beta, \gamma)=(1, 1, 4)$

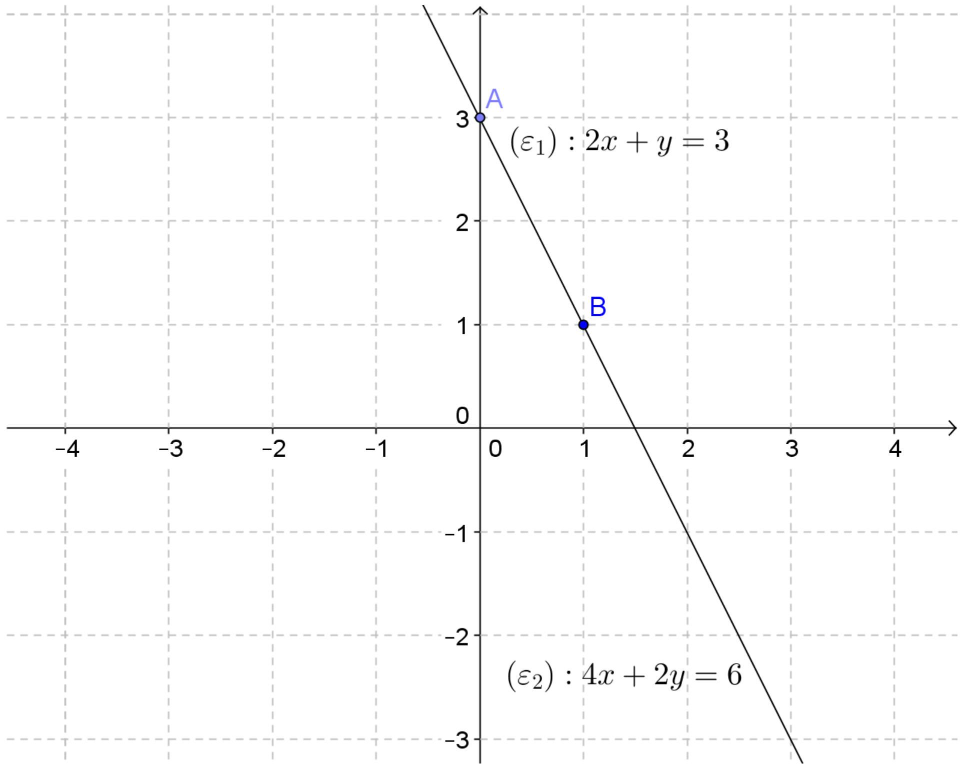
β) Για να έχει ένα σύστημα άπειρες λύσεις πρέπει οι συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών να είναι ίσοι και οι σταθεροί όροι επίσης ίσοι, δηλαδή οι ευθείες θα πρέπει να ταυτίζονται.

Άρα, για α = 4, β = 2 και γ = 6 προκύπτει σύστημα με άπειρες λύσεις.

Πράγματι, σχηματίζουμε τις ευθείες:

$$(\varepsilon_1): 2x+y=3,\ (\varepsilon_2): 4x+2y=6$$

σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.



Παρόμοιες Ασκήσεις :
Τράπεζα θεμάτων: ΑΣΚΗΣΗ Β5 (17647), ΑΣΚΗΣΗ Β14 (18637)

ΑΣΚΗΣΗ Β14 (20329)

Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda x + y = 2 \\ \lambda x + \lambda y = \lambda + 1 \end{cases}, \text{ με παράμετρο } \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι για τις ορίζουσες D, Dx ,Dy του συστήματος ισχύουν

$$D = \lambda(\lambda - 1),\ Dx = \lambda - 1 \text{ και } Dy = \lambda(\lambda - 1)$$

Μονάδες 15

β) Αν είναι $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$, τότε να λύσετε το σύστημα.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \cdot \lambda - \lambda \cdot 1 = \lambda^2 - \lambda = \lambda \cdot (\lambda - 1)$$

$$Dx = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ \lambda + 1 & \lambda \end{vmatrix} = 2 \cdot \lambda - (\lambda + 1) \cdot 1 = 2\lambda - \lambda - 1 = \lambda - 1$$

$$Dy = \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ \lambda & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda \cdot (\lambda + 1) - 2\lambda = \lambda^2 + \lambda - 2\lambda = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$$

β) Αν $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$, τότε είναι $D \neq 0$ και συνεπώς το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$(x,y)=\left(\frac{Dx}{D},\frac{Dy}{D}\right)=\left(\frac{\lambda-1}{\lambda(\lambda-1)},\frac{\lambda(\lambda-1)}{\lambda(\lambda-1)}\right)=\left(\frac{1}{\lambda},1\right)$$

Παρόμοιες ασκήσεις: Σχολικό βιβλίο: Α΄ Ομάδας/8 σελ. 23

«Θέμα Δ»

ΑΣΚΗΣΗ Δ1 (17834)

Για τις ηλικίες των μελών μιας τριμελούς οικογένειας ισχύουν τα παρακάτω:
Η ηλικία της μητέρας είναι τριπλάσια από την ηλικία του παιδιού.
Ο λόγος της ηλικίας του πατέρα προς την ηλικία του παιδιού ισούται με $\frac{11}{3}$.
Επιπλέον το άθροισμα των ηλικιών και των τριών ισούται με 115 χρόνια.
α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους.

Μονάδες 13

β) Να βρείτε την ηλικία του καθενός.

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Έστω,
x: η ηλικία του πατέρα,
y: η ηλικία της μητέρας,
z: η ηλικία του παιδιού.

Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε:

$y=3z$ (αφού η ηλικία της μητέρας είναι τριπλάσια από την ηλικία του παιδιού)
$\frac{x}{z}=\frac{11}{3}$ (αφού ο λόγος της ηλικίας του πατέρα προς την ηλικία του παιδιού είναι $\frac{11}{3}$)
και $x+y+z=115$ (αφού το άθροισμα των ηλικιών και των τριών ισούται με 115 χρόνια).

Επομένως δημιουργείται το σύστημα των τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους,

$$\begin{cases} y=3z \\ \dfrac{x}{z}=\dfrac{11}{3} \\ x+y+z=115 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3z \\ 3x=11z \\ x+y+z=115 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3z \\ x=\dfrac{11z}{3} \\ x+y+z=115 \end{cases}$$

β) Έχουμε,

$$\begin{cases} y=3z \\ x=\dfrac{11z}{3} \\ x+y+z=115 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3z \\ x=\dfrac{11z}{3} \\ \dfrac{11z}{3}+3z+z=115 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3z \\ x=\dfrac{11z}{3} \\ 11z+9z+3z=345 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3z \\ x=\dfrac{11z}{3} \\ 23z=345 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=45 \\ x=55 \\ z=15 \end{cases}$$

άρα η μητέρα είναι 45 ετών, ο πατέρας 55 ετών και το παιδί 15 ετών.

ΑΣΚΗΣΗ Δ2 (17835)

Δίνονται οι ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις $x+(\lambda+2)y=3$, $(\lambda-2)x+5y=3$ αντίστοιχα και $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, να βρείτε τη σχετική θέση των δύο ευθειών.

Μονάδες 13

β) Στην περίπτωση που οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Α των δύο ευθειών.

Μονάδες 7

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ για την οποία το σημείο Α ανήκει στην ευθεία με εξίσωση: $x+2y=3$.

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

α) Η σχετική θέση των ευθειών ε_1 και ε_2 θα βρεθεί με τη βοήθεια του πλήθους των λύσεων του συστήματος των εξισώσεών τους, που δίνει και το πλήθος των κοινών τους σημείων.

Το σύστημα αυτό είναι το: $(\Sigma)\ \begin{cases} x+(\lambda+2)y=3 \\ (\lambda-2)x+5y=3 \end{cases}$ και έχει ορίζουσα:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & \lambda+2 \\ \lambda-2 & 5 \end{vmatrix}=1\cdot5-(\lambda+2)\cdot(\lambda-2)=5-(\lambda^2-4)=5-\lambda^2+4=-\lambda^2+9$$

$$=-(\lambda+3)(\lambda-3)$$

Αν $D\neq0\Leftrightarrow-(\lambda+3)(\lambda-3)\neq0\Leftrightarrow\lambda+3\neq0$ και $\lambda-3\neq0\Leftrightarrow\lambda\neq-3$ και $\lambda\neq3$, τότε το σύστημα (Σ) έχει μοναδική λύση, που σημαίνει ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 έχουν ένα και μοναδικό σημείο τομής (με συντεταγμένες τις λύσεις του παραπάνω συστήματος), συνεπώς οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται.

Αν $\lambda=3$, τότε το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} x+5y=3 \\ x+5y=3 \end{cases}\Leftrightarrow x+5y=3\text{, που έχει άπειρες λύσεις.}$$

Συνεπώς όταν $\lambda=3$ οι ευθείες ε_1 και ε_2 έχουν άπειρα σημεία τομής, δηλαδή ταυτίζονται.

Αν $\lambda=-3$, τότε το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} x-y=3 \\ -5x+5y=3 \end{cases} \Big| \cdot(-5) \Leftrightarrow \begin{cases} -5x+5y=-15 \\ -5x+5y=3 \end{cases},$$

άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

Συνεπώς οι ευθείες ε_1 και ε_2 δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, οπότε είναι παράλληλες.

Τελικά:

- Για $\lambda \neq -3$ και $\lambda \neq 3$, οι ευθείες τέμνονται.
- Για $\lambda = 3$, τότε οι ευθείες ταυτίζονται .
- Για $\lambda = -3$, τότε οι ευθείες είναι παράλληλες.

β) Στο ερώτημα (α) είδαμε ότι οι ευθείες τέμνονται όταν $\lambda \neq -3$ και $\lambda \neq 3$.

Τότε το σύστημα (Σ) έχει ορίζουσες ως προς x και y

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & \lambda+2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot 5 - 3\cdot(\lambda+2) = 15-3\lambda-6 = -3\lambda+9 = -3(\lambda-3)$$

και

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ \lambda-2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3 - 3\cdot(\lambda-2) = 3-3\lambda+6 = -3\lambda+9 = -3(\lambda-3),$$

συνεπώς η μοναδική λύση (x_0, y_0) του συστήματος, για το εκάστοτε $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq \pm 3$, προσδιορίζεται από τους τύπους:

$$x_0 = \frac{D_x}{D} = \frac{-3(\lambda-3)}{-3(\lambda+3)(\lambda-3)} = \frac{1}{\lambda+3}, \quad y_0 = \frac{D_y}{D} = \frac{-3(\lambda-3)}{-3(\lambda+3)(\lambda-3)} = \frac{1}{\lambda+3},$$

άρα το σημείο τομής Α των δύο ευθειών έχει συντεταγμένες:

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{\lambda+3}, \frac{1}{\lambda+3}\right), \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq \pm 3.$$

γ) Το σημείο Α ανήκει στην ευθεία $x+2y=3$, όταν ισχύει $x_0+2y_0=3$ άρα

$$\frac{1}{\lambda+3} + 2\cdot\frac{1}{\lambda+3} = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{\lambda+3} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda+3} = 1 \Leftrightarrow \lambda+3=1 \Leftrightarrow \lambda=-2,$$

λύση που είναι δεκτή αφού το $-2 \neq \pm 3$.

Άρα το Α ανήκει στην ευθεία $x+2y=3$ όταν $\lambda=-2$.

Παρόμοιες Ασκήσεις :

Σχολικό βιβλίο: Β΄ Ομάδας / Άσκηση 7

ΑΣΚΗΣΗ Δ3 (17839)

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} (\alpha-1)x+3y=3 \\ x+(\alpha+1)y=3 \end{cases}$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι αν το σύστημα έχει μοναδική λύση την (x_0, y_0), τότε $x_0 = y_0$.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα:

i. έχει άπειρες σε πλήθος λύσεις και να δώσετε τη μορφή τους.

Μονάδες 6

ii. Δεν έχει λύση.

Μονάδες 4

γ) Να εξετάσετε τις σχετικές θέσεις των δύο ευθειών που προκύπτουν από τις εξισώσεις του παραπάνω συστήματος για $\alpha=3$, $\alpha=2$, $\alpha=-2$.

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

α) Το σύστημά μας έχει ορίζουσες:

$$D=\begin{vmatrix}\alpha-1 & 3\\ 1 & \alpha+1\end{vmatrix}=(\alpha-1)(\alpha+1)-3\cdot1=\alpha^2-1-3=\alpha^2-4=(\alpha-2)(\alpha+2),$$

$$D_x=\begin{vmatrix}3 & 3\\ 3 & \alpha+1\end{vmatrix}=3(\alpha+1)-3\cdot3=3\alpha+3-9=3\alpha-6=3(\alpha-2) \text{ και}$$

$$D_y=\begin{vmatrix}\alpha-1 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix}=3(\alpha-1)-3\cdot1=3\alpha-3-3=3\alpha-6=3(\alpha-2).$$

Το σύστημα έχει μοναδική λύση (x_0,y_0) όταν

$D\neq0\Leftrightarrow(\alpha-2)(\alpha+2)\neq0\Leftrightarrow\alpha-2\neq0$ και $\alpha+2\neq0\Leftrightarrow\alpha\neq2$ και $\alpha\neq-2$.

Η μοναδική αυτή λύση βρίσκεται από τους τύπους:

$$x_0=\frac{D_x}{D}=\frac{3(\alpha-2)}{(\alpha-2)(\alpha+2)}=\frac{3}{\alpha+2} \text{ και } y_0=\frac{D_y}{D}=\frac{3(\alpha-2)}{(\alpha-2)(\alpha+2)}=\frac{3}{\alpha+2}$$

δηλαδή για τη λύση (x_0,y_0) ισχύει ότι $x_0=y_0=\dfrac{3}{\alpha+2}$.

β) Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις ή είναι αδύνατο όταν

$$D=0\Leftrightarrow(\alpha-2)(\alpha+2)=0\Leftrightarrow\alpha-2=0 \text{ ή } \alpha+2=0\Leftrightarrow\alpha=2 \text{ ή } \alpha=-2.$$

i. Για $\alpha=2$ το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases}x+3y=3\\ x+3y=3\end{cases}\Leftrightarrow x+3y=3, \text{ οπότε έχει άπειρες λύσεις.}$$

Η σχέση $x+3y=3\Leftrightarrow x=3-3y$ συνεπώς οι άπειρες λύσεις του συστήματος είναι όλα τα ζεύγη της μορφής $(3-3k,3)$, $k\in\mathbb{R}$.

ii. Για $\alpha=-2$ το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases}-3x+3y=3\\ x-y=3\end{cases}\left|:(-3)\right.\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=-1\\ x-y=3\end{cases}, \text{ δηλαδή είναι αδύνατο.}$$

γ) Για $\alpha=3$ το σύστημα έχει μοναδική λύση, συνεπώς οι ευθείες που προκύπτουν από τις εξισώσεις του συστήματος έχουν ένα μοναδικό σημείο τομής, δηλαδή τέμνονται.
Για $\alpha=2$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, συνεπώς οι ευθείες που προκύπτουν από τις εξισώσεις του συστήματος έχουν άπειρα κοινά σημεία, δηλαδή ταυτίζονται.

Για $\alpha=-2$ το σύστημα είναι αδύνατο, συνεπώς οι ευθείες που προκύπτουν από τις εξισώσεις του συστήματος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, συνεπώς είναι παράλληλες.

□Παρόμοιες Ασκήσεις : Σχολικό βιβλίο: Β΄ Ομάδας / Άσκηση 8

ΑΣΚΗΣΗ Δ4 (20336)

Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{cases} 2x-4y=1-\lambda \\ x+6y=\lambda+2 \end{cases}, \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει λύση για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό λ.

Μονάδες 7

β) Να βρείτε τα x και y συναρτήσει του λ.

Μονάδες 8

γ) Να προσδιορίσετε την τιμή του λ, για την οποία οι ευθείες: $2x - 4y = 1 - \lambda$, $x + 6y = \lambda + 2$ και $16x + 16y = 19$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}=12+4=16\neq 0$$

άρα το σύστημα έχει λύση για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό λ.

β) Είναι,

$$D_x=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ \lambda+2 & 6 \end{vmatrix}=6(1-\lambda)+4(\lambda+2)=6-6\lambda+4\lambda+8=-2\lambda+14$$

και

$$D_y=\begin{vmatrix} 2 & 1-\lambda \\ 1 & \lambda+2 \end{vmatrix}=2(\lambda+2)-(1-\lambda)=2\lambda+4-1+\lambda=3\lambda+3$$

Επομένως η μοναδική λύση του συστήματος είναι,

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-2\lambda+14}{16}=\frac{-\lambda+7}{8} \quad \text{και} \quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{3\lambda+3}{16}$$

γ) Οι ευθείες $2x - 4y = 1 - \lambda$, $x + 6y = \lambda + 2$ και $16x + 16y = 19$ τέμνονται στο σημείο

$$A\left(\frac{-\lambda+7}{8},\frac{3\lambda+3}{16}\right) \text{ (από β ερώτημα).}$$

Για να διέρχεται και η ευθεία $16x + 16y = 19$ από το Α πρέπει να επαληθεύουν οι συντεταγμένες της, δηλαδή,

$$16\cdot\frac{-\lambda+7}{8}+16\cdot\frac{3\lambda+3}{16}=19\Rightarrow 2(-\lambda+7)+3\lambda+3=19\Rightarrow \lambda=19-14-3\Rightarrow \lambda=2$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ5 (4_20925)

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : \lambda x + y = 1$ και $\varepsilon_2 : x + \lambda y = \lambda^2$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ οι δύο ευθείες τέμνονται και να γράψετε τις συντεταγμένες του κοινού τους σημείου συναρτήσει του λ.

Μονάδες 13

β) Για ποια τιμή του λ οι δύο ευθείες είναι παράλληλες;

Μονάδες 6

γ) Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\lambda x + \lambda^2 y = \lambda^3$ και $2x + 2\lambda y = \lambda^2 - 1$ είναι παράλληλες.

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

α) Οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται αν και μόνο αν το σύστημα των εξισώσεών τους

$$\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y = \lambda^2 \end{cases} (\Sigma)$$

έχει μοναδική λύση.

Είναι

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \cdot \lambda - 1 \cdot 1 = \lambda^2 - 1 = (\lambda+1)(\lambda-1)$$

Οπότε για να έχει το σύστημα μοναδική λύση πρέπει,

$$D \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)(\lambda-1) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda + 1 \neq 0 \text{ και } \lambda - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -1 \text{ και } \lambda \neq 1$$

Δηλαδή, οι ευθείες τέμνονται όταν $\lambda \neq -1$ και $\lambda \neq 1$ και οι συντεταγμένες του κοινού τους σημείου θα είναι η λύση (x, y) του συστήματος, όπου,

$$x = \frac{Dx}{D} \text{ και } y = \frac{Dy}{D}$$

Είναι,

$$Dx = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda^2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - \lambda^2 = \lambda(1-\lambda) \text{ και } Dy = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda^2 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 1 = (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)$$

άρα,

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{\lambda(1-\lambda)}{(\lambda+1)(\lambda-1)} = \frac{-\lambda(\lambda-1)}{(\lambda+1)(\lambda-1)} = -\frac{\lambda}{\lambda+1}$$

και

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)}{(\lambda-1)(\lambda+1)} = \frac{\lambda^2+\lambda+1}{\lambda+1}$$

Τελικά, $M\left(-\frac{\lambda}{\lambda+1}, \frac{\lambda^2+\lambda+1}{\lambda+1}\right)$ το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2.

β) Οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες αν και μόνο αν το σύστημα (Σ) είναι αδύνατο, δηλαδή

$$D = 0 \text{ και } \{Dx \neq 0 \text{ ή } Dy \neq 0\}$$

$D=0 \Leftrightarrow \lambda=-1$ ή $\lambda=1$

$Dx \neq 0 \Leftrightarrow \lambda(1-\lambda) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$

$Dy \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$

αφού, το τριώνυμο $\lambda^2+\lambda+1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -3 < 0$, άρα $\lambda^2+\lambda+1 \neq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Συνεπώς, για $\lambda=-1$ είναι $D=0$ και $Dx=-2=Dy \neq 0$ και $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

γ) Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 συμπίπτουν, τότε το (Σ) έχει άπειρες λύσεις. Οπότε,

$$D = Dx = Dy = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

Πράγματι, για λ=1 το (Σ) γίνεται:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=1 \end{cases} \text{ που είναι αόριστο,}$$

δηλαδή έχει άπειρες λύσεις, άρα $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2$.

Έστω

$$\eta_1 : \lambda x + \lambda^2 y = \lambda^3 \text{ και } \eta_2 : 2x + 2\lambda y = \lambda^2 - 1$$

Για λ=1, είναι

$$\begin{cases} \eta_2 : 2x+2y=0 \\ \eta_1 : x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+y=1 \end{cases}$$

που είναι προφανώς αδύνατο σύστημα αφού τα πρώτα μέλη των εξισώσεων είναι ίδια ενώ τα δεύτερα μέλη είναι άνισα, άρα $\eta_1 // \eta_2$

1.2 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

«Θέμα Β»

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (17650)

Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκος $x\text{ cm}$, πλάτος $y\text{ cm}$, περίμετρο ίση με 38cm και με την ακόλουθη ιδιότητα:

Αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 2 cm και μειώσουμε το πλάτος του κατά 4 cm, θα προκύψει ένα ορθογώνιο με εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του αρχικού.

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τις τιμές των διαστάσεων *x, y* του ορθογωνίου.

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Το εμβαδόν του αρχικού ορθογωνίου με διαστάσεις x και y είναι $x\cdot y$ και η περίμετρός του $2x+2y=38$. Αν αυξήσουμε το μήκος του αρχικού ορθογωνίου κατά 2 cm, αυτό θα γίνει x + 2 , ενώ αν μειώσουμε το πλάτος του κατά 4 cm, αυτό θα γίνει y – 4.

Συνεπώς, το εμβαδόν του νέου ορθογωνίου θα είναι $(x+2)\cdot(y-4)$, είναι ίσο με το εμβαδόν του αρχικού, οπότε,

$$(x+2)\cdot(y-4)=x\cdot y$$

Προκύπτει έτσι το σύστημα:

$$\begin{cases}(x+2)\cdot(y-4)=x\cdot y\\ 2x+2y=38\end{cases}$$

β) Για να βρούμε τις διαστάσεις του ορθογωνίου, θα λύσουμε το σύστημα του ερωτήματος (α) με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών.

$$\begin{cases}(x+2)\cdot(y-4)=x\cdot y\\ 2x+2y=38\end{cases}\begin{vmatrix}\\ \div 2\end{vmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}xy-4x+2y-8=xy\\ x+y=19\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4x+2y=8\\ x+y=19\end{cases}\begin{vmatrix}\div 2\\ \cdot(-1)\end{vmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+y=4\ (1)\\ -x-y=-19\ (2)\end{cases}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις (1) και (2) και έχουμε:

$$-3x=-15\Leftrightarrow x=5$$

Αντικαθιστούμε στην (2) και έχουμε

$$-5-y=-19\Leftrightarrow y=19-5\Leftrightarrow y=14$$

Άρα, x = 5 cm και y = 14 cm οι διαστάσεις του ορθογωνίου.

Παρόμοιες Ασκήσεις :

Σχολικό βιβλίο: Β΄ Ομάδας / Άσκηση 3

ΑΣΚΗΣΗ Β2 (17659)

α) Να λύσετε αλγεβρικά το σύστημα $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$

Μονάδες 15

β) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τις λύσεις του συστήματος που βρήκατε στο ερώτημα α)

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Το σύστημα $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$ γράφεται ισοδύναμα $\begin{cases} y = x^2 + 1 \ (1) \\ x = y - 1 \ (2) \end{cases}$.

Αντικαθιστούμε το x της σχέσης (2) στη σχέση (1) και παίρνουμε:

$$y = (y-1)^2 + 1 \Rightarrow y = (y^2 - 2y + 1) + 1 \Rightarrow y^2 - 3y + 2 = 0$$

Το τριώνυμο $y^2 - 3y + 2$ έχει $\alpha = 1, \beta = -3, \gamma = 2$ και διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1.$$

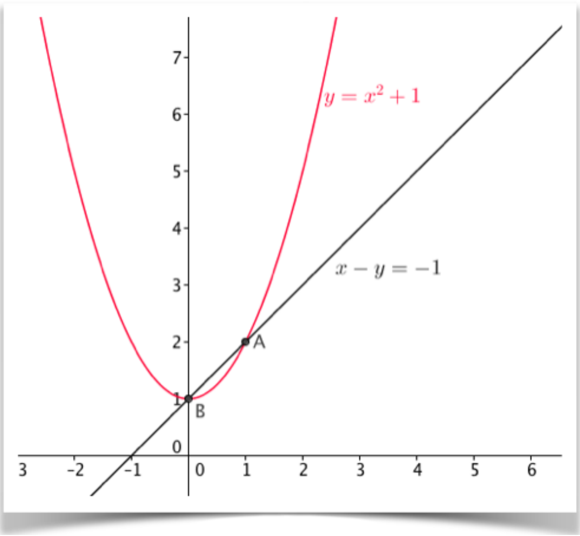
οπότε,

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow y = 2 \text{ ή } y = 1.$$

Για $y = 2 \overset{(2)}{\Rightarrow} x = 1$, ενώ για $y = 1 \overset{(2)}{\Rightarrow} x = 0$.

Άρα το σύστημα έχει δύο λύσεις, τις $(0,1)$ και $(1,2)$.

β) Η πρώτη εξίσωση $y = x^2 + 1$ του συστήματος παριστάνει μια παραβολή, ενώ η δεύτερη εξίσωση $x - y = -1$ παριστάνει μια ευθεία. Οι συντεταγμένες των κοινών σημείων Α, Β της παραβολής και της ευθείας θα μας δώσουν τις δύο λύσεις του συστήματος (βλ. παρακάτω σχήμα)



Παρόμοιες Ασκήσεις :
Σχολικό βιβλίο: Α΄ Ομάδας / Άσκηση 2

«Θέμα Δ»

ΑΣΚΗΣΗ Δ1 (17850)

Ο Κώστας έχει τρία παιδιά.
Δύο δίδυμα κορίτσια και ένα αγόρι.
Στην ερώτηση πόσων χρονών είναι τα παιδιά του απάντησε ως εξής.
1. Το άθροισμα των ηλικιών και των τριών παιδιών είναι 14
2. Το γινόμενο της ηλικίας της κόρης μου επί την ηλικία του γιου μου είναι 24
3. Το άθροισμα των ηλικιών των κοριτσιών είναι μικρότερο από την ηλικία του αγοριού.

α) Να γράψετε τις εξισώσεις που περιγράφουν τα στοιχεία 1. και 2. που έδωσε ο Κώστας.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τις ηλικίες των παιδιών του Κώστα.

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Έστω x: ηλικία αγοριού και y: ηλικία κοριτσιού με $x>0,\ y>0$

Επομένως θα ισχύουν οι σχέσεις: $\begin{cases} x+2y=14 \\ x\cdot y=24 \end{cases}$

β) Λύνουμε το σύστημα και έχουμε:

$$\begin{cases} x=14-2y \\ (14-2y)\cdot y=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=14-2y \\ -2y^2+14y=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=14-2y \\ -y^2+7y-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=14-2y \\ y^2-7y+12=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=14-2y \\ (y-3)\cdot(y-4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=14-2y \\ y=3 \text{ ή } y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=14-6 \\ y=3 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=14-8 \\ y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=3 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}$$

Από όπου έχουμε: $(x,y)=(8,3)$ δεκτή ή $(x,y)=(6,4)$ απορρίπτεται αφού $2y>x$

Επομένως το αγόρι είναι 8 ετών και τα κορίτσια 3 ετών.

ΑΣΚΗΣΗ Δ2 (20335)

Η Άλκηστη και η Ελένη αγαπούν την πεζοπορία και βρίσκονται το καλοκαίρι στην Αμοργό. Αποφασίζουν να περπατήσουν ένα μονοπάτι περίπου 16 χιλιομέτρων που συνδέει τη Χώρα με τον όρμο της Αιγιάλης. Η Άλκηστη ανηφορίζει το μονοπάτι από την Αιγιάλη για να συναντήσει την Ελένη που μένει στη Χώρα. Υπολογίζει ότι η ταχύτητά της έχει σταθερό μέτρο 2,4 χιλιόμετρα την ώρα. Την ίδια στιγμή, όμως, ξεκινά η Ελένη να κατηφορίζει το ίδιο μονοπάτι και υπολογίζει ότι η ταχύτητά της έχει σταθερό μέτρο 4 χιλιόμετρα την ώρα. Μια δεδομένη χρονική στιγμή σε κάποιο σημείο της διαδρομής συναντά την Άλκηστη.

α) Αν t είναι ο χρόνος που περπάτησαν μέχρι να συναντηθούν και s η απόσταση του σημείου συνάντησης από την Αιγιάλη, να κατασκευάσετε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους το t και το s, το οποίο να περιγράφει την παραπάνω κατάσταση.

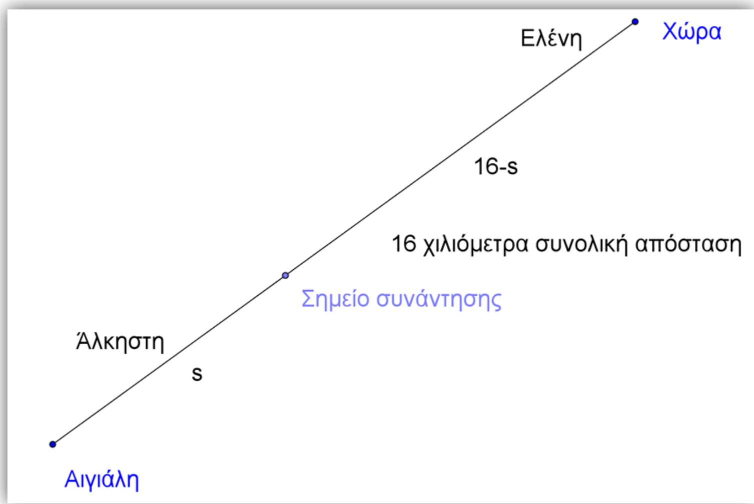
Μονάδες 10

β) Σε πόση απόσταση από τη Χώρα και ποια χρονική στιγμή θα συναντηθούν οι δυο κοπέλες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Η συνολική απόσταση της Χώρας με την Αιγιάλη είναι 16 χιλιόμετρα και s η απόσταση του σημείου συνάντησης από την Αιγιάλη, οπότε $16-s$ χιλιόμετρα θα είναι η απόσταση του σημείου συνάντησης από την Χώρα.



Γνωρίζουμε ότι η Άλκηστη ανηφορίζει το μονοπάτι για την Χώρα με σταθερή ταχύτητα $2,4$ χιλιόμετρα την ώρα. Συνεπώς ισχύει $2,4=\frac{s}{t}$ (1) την στιγμή που συναντά την Ελένη.

Γνωρίζουμε ότι η Ελένη κατηφορίζει το μονοπάτι για την Αιγιάλη με σταθερή ταχύτητα 4 χιλιόμετρα την ώρα. Συνεπώς ισχύει $4=\frac{16-s}{t}$ (2) την στιγμή που συναντά την Άλκηστη.

Οπότε από τις (1) και (2) το ζητούμενο σύστημα θα είναι

$$\begin{cases} 2,4=\dfrac{s}{t} \\ 4=\dfrac{16-s}{t} \end{cases}$$

β) Ζητείται να βρεθούν τα s και t οπότε προχωρούμε στην επίλυση του συστήματος που προέκυψε από το α ερώτημα και έχουμε:

$$\begin{cases} 2,4=\dfrac{s}{t} \\ 4=\dfrac{16-s}{t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=2,4t \\ 4t=16-2,4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=2,4t \\ 4t+2,4t=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=2,4t \\ 6,4t=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=2,4t \\ t=\dfrac{16}{6,4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=2,4t \\ t=2,5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s=2,4\cdot 2,5 \\ t=2,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=6 \\ t=2,5 \end{cases}$$

Συνεπώς τα κορίτσια θα συναντηθούν μετά από $2,5$ ώρες από την στιγμή που ξεκίνησαν και θα βρίσκονται $16-s=16-6=10$ χιλιόμετρα από την Χώρα.

ΑΣΚΗΣΗ Δ3 (20337)

Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο ίση με 24cm έχει την ακόλουθη ιδιότητα: αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 3cm και ελαττώσουμε το πλάτος του κατά 2cm, θα προκύψει ένα ορθογώνιο με εμβαδόν διπλάσιο του εμβαδού του αρχικού ορθογωνίου.

α) Να εκφράσετε την παραπάνω κατάσταση με ένα σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Έστω $x>0$ το μήκος και $y>2$ το πλάτος του ορθογωνίου. Τότε η περίμετρος του θα είναι $\Pi=x+y+x+y=2x+2y$

Επομένως είναι

$$\Pi=24 \Leftrightarrow 2x+2y=24 \Leftrightarrow x+y=12$$

Αν αυξήσουμε το μήκος κατά 3cm και ελαττώσουμε το πλάτος κατά 2cm τότε το νέο μήκος θα είναι $x+3$ ενώ το νέο πλάτος $y-2$. Το εμβαδόν E_1 του νέου ορθογωνίου που θα προκύψει θα είναι διπλάσιο του εμβαδού E του αρχικού

δηλαδή,

$$E_1=2E \Leftrightarrow (x+3)\cdot(y-2)=2x\cdot y \Leftrightarrow x\cdot y-2x+3y-6=2x\cdot y \Leftrightarrow x\cdot y+2x-3y+6=0$$

Συνεπώς το σύστημα που περιγράφει την παραπάνω κατάσταση είναι

$$\begin{cases} x+y=12 \\ x\cdot y+2x-3y+6=0 \end{cases} \text{ με } 0<x<10 \text{ και } y>2$$

β) Για να βρούμε τις διαστάσεις του ορθογωνίου x,y θα πρέπει να λύσουμε το μη γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} x+y=12 \\ x\cdot y+2x-3y+6=0 \end{cases}$$

Θα λύσουμε το σύστημα αυτό με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

Επομένως έχουμε,

$$\begin{cases} x+y=12 \\ x\cdot y+2x-3y+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 - y \\ (12-y)\cdot y + 2(12-y) - 3y + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 - y \\ 12y - y^2 + 24 - 2y - 3y + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 - y \\ -y^2 + 7y + 30 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 - y \\ -y^2 + 7y + 30 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \ \text{ ή } \ x = 2 \\ y = -3 \ \text{ ή } \ y = 10 \end{cases}.$$

Οι λύσεις του συστήματος είναι τα ζεύγη $(15,-3)$ και $(2,10)$

Επειδή όμως τα x, y είναι θετικοί αριθμοί οι διαστάσεις του αρχικού ορθογωνίου είναι $x = 2$ και $y = 10$ και του νέου ορθογωνίου

$$x = 1 + 3 = 4 \text{ και } y = 10 - 2 = 8$$

Παρατηρήσεις

- Συνήθως μήκος x ενός ορθογωνίου λέμε τη μεγαλύτερη πλευρά ενώ πλάτος y τη μικρότερη πλευρά. Στην άσκηση δίνεται $x < y$
- Είναι $y > 2$ διότι αν ήταν $y < 2$ όταν θα ελαττώσουμε το πλάτος κατά 2 θα πάρουμε αρνητικό αριθμό. Επίσης αφού είναι $y > 2$ τότε από τη σχέση

$$x + y = 12 \Leftrightarrow x = 12 - y \ \text{ θα είναι και } \ x < 12$$

□ Παρόμοιες Ασκήσεις: Σχολικό βιβλίο: § 1.2 Παράδειγμα 1

ΑΣΚΗΣΗ Δ4 (4_20920)

α) Να λύσετε το σύστημα (Σ1): $\begin{cases} xy = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$

(Μονάδες 10)

β) Είναι όλες οι λύσεις του συστήματος (Σ1), λύσεις και του (Σ2): $\begin{cases} |xy| = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$;

Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

(Μονάδες 7)

γ) Είναι όλες οι λύσεις του συστήματος (Σ2), λύσεις και του (Σ1); Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Η σχέση $xy = 6 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ και $y \neq 0$, τότε:

$$xy = 6 \Leftrightarrow y = \frac{6}{x},$$

οπότε με αντικατάσταση στην $x^2 + y^2 = 13$, προκύπτει:

$$x^2 + \left(\frac{6}{x}\right)^2 = 13 \Leftrightarrow x^2 + \frac{36}{x^2} = 13 \Leftrightarrow x^4 + 36 = 13x^2 \Leftrightarrow x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$$

Θέτουμε $x^2 = \omega \geq 0$ οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$\omega^2 - 13\omega + 36 = 0.$$

Αυτή είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς ω με διακρίνουσα

$$\Delta = (-13)^2 - 4\cdot 1\cdot 36 = 169 - 144 = 25 > 0$$

άρα έχει δύο διαφορετικές ρίζες, τις

$$\omega_{1,2} = \frac{-(-13)\pm\sqrt{25}}{2\cdot 1} = \frac{13\pm 5}{2}$$

δηλαδή

$$\omega_1 = \frac{13+5}{2} = \frac{18}{2} = 9 \quad \text{ή} \quad \omega_2 = \frac{13-5}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Συνεπώς:

$$\omega = 9 \ \text{ή} \ \omega = 4$$
$$x^2 = 9 \ \text{ή} \ x^2 = 4$$
$$x = \pm 3 \ \text{ή} \ x = \pm 2$$

- Για $x = 3$ η σχέση $y = \frac{6}{x}$ δίνει $y = \frac{6}{3} = 2$
- Για $x = -3$ η σχέση $y = \frac{6}{x}$ δίνει $y = \frac{6}{-3} = -2$
- Για $x = 2$ η σχέση $y = \frac{6}{x}$ δίνει $y = \frac{6}{2} = 3$.
- Για $x = -2$ η σχέση $y = \frac{6}{x}$ δίνει $y = \frac{6}{-2} = -3$

Άρα το σύστημα $(\Sigma 1)$ έχει 4 λύσεις, τις $(x,y) = (3,2)$ ή $(-3,-2)$ ή $(2,3)$ ή $(-2,-3)$.

β) <u>1ος τρόπος</u>: Η $|xy| = 6 \Leftrightarrow xy = 6$ ή $xy = -6$, άρα όλες οι λύσεις της εξίσωσης $xy = 6$ θα περιλαμβάνονται και στις λύσεις της $|xy| = 6$. Συνεπώς και οι λύσεις του συστήματος $(\Sigma 1)$ είναι λύσεις και του συστήματος $(\Sigma 2)$, καθώς οι δεύτερες εξισώσεις των δύο συστημάτων ταυτίζονται.

<u>2ος τρόπος</u>: Θα λύσουμε το σύστημα $(\Sigma 2)$ και θα διαπιστώσουμε ότι μέσα στις λύσεις του περιλαμβάνονται και οι λύσεις του συστήματος $(\Sigma 1)$.

Έχουμε:

$$\begin{cases} |xy| = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 6 \ \text{ή} \ xy = -6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} xy = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \ \text{ή} \ \begin{cases} xy = -6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \right).$$

Παρατηρούμε ότι η επίλυση του $(\Sigma 2)$ οδηγεί σε δύο εναλλακτικά συστήματα, το πρώτο εκ των οποίων είναι το $(\Sigma 1)$. Συνεπώς οι λύσεις του $(\Sigma 1)$ θα συμπεριλαμβάνονται μέσα στις λύσεις του $(\Sigma 2)$.

Φυσικά μπορούμε να προχωρήσουμε κανονικά στην επίλυση και να βρούμε τις λύσεις των επιμέρους συστημάτων, άρα και όλες τις λύσεις του $(\Sigma 2)$.

Το πρώτο είναι το σύστημα $(\Sigma 1)$ το οποίο, όπως είδαμε στο (α) ερώτημα, έχει λύσεις τις

$$(x,y) = (3,2) \text{ ή } (-3,-2) \text{ ή } (2,3) \text{ ή } (-2,-3)$$

Το δεύτερο σύστημα λύνεται εντελώς παρόμοια και βρίσκουμε ότι έχει λύσεις τις

$$(x,y) = (3,-2) \text{ ή } (-3,2) \text{ ή } (2,-3) \text{ ή } (-2,3)$$

Άρα το σύστημα $(\Sigma 2)$ έχει συνολικά 8 λύσεις, τις

$$(x,y) = (3,2) \text{ ή } (-3,-2) \text{ ή } (2,3) \text{ ή } (-2,-3) \text{ ή } (3,-2) \text{ ή } (-3,2) \text{ ή } (2,-3) \text{ ή } (-2,3)$$

Παρατηρούμε ότι μέσα στις λύσεις του $(\Sigma 2)$ περιλαμβάνονται και οι λύσεις του $(\Sigma 1)$.

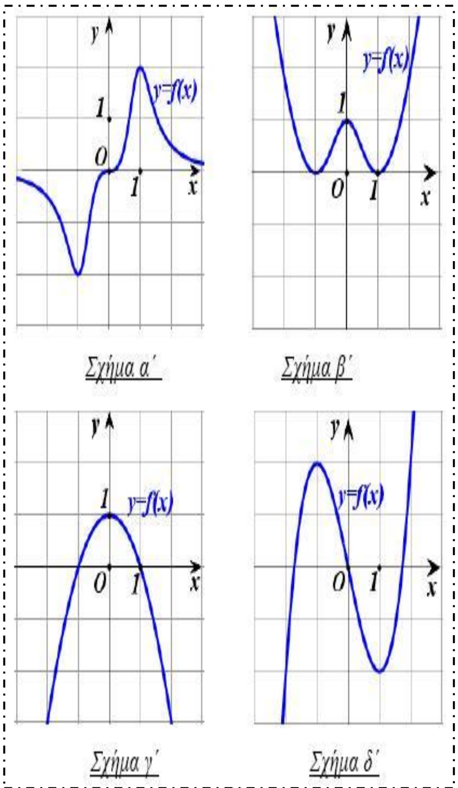
γ) Λύνοντας το σύστημα $(\Sigma 2)$ (δες τον 2ο τρόπο στο (β) ερώτημα) διαπιστώνουμε ότι έχει 8 λύσεις, ενώ το $(\Sigma 1)$ έχει 4, συνεπώς δεν συμπεριλαμβάνονται όλες οι λύσεις του $(\Sigma 2)$ και στο $(\Sigma 1)$. Πράγματι τα ζεύγη $(3,-2)$, $(-3,2)$, $(2,-3)$ και $(-2,3)$ είναι λύσεις του $(\Sigma 2)$ αλλά όχι και λύσεις του $(\Sigma 1)$.

Η ΘΕΩΡΙΑ ΜΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ

§ 2.1 : ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ – ΑΚΡΟΤΑΤΑ – ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $\mathbf{x_1, x_2 \in \Delta}$ **με** $\mathbf{x_1 < x_2}$ **ισχύει:** $\mathbf{f(x_1) < f(x_2)}$.

- Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $\mathbf{x_1, x_2 \in \Delta}$ **με** $\mathbf{x_1 < x_2}$ **ισχύει:** $\mathbf{f(x_1) > f(x_2)}$.



Σχήμα α΄ Σχήμα β΄ Σχήμα γ΄ Σχήμα δ΄

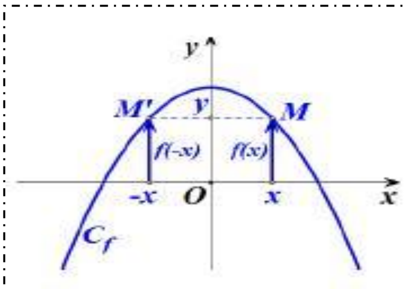
- Μια συνάρτηση που είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ λέγεται **γνήσια μονότονη** στο Δ.

- Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει στο $\mathbf{x_0 \in A}$ (ολικό) **ελάχιστο** όταν:
  $\mathbf{f(x) \geq f(x_0)}$, **για κάθε** $\mathbf{x \in A}$

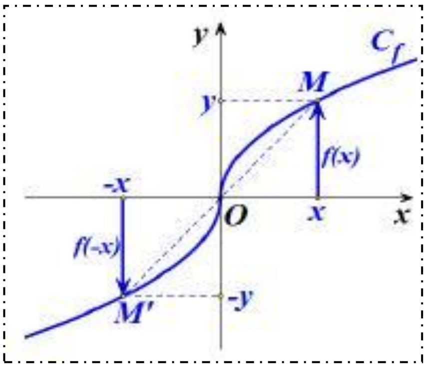
- Το $x_0 \in$Α λέγεται **θέση ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **ολικό ελάχιστο** ή απλώς ελάχιστο της συνάρτησης f και το συμβολίζουμε με **min** $\boldsymbol{f}$**(x).**

- Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει στο $\mathbf{x_0 \in A}$ (ολικό) **μέγιστο** όταν:
  $\mathbf{f(x) \leq f(x_0)}$, **για κάθε** $\mathbf{x \in A}$

- Το $\mathbf{x_0 \in A}$ λέγεται **θέση μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **ολικό μέγιστο** ή απλώς **μέγιστο** της f και το συμβολίζουμε με **max** $\boldsymbol{f}$**(x)** .
- Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης λέγονται **ολικά ακρότατα** αυτής.
- Μια συνάρτηση ενδέχεται να έχει και μέγιστο και ελάχιστο (Σχ. α΄) ή μόνο ελάχιστο (Σχ. β') ή μόνο μέγιστο (Σχ. γ') ή να μην έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο (Σχ. δ').



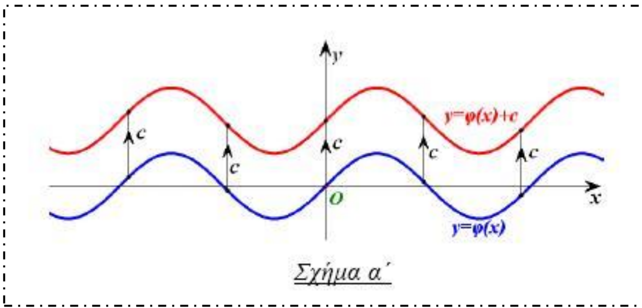
- Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, θα λέγεται **άρτια,** όταν για κάθε **x∈Α ισχύει: -x∈Α και** $\boldsymbol{f}$**(-x) =** $\boldsymbol{f}$**(x)**
- Γενικά:
  - Το πεδίο ορισμού μιας άρτιας συνάρτησης είναι **«συμμετρικό»** ως προς το 0
  - Η γραφική παράσταση μιας **άρτιας** συνάρτησης έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα y 'y



- Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, θα λέγεται **περιττή**, όταν για κάθε x∈Α ισχύει: -x∈Α και f(-x) = - f(x)
- Γενικά:
  - Το πεδίο ορισμού μιας **περιττής** συνάρτησης είναι **«συμμετρικό»** ως προς το 0
  - Η γραφική παράσταση μιας **περιττής** συνάρτησης έχει **κέντρο συμμετρίας** την αρχή των αξόνων

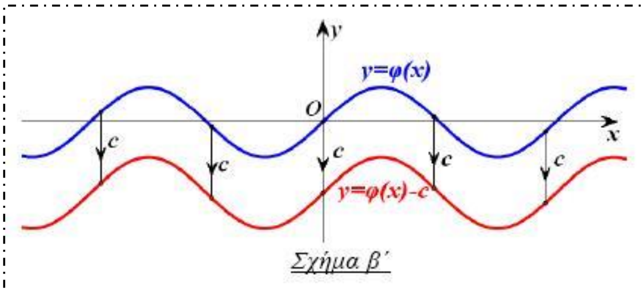
§ 2.2 : ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ – ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με: $\boldsymbol{f(x) = \varphi(x) + c}$**, όπου c > 0**, προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα πάνω**



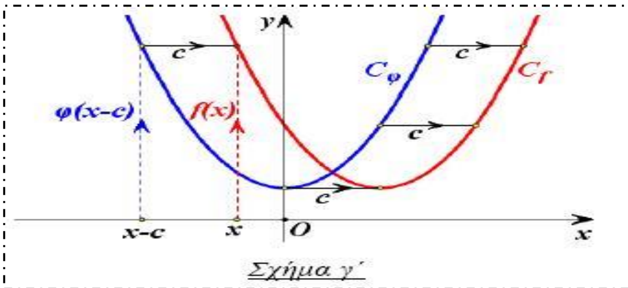
Σχήμα α΄

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με: $\boldsymbol{f(x) = \varphi(x) - c}$**, όπου c > 0** , προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα κάτω**



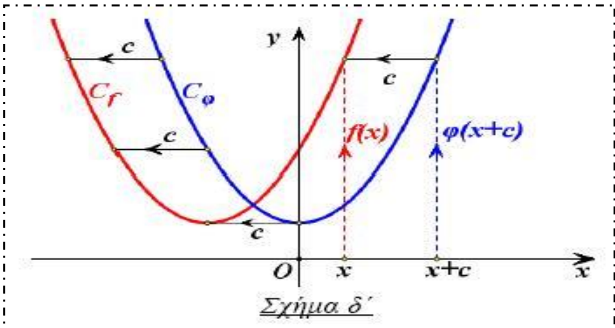
Σχήμα β΄

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με: $\boldsymbol{f(x) = \varphi(x - c)}$**, όπου c > 0,** προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα δεξιά.**



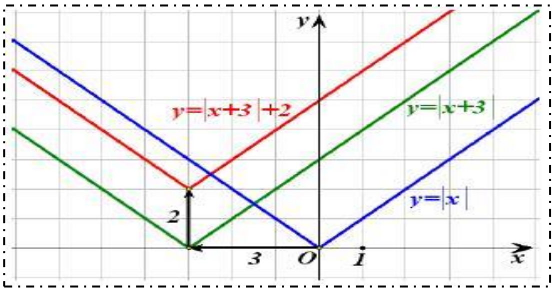
Σχήμα γ΄

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, με: $\boldsymbol{f(x) = \varphi(x + c)}$**, όπου c > 0,** προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα αριστερά**



Σχήμα δ΄

- Για να παραστήσουμε γραφικά τις συναρτήσεις της μορφής: $\boldsymbol{f(x) = \varphi(x \pm c) \pm d}$**, με c, d > 0** αξιοποιούμε τόσο την οριζόντια όσο και την κατακόρυφη μετατόπιση καμπύλης.



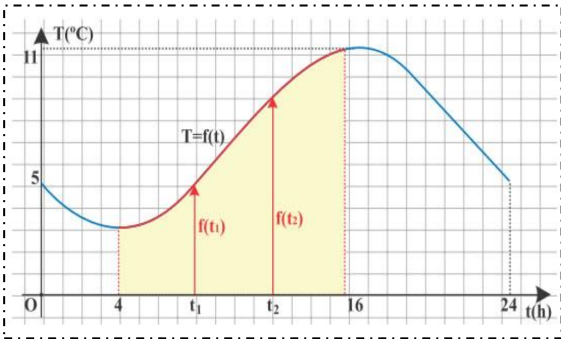
ΓΕΝΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

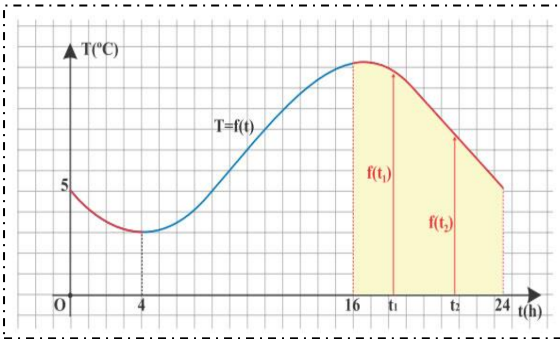
1. Έχουμε,

- Όταν μας λένε ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f διέρχεται από ένα σημείο (α, β) τότε ισχύει η σχέση f(α)=β
- Αν δοθεί ότι μία συνάρτηση είναι μονότονη και επιπλέον δοθούν δύο σημεία από τα οποία διέρχεται η γραφική της παράσταση , τότε μπορώ να χρησιμοποιήσω τον ορισμό της μονοτονίας και να προσδιορίσω το είδος της μονοτονίας π.χ. f μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα (2,5) και (3,1) τότε f(2)=5 και f(3)=1 άρα αφού 2<3 και 5>1 άρα f(2) >f(3) τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.
- Επίλυση ανισώσεων με την βοήθεια της μονοτονίας συνάρτησης Αν μας ζητηθεί να λύσουμε μια ανίσωση της μορφής: f(παράστασης) < Α γράφω το Α ως συνάρτηση της f, δηλαδή f(κ)=Α και τότε έχω: f(παράστασης) < f(κ) άρα αν η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα έχω: παράσταση < κ ενώ αν η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα έχω: παράσταση > κ

2. Εφαρμογή μετατοπίσεων στις συναρτήσεις της μορφής: $f(x) = φ(x \pm c) \pm d$, με $c, d > 0$, αξιοποιούμε τόσο την οριζόντια όσο και την κατακόρυφη μετατόπιση καμπύλης.

3. Μία συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα όταν η γραφική της παράσταση «ανεβαίνει» καθώς «κινείται από αριστερά προς τα δεξιά» και γνησίως φθίνουσα όταν «κατεβαίνει» καθώς «κινείται από αριστερά προς τα δεξιά»





4. Έχουμε,

- Τομές μιας γραφικής παράστασης με άξονες:
  Α) Τομή με τον άξονα των x΄x : Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης τέμνει τον άξονα των x΄x όταν $f(α)=0$ τότε σημείο τομής το (α,0)
  Για να βρω τις τομές με τον άξονα των x΄x λύνω την εξίσωση $f(x)=0$
  Β) Τομή με τον άξονα των y΄y : Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης τέμνει τον άξονα των y΄y όταν $f(0)=β$ τότε σημείο τομής το (0,β)
  Για να βρω τις τομές με τον άξονα των y΄y βρίσκω την $f(0)= y$
- Αν δοθεί ότι μία συνάρτηση είναι μονότονη και επιπλέον δοθούν δύο σημεία από τα οποία διέρχεται η γραφική της παράσταση, τότε μπορώ να χρησιμοποιήσω τον ορισμό της μονοτονίας και να προσδιορίσω την διάταξη των σημείων π.χ. f μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα (2, f(2)) και (3, f(3)) τότε αφού 2<3 και f γνησίως αύξουσα τότε f(2) <f(3) και αν η f είναι γνησίως φθίνουσα f(2) >f(3).

- Για βρω το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης η οποία περιέχει ρίζες παίρνω περιορισμούς , δηλαδή συγκεκριμένα παίρνω όλες τις υπόριζες ποσότητες μεγαλύτερες ή ίσες του μηδενός και κάνω αν χρειαστεί όλες τις απαραίτητες συναληθεύσεις.

- Ορισμός ελάχιστου: $f\left(x\right)\ge f\left(x_0\right)$, για κάθε $x\in A$.

2.1: Μονοτονία – Ακρότατα – Συμμετρίες Συνάρτησης

«Θέμα Β»

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (16962)

Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία Α(5,2) και Β(4,9).

α) Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της f αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Μονάδες 12

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(5-3x)<2$

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα $A(5,2)$ και $B(4,9)$, έχουμε

$$f(5)=2 \text{ και } f(4)=9.$$

α) Παρατηρούμε ότι $5>4$ και πως $f(5)<f(4)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

β) Θα λύσουμε την ανίσωση: $f(5-3x)<2$. Παρατηρούμε ότι $f(5)=2$.

Έχουμε,

$$f(5-3x)<2 \Leftrightarrow f(5-3x)<f(5) \overset{f:\searrow}{\Leftrightarrow} 5-3x>5 \Leftrightarrow -3x>0 \Leftrightarrow x<0$$

ΑΣΚΗΣΗ Β2 (17688)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$, με $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)\le 1$.

Μονάδες 8

β) Είναι το 1 η μέγιστη τιμή της συνάρτησης; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Μονάδες 8

γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή.

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $f(x)\le 1$ ή ισοδύναμα ότι

$$\frac{2x}{x^2+1}\le 1 \Leftrightarrow 2x\le x^2+1 \Leftrightarrow x^2-2x+1\ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\ge 0, \text{ το οποίο ισχύει.}$$

Τα παραπάνω βήματα είναι ισοδύναμα, άρα ισχύει και η ζητούμενη σχέση.

β) Παρατηρούμε ότι το $f(1)=\dfrac{2\cdot 1}{1^2+1}=\dfrac{2}{2}=1$. Άρα η σχέση $f(x)\le 1$ γράφεται $f(x)\le f(1)$, για κάθε πραγματικό αριθμό x. Επομένως το 1 είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f.

γ) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ (διότι το τριώνυμο x^2+1 έχει διακρίνουσα αρνητική, άρα $x^2+1>0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x).

Επίσης, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$f(-x)=\frac{2\cdot(-x)}{(-x)^2+1}=\frac{-2x}{x^2+1}=-\frac{2x}{x^2+1}=-f(x)$$

Άρα η f είναι περιττή συνάρτηση.

Παρόμοια άσκηση βιβλίου για το γ) : 4, 5/Α΄ Ομάδας/σελ. 38-39

ΑΣΚΗΣΗ Β3 (17698)

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Να απαντήσετε τα παρακάτω ερωτήματα:

α) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$

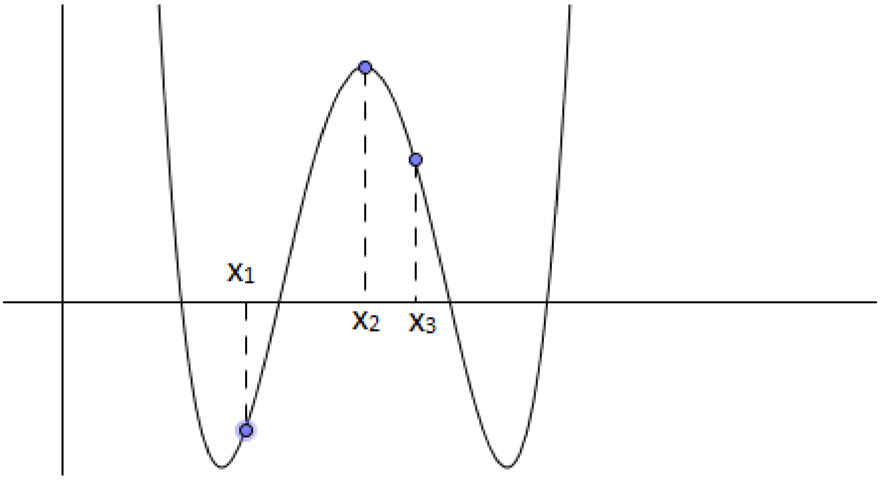
Μονάδες 10

β) Είναι η συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Μονάδες 10

γ) Παρουσιάζει η f μέγιστο στο σημείο x_2; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Μονάδες 5



ΛΥΣΗ

α) Από το σχήμα με τη C_f που δίνεται, έχουμε,

$$f(x_1) < 0 < f(x_3) < f(x_2)$$

β) Η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ αφού υπάρχουν $x_1 < x_2 < x_3$ και είναι

$$f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$$

δηλαδή δεν ισχύει ο ορισμός ούτε της γνησίως αύξουσας, ούτε της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης.

Διαφορετική αντιμετώπιση του β)

Έστω ότι η f είναι γνησίως μονότονη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, από το σχήμα έχουμε

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right) ,$$

άρα είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Όμως

$$x_2 < x_3 \Rightarrow f\left(x_2\right) > f\left(x_3\right) \text{ που είναι άτοπο.}$$

Άρα δεν είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$

γ) Η f δεν παρουσιάζει μέγιστο στο x_2, αφού από τη C_f που δίνεται, βλέπουμε ότι καθώς το x παίρνει πολύ μεγαλύτερες τιμές από το x_3, οι τιμές της f αυξάνονται απεριόριστα και πάνω από το $f(x_3)$.

ΑΣΚΗΣΗ Β4 (17732)

Έστω γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από τα σημεία $A(2,3)$ και $B(4,5)$

α) Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της f

Μονάδες 13

β) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο -2, να δείξετε ότι $f(0)>0$

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Αφού η f είναι γνησίως μονότονη και 3 = f(2) < f(4) = 5, δηλ. για

$$2<4 \Rightarrow f(2)<f(4)$$, η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο (-2,0), δηλ. f(-2) = 0.
Επομένως, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, θα ισχύει

$$-2<0 \overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow} f(-2)<f(0) \Leftrightarrow 0<f(0) \text{ ή } f(0)>0.$$

2.2 Κατακόρυφη – Οριζόντια Μετατόπιση Καμπύλης

«ΘΕΜΑ Β»

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (16965)

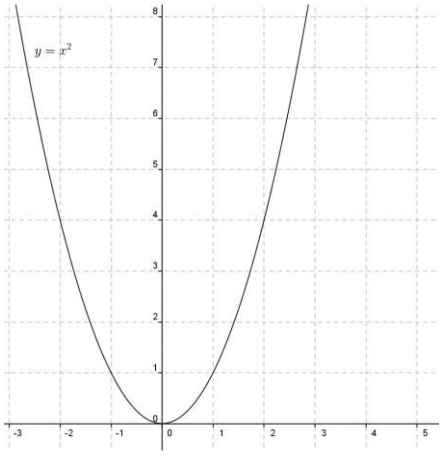
Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+5,\ x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η f γράφεται στη μορφή $f(x)=(x-2)^2+1$

Μονάδες 12

β) Στο σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f, μετατοπίζοντας κατάλληλα την $y=x^2$

Μονάδες 13

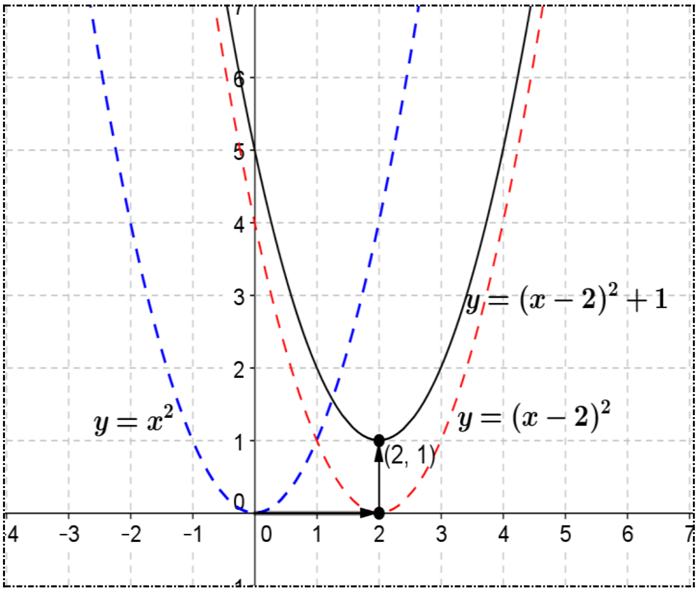


ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$f(x)=x^2-4x+5=x^2-4x+4+1=x^2-2\cdot 2x+2^2+1=(x-2)^2+1.$$

β) Παρατηρούμε ότι η $f(x)=(x-2)^2+1$ σε σχέση με την $y=x^2$ προκύπτει ως εξής: Αρχικά με οριζόντια μετατόπιση της $y=x^2$ κατά δύο μονάδες προς τα δεξιά και στην συνέχεια με κατακόρυφη μετατόπιση της $y=(x-2)^2$ κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.



Παρόμοια άσκηση βιβλίου: 4/Α΄ Ομαδας/σελ.46

ΑΣΚΗΣΗ Β2 (18632)

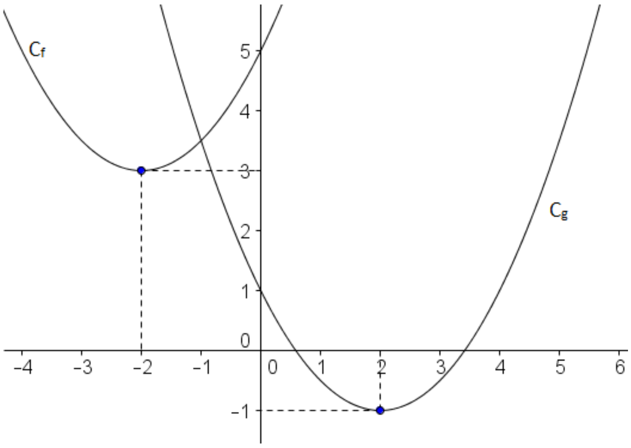
Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι παραβολές C_f και C_g που είναι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα με πεδίο ορισμού το ℝ. Η γραφική παράσταση της προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση. Παρατηρώντας το σχήμα:

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας, το είδος του ακρότατου της f και την τιμή του.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε μέσω ποιων μετατοπίσεων της C_f προκύπτει η C_g.

Μονάδες 15



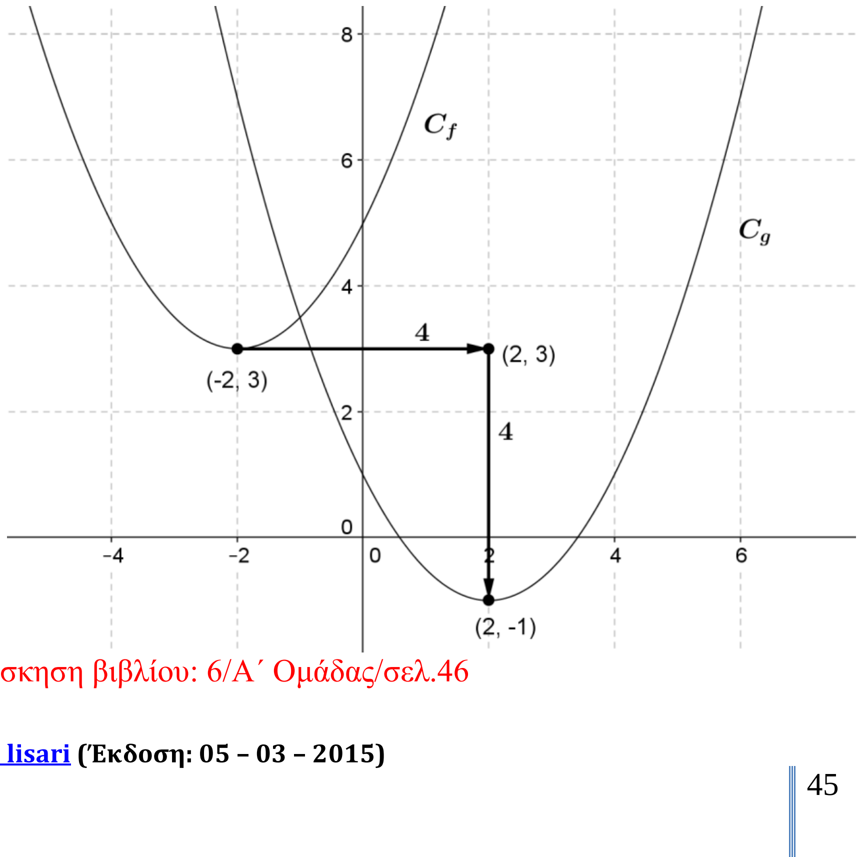
ΛΥΣΗ

α) Η γραφική παράσταση της f είναι:

- Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,-2]$ και
- Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-2,+\infty)$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση εμφανίζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0=-2$, το $f(-2)=3$

β) Για να σχηματίσουμε τη γραφική παράσταση της g πρέπει να μετακινήσουμε τη γραφική παράσταση της f κατά 4 θέσεις προς τα δεξιά (από το – 2 να πάει στο 2) και κατά 4 θέσεις κάτω (από το 3 να πάει στο – 1)



Παρόμοια άσκηση βιβλίου: 6/Α΄ Ομάδας/σελ.46

ΑΣΚΗΣΗ Β3 (18634)

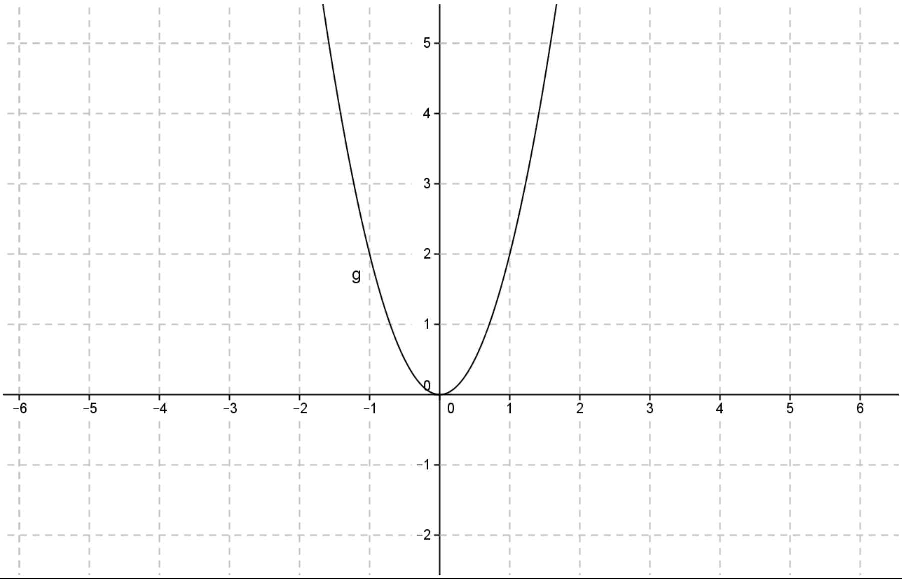
Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^2-12x+19$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f γράφεται στη μορφή: $f(x)=2(x-3)^2+1$

Μονάδες 10

β) Παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=2x^2$. Στο ίδιο σύστημα αξόνων, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και να εξηγήσετε πώς αυτή προκύπτει μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της g.

Μονάδες 15



ΛΥΣΗ

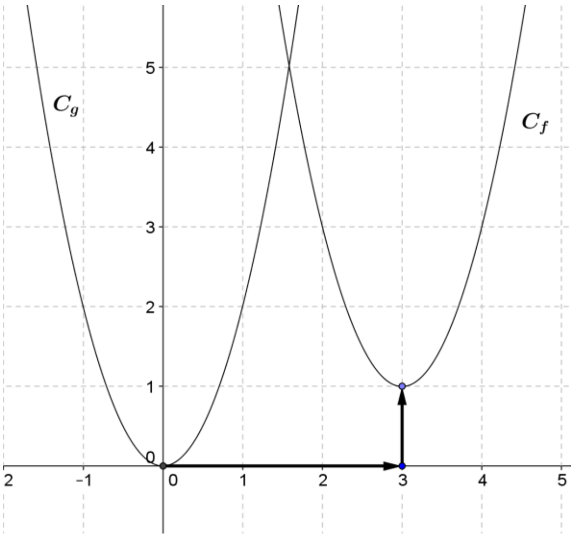
α) Έχουμε,

$$2(x-3)^2+1=2(x^2-6x+9)+1=2x^2-12x+18+1=2x^2-12x+19=f(x)$$

ή

$$f(x)=2x^2-12x+19=2x^2-12x+18+1=2(x^2-6x+9)+1=2(x-3)^2+1$$

β) Για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της f αρκεί να μετατοπίσουμε κατά 3 μονάδες δεξιά και κατά 1 μονάδα πάνω τη γραφική παράσταση της f.



Παρόμοια άσκηση βιβλίου: 4/Α΄ Ομάδας/σελ.46

ΑΣΚΗΣΗ Β4 (19914)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-5,\ x\in R$.

α) Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=0$.

Μονάδες 8

β) Είναι η f άρτια συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

γ) Με ποια μετατόπιση της $g(x)=x^2$ προκύπτει η C_f;

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Όπως σημειώθηκε στη μεθοδολογία, για να παρουσιάζει ελάχιστο η f(x) στο $x=0$, πρέπει να ισχύει $f(x)\geq f(0)$ για κάθε $x\in R$, δηλαδή

$$f(x)\geq f(0)\Leftrightarrow f(x)\geq -5\Leftrightarrow x^2-5\geq -5\Leftrightarrow x^2\geq 0,$$

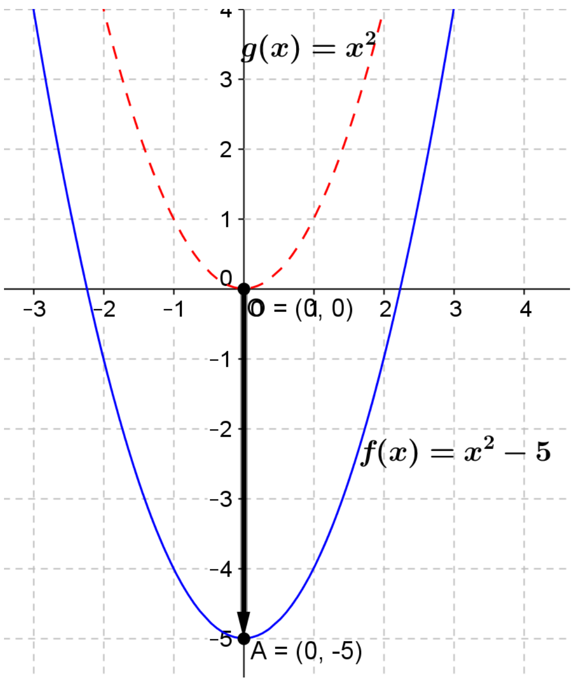
σχέση που ισχύει για κάθε $x\in R$.

β) Για να είναι μια συνάρτηση f άρτια, πρέπει για κάθε $x\in R$ να ισχύει $-x\in R$ και

$$f(-x)=(-x)^2-5=x^2-5=f(x).$$

Άρα η f(x) είναι άρτια.

γ) Η C_f προκύπτει αν μετατοπίσουμε την $g(x)=x^2$ στον άξονα y΄y (κατακόρυφα) κατά 5 μονάδες προς τα κάτω, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Παρόμοια άσκηση βιβλίου: 4, 5/Α΄ Ομάδας/σελ. 38, 39 και 5/Α΄ Ομάδας/σελ. 46.

ΑΣΚΗΣΗ Β5 (20328)

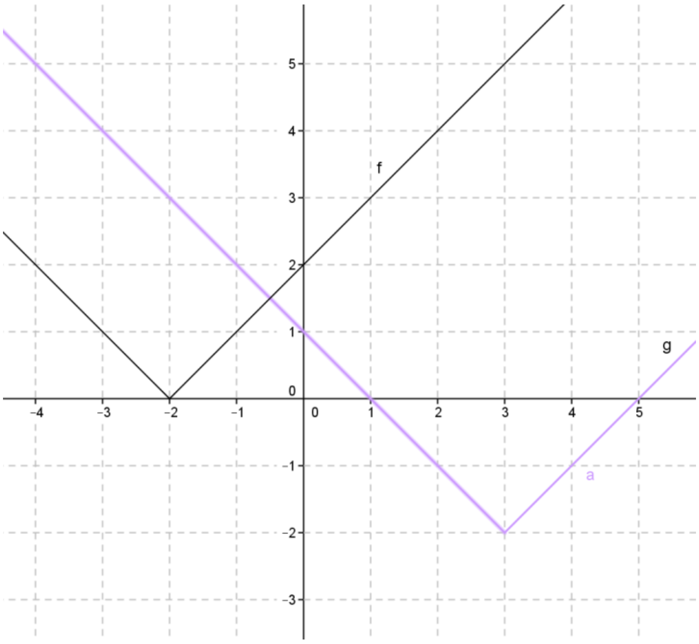
Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g, που ορίζονται στους πραγματικούς αριθμούς. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση. Από τις γραφικές παραστάσεις, να βρείτε:

α) Τα διαστήματα μονοτονίας της f, το είδος του ακρότατου της f , τη θέση και την τιμή του.

Μονάδες 12

β) Ποιες μετατοπίσεις της f δίνουν τη g. Να προσδιορίσετε στη συνέχεια τον τύπο της συνάρτησης g, αν f(x)=|x+2|

Μονάδες 13



ΛΥΣΗ

α) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,-2]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-2,+\infty)$ και παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο ,που είναι και ολικό, στο -2 ,το $f(-2)=0$.

β) Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από:

- 1ον μία κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά δύο μονάδες προς τα κάτω,
- 2ον από μία οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά πέντε μονάδες προς τα δεξιά.

Συνεπώς, ο τύπος της g είναι:

$$g(x)=f(x-5)-2\,,\, x\in\mathbb{R}$$

Αν επιπλέον είναι $f(x)=|x+2|$, $x\in\mathbb{R}$,τότε:

$$g(x)=|(x-5)+2|-2 \Leftrightarrow g(x)=|x-3|-2,\; x\in\mathbb{R}$$

□ Παρόμοιες ασκήσεις: Σχολικό βιβλίο: Α΄ Ομάδας/1 σελ. 38 και 6 σελ. 46

«Θέμα Δ»

ΑΣΚΗΣΗ Δ1 (17833)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{8-x}-\sqrt{8+x}$

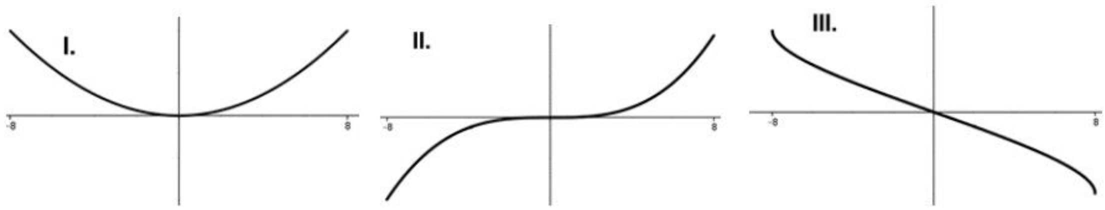
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Μονάδες 5

β) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

Μονάδες 8

γ) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της, να επιλέξετε ποια από τις παρακάτω τρείς προτεινόμενες, είναι η γραφική της παράσταση και στη συνέχεια να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.



Μονάδες 7

δ) Να αιτιολογήσετε γραφικά ή αλγεβρικά, γιατί οι συναρτήσεις $g(x)=f(x)-3$ και $h(x)=f(x+3)$ δεν είναι ούτε άρτιες ούτε περιττές .

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει:

$$\begin{cases}8-x\ge 0\\ \text{και}\\ 8+x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 8\\ \text{και}\\ -8\le x\end{cases}\Leftrightarrow -8\le x\le 8$$

άρα το πεδίο ορισμού της f είναι: $A=[-8,8]$

β) Έχουμε για κάθε $x\in A$, ότι $-x\in A$ (αφού το διάστημα είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν),

$f(-x)=\sqrt{8-(-x)}-\sqrt{8+(-x)}=\sqrt{8+x}-\sqrt{8-x}=-\left(\sqrt{8-x}-\sqrt{8+x}\right)=-f(x)$

άρα η f είναι περιττή.

γ) Η μοναδική γνησίως φθίνουσα συνάρτηση είναι η τρίτη γραφική παράσταση από αυτές που προτείνονται (δείτε σημείωση 1). Οπότε τα σημεία στα οποία έχουμε μέγιστα - ελάχιστα είναι:

- Ελάχιστο στο σημείο: $(8,f(8))=(8,-4)$,άρα min f(x) = f(8) = – 4
- Μέγιστο στο σημείο: $(-8,f(-8))=(-8,-f(8))=(-8,4)$, άρα max f(x) = f(–8) = 4

δ) Έστω ότι η $g(x)=f(x)-3$ είναι περιττή στο διάστημα Α, τότε

$$g(-x)=-g(x)\Rightarrow f(-x)-3=-(f(x)-3)\Rightarrow -f(x)-3=-f(x)+3\Rightarrow -3=3$$

που είναι **άτοπο**, άρα η g δεν είναι περιττή.

Έστω ότι η $g(x)=f(x)-3$ είναι άρτια στο διάστημα Α, τότε

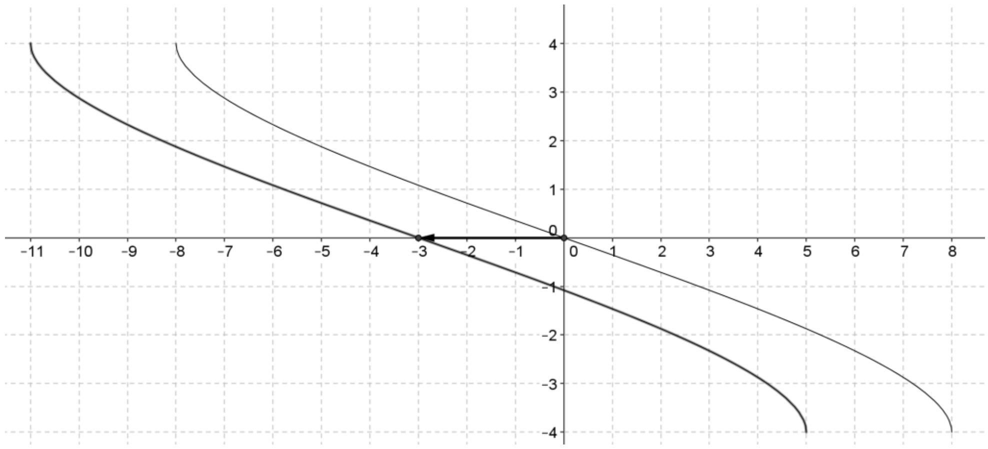
$$g(-x)=g(x)\Rightarrow f(-x)-3=f(x)-3\Rightarrow -f(x)=f(x)\Rightarrow 2f(x)=0\Rightarrow f(x)=0$$

που είναι **άτοπο**, άρα η g δεν είναι ούτε άρτια.

(Δείτε εναλλακτικά την σημείωση 2).

Η $h(x)=f(x+3)$ δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή, αφού προκύπτει από την γραφική παράσταση της C_f αν την μετατοπίσουμε κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά όπως φαίνεται στο σχήμα. Επομένως ούτε συμμετρική ως προς τον άξονα y΄y (όχι άρτια), ούτε ως προς την αρχή των αξόνων (όχι περιττή) είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης h.

(Δείτε εναλλακτικά την σημείωση 3 και 4)



Σημείωση 1: *Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της! Πως;*
Δείτε την παρακάτω απόδειξη κυρίως για εκπαιδευτικούς λόγους:
Έστω $x_1, x_2 \in A$, *με* $x_1 < x_2$, *τότε*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 8-x_1 > 8-x_2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{8-x_1} > \sqrt{8-x_2} \quad (1)$$

Επίσης,

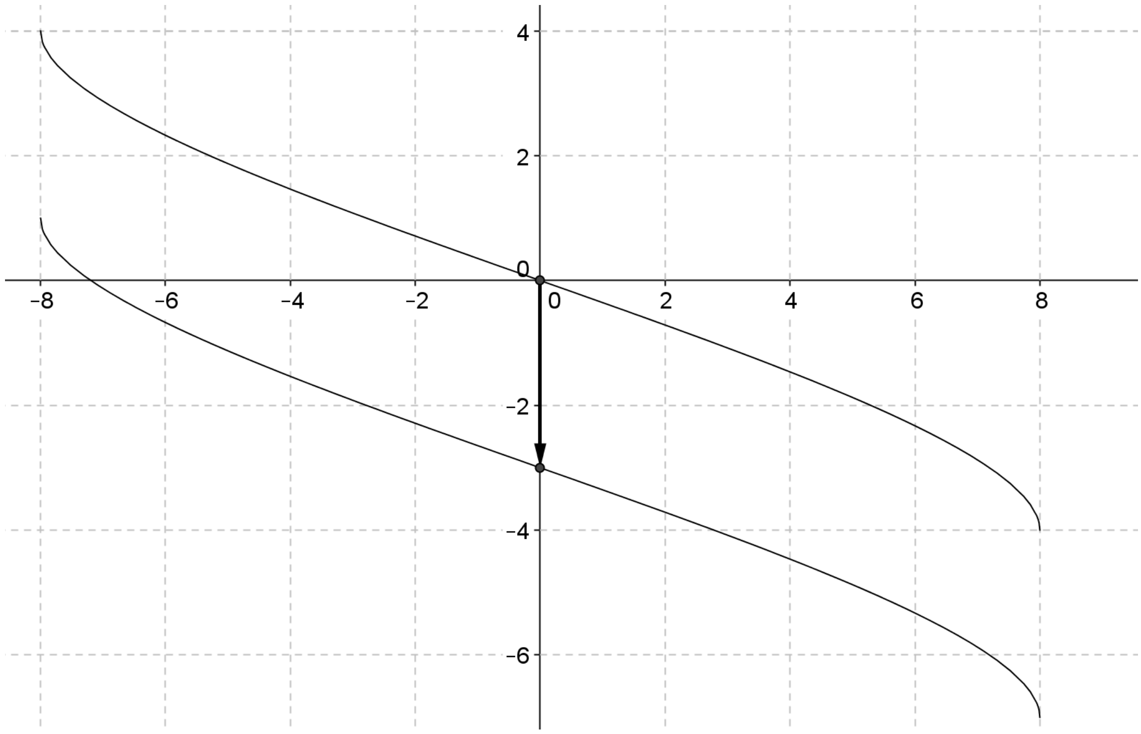
$$x_1 < x_2 \Rightarrow 0 \leq 8+x_1 < 8+x_2 \Rightarrow \sqrt{8+x_1} < \sqrt{8+x_2} \Rightarrow -\sqrt{8+x_1} > -\sqrt{8+x_2} \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2),

$$\sqrt{8-x_1}-\sqrt{8+x_1} > \sqrt{8-x_2}-\sqrt{8+x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

άρα για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ *με* $x_1 < x_2$ *ισχύει* $f(x_1) > f(x_2)$, *άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Α.*

Σημείωση 2: *Μια γραφική ερμηνεία για την γραφική παράσταση της g είναι ότι αν μετακινηθεί 3 μονάδες παρακάτω δεν θα είναι συμμετρική ούτε ως προς τον άξονα y΄y (δηλ. όχι άρτια) και ούτε ως προς την αρχή των αξόνων (δηλ. ούτε περιττή). Δείτε το παρακάτω σχήμα.*



Σημείωση 3: *Για την συνάρτηση h, μπορούμε και αλγεβρικά να συμπεράνουμε ότι δεν είναι άρτια, ούτε και περιττή από το πεδίο ορισμού, που είναι το εξής:*
$(x+3)\in[-8,8]\Rightarrow -8\le x+3\le 8\Rightarrow -11\le x\le 5$, *άρα* $A_h=[-11,5]$ *που δεν είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν, άρα αν το* $x\in A_h$, *δεν είμαστε σίγουροι ότι και το* $-x\in A_h$.

Σημείωση 4: *Τέλος για την h μπορούμε να το διαπιστώσουμε και με την απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι η h είναι περιττή, τότε:*

$$h(-x)=-h(x)\overset{x=0}{\Rightarrow}h(0)=-h(0)$$
$$\Rightarrow h(0)=0\Rightarrow f(3)=0$$
$$\Rightarrow \sqrt{5}-\sqrt{11}=0\Rightarrow \sqrt{5}=\sqrt{11}$$

άτοπο!!
Έστω ότι η h είναι άρτια, τότε:

$$h(-x)=h(x)\overset{x=1}{\Rightarrow}h(-1)=h(1)\Rightarrow f(2)=f(4)\overset{f:\mu o\nu.}{\Rightarrow}2=4$$ ***άτοπο!***

ΑΣΚΗΣΗ Δ2 (17842)

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\frac{1}{2}(x-c)^2-d,\quad x\in\mathbb{R}$

με c, d θετικές σταθερές, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από τα σημεία $A(0,16)$ και $B(4,0)$.

α) Με βάση τα δεδομένα, να κατασκευάσετε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους τους c, d και να υπολογίσετε την τιμή τους.

Μονάδες 10

β) Θεωρώντας γνωστό ότι $c=6$ και $d=2$,
i. να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

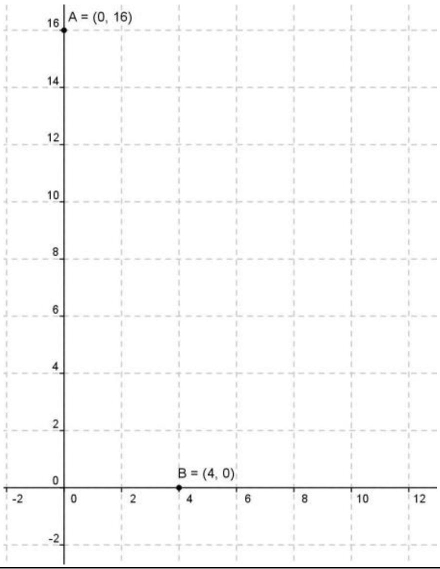
Μονάδες 3

ii. να μεταφέρετε στην κόλα σας το σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και να εξηγήσετε πως αυτή σχετίζεται με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\frac{1}{2}x^2$.

Μονάδες 6

iii. με βάση την παραπάνω γραφική παράσταση, να βρείτε το ακρότατο της συνάρτησης f, τα διαστήματα στα οποία η f είναι μονότονη, καθώς και το είδος της μονοτονίας της σε καθένα από αυτά τα διαστήματα.

Μονάδες 6



ΛΥΣΗ

α) Αφού η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(0,16)$, θα ισχύει:

$$f(0)=16 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(0-c)^2-d=16 \Leftrightarrow \frac{1}{2}c^2-d=16 \Leftrightarrow c^2-2d=32 \ \ (1).$$

Ομοίως η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται και από το σημείο $B(4,0)$, άρα ισχύει:

$$f(4)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(4-c)^2-d=0 \Leftrightarrow (4-c)^2-2d=0 \ \ (2).$$

Συνεπώς από τα δεδομένα της εκφώνησης προκύπτει το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων για τις μεταβλητές c και d:

$$(\Sigma)\ \begin{cases} c^2-2d=32 \\ (4-c)^2-2d=0 \end{cases}$$

Η εξίσωση (2) γίνεται:

$$(4-c)^2-2d=0 \Leftrightarrow 16-8c+c^2-2d=0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 16-8c+32=0 \Leftrightarrow -8c=-32-16=-48 \Leftrightarrow$$

$$c=\frac{-48}{-8}=6.$$

Αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε:

$$6^2-2d=32 \Leftrightarrow 36-2d=32 \Leftrightarrow -2d=32-36=-4 \Leftrightarrow d=\frac{-4}{-2}=2.$$

Άρα τελικά οι σταθερές c και d παίρνουν τις τιμές $c=6$ και $d=2$.

β) Για $c=6$ και $d=2$ ο τύπος της συνάρτησης γίνεται:

$$f(x)=\frac{1}{2}(x-6)^2-2,\quad x\in\mathbb{R}.$$

i. Τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον οριζόντιο άξονα $x'x$ είναι τα σημεία που έχουν $y=0$, δηλαδή τα σημεία για τα οποία ισχύει

$$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}(x-6)^2-2=0\Leftrightarrow(x-6)^2-4=0$$
$$\Leftrightarrow(x-6)^2=4\Leftrightarrow x-6=\pm\sqrt{4}=\pm2$$
$$\Leftrightarrow x-6=2\ \text{ή}\ x-6=-2$$
$$\Leftrightarrow x=2+6=8\ \text{ή}\ x=-2+6=4.$$

Συνεπώς η γραφική παράσταση της f τέμνει τον οριζόντιο άξονα $x'x$ στα σημεία $B(4,0)$ και $\Gamma(8,0)$.

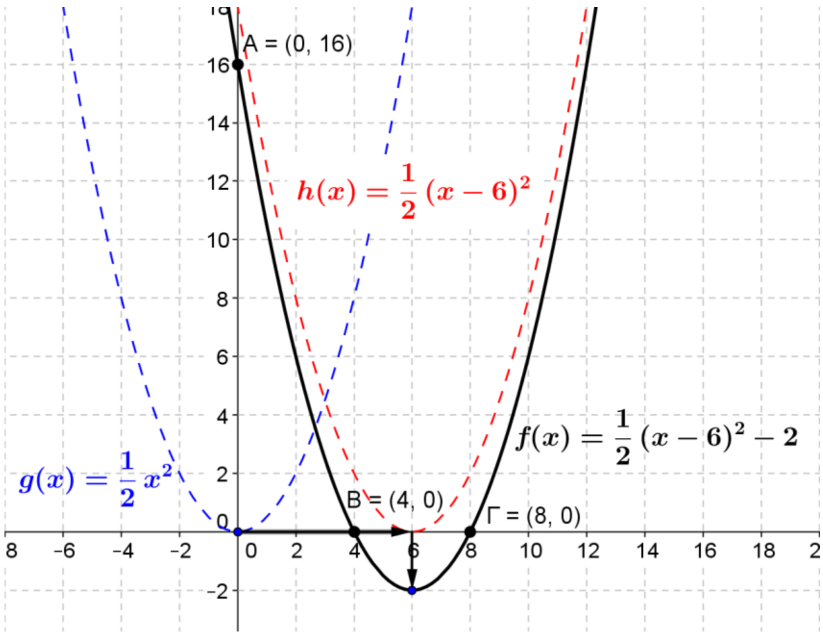
Το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της f τέμνει τον κατακόρυφο άξονα $y'y$ είναι το σημείο που έχει $x=0$. Το σημείο αυτό θα έχει τεταγμένη

$$y=f(0)=\frac{1}{2}(0-6)^2-2=\frac{1}{2}\cdot6^2-2=\frac{36}{2}-2=18-2=16,$$

δηλαδή η γραφική παράσταση της f τέμνει τον κατακόρυφο άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,16)$.

Σχόλιο: Ο παραπάνω υπολογισμός μπορεί και να παρακαμφθεί αν σκεφτούμε ότι κάθε γραφική παράσταση συνάρτησης τέμνεται από οποιαδήποτε κατακόρυφη ευθεία σε ένα το πολύ σημείο της. Γνωρίζουμε ήδη από την υπόθεση ότι το σημείο $A(0,16)$ *είναι σημείο από το οποίο διέρχεται η γραφική παράσταση της f, και φυσικά είναι σημείο του άξονα* $y'y$*, αφού έχει τετμημένη ίση με 0, συνεπώς αυτό θα είναι και το ζητούμενο σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον κατακόρυφο άξονα* $y'y$.

ii. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Η γραφική αυτή παράσταση προκύπτει από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\frac{1}{2}x^2$ με οριζόντια μετατόπισή της κατά 6 μονάδες προς τα δεξιά και στη συνέχεια κατά 2 μονάδες προς τα κάτω.

iii. Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση f παίρνει ελάχιστη τιμή $f_{min}=-2$ για $x=6$, η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη στα διαστήματα $(-\infty,6]$ και $[6,+\infty)$ και πιο συγκεκριμένα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,6]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[6,+\infty)$.

Παρόμοια άσκηση βιβλίου: 4/Α΄ Ομάδας/σελ.46

ΑΣΚΗΣΗ Δ3 (20332)

Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x)=-x^2,\quad x\in\mathbb{R}$ και $f(x)=-x^2+2x+1,\quad x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=-(x-1)^2+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f.

Μονάδες 10

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της f να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη.

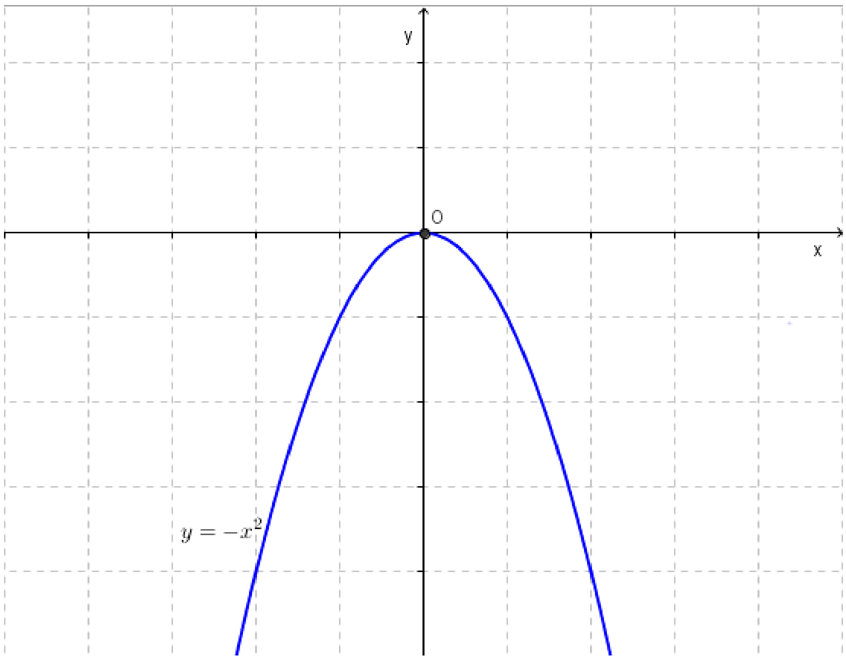
Μονάδες 5

ii. Το ολικό ακρότατο της f καθώς και τη θέση του.

Μονάδες 5

iii. Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\kappa$, $\kappa<2$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή της.

Μονάδες 5



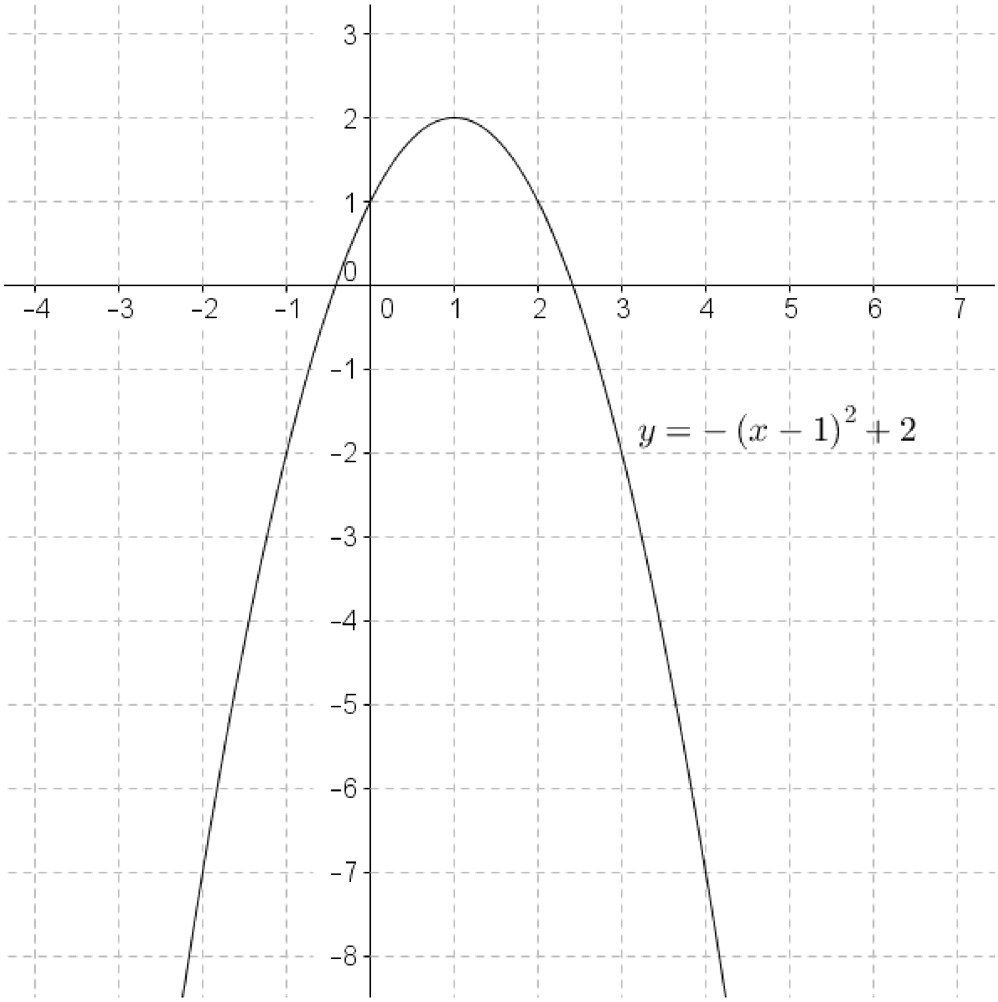
ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$f(x) = -x^2 + 2x + 1 = -x^2 + 2x - 1 + 2 = -(x^2 - 2x + 1) + 2 = -(x-1)^2 + 2,$$

άρα $f(x) = -(x-1)^2 + 2$

Παρατηρούμε ότι $f(x) = -(x-1)^2 + 2 = \varphi(x-1) + 2$, άρα η γραφική της παράσταση θα προκύπτει από την αντίστοιχη της συνάρτησης φ με οριζόντια μετατόπιση κατά 1 μονάδα δεξιά και κατακόρυφη μετατόπιση κατά 2 μονάδα επάνω.



β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της f βρίσκουμε ότι:

i. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

ii. Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x = 1$, το $f(1) = 2$

iii. Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης f(x) = κ , κ < 2 είναι 2, καθώς η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει πάντα δύο σημεία τομής με την οριζόντια ευθεία $y = \kappa$, αν $\kappa < 2$

ΑΣΚΗΣΗ Δ4 (4_20919)

Η περιβαλλοντική ομάδα ενός σχολείου παρέλαβε συρματόπλεγμα μήκους 40m για να περιφράξει, χρησιμοποιώντας όλο το συρματόπλεγμα, έναν ορθογώνιο κήπο για

καλλιέργεια λαχανικών. Οι μαθητές της περιβαλλοντικής ομάδας θέλουν να επιλέξουν ένα κήπο που να
έχει όσο το δυνατόν μεγαλύτερο εμβαδόν.
α) Να δώσετε τις διαστάσεις τριών διαφορετικών ορθογώνιων κήπων με περίμετρο 40m. Να εξετάσετε αν οι τρεις λαχανόκηποι έχουν το ίδιο εμβαδόν.

(Μονάδες 7)

β) Αν συμβολίσουμε με x το πλάτος και με E το εμβαδόν ενός λαχανόκηπου με περίμετρο 40m, να εκφράσετε το E ως συνάρτηση του x.

(Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι $E(x)=-(x-10)^2+100$. Χρησιμοποιώντας την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=-x^2$ να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της E(x). Από τη γραφική
παράσταση της E(x) να βρείτε τις διαστάσεις του λαχανόκηπου με το μεγαλύτερο εμβαδόν.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Έστω x και y οι διαστάσεις σε m του ορθογώνιου κήπου. Τότε η περίμετρος του κήπου είναι $\Pi=2x+2y$ και αφού ολόκληρος ο κήπος θα περιφραχθεί με το συρματόπλεγμα μήκους 40m, θα ισχύει:

$$2x+2y=40 \Leftrightarrow x+y=20 \Leftrightarrow y=20-x.$$

Τρία παραδείγματα τέτοιων κήπων είναι τα παρακάτω:

- Αν $x=5$ τότε $y=20-5=15$ και έχουμε ένα κήπο διαστάσεων 5m επί 15m και εμβαδού $E=5m\cdot 15m=75m^2$
- Αν $x=8$ τότε $y=20-8=12$ και έχουμε ένα κήπο διαστάσεων 8m επί12m και εμβαδού $E=8m\cdot 12m=96m^2$
- Αν $x=10$ τότε $y=20-10=10$ και έχουμε ένα κήπο διαστάσεων 10m επί 10m και εμβαδού $E=10m\cdot 10m=100m^2$

Παρατηρούμε ότι οι τρεις κήποι έχουν διαφορετικό εμβαδόν.

β) Αν x είναι το πλάτος και y το μήκος του κήπου, τότε για το εμβαδό του E ισχύει:

$$E=x\cdot y \text{ ή } E(x)=x\cdot(20-x), \text{ όπου } x>0 \text{ και } y>0 \Leftrightarrow 20-x>0 \Leftrightarrow x<20$$

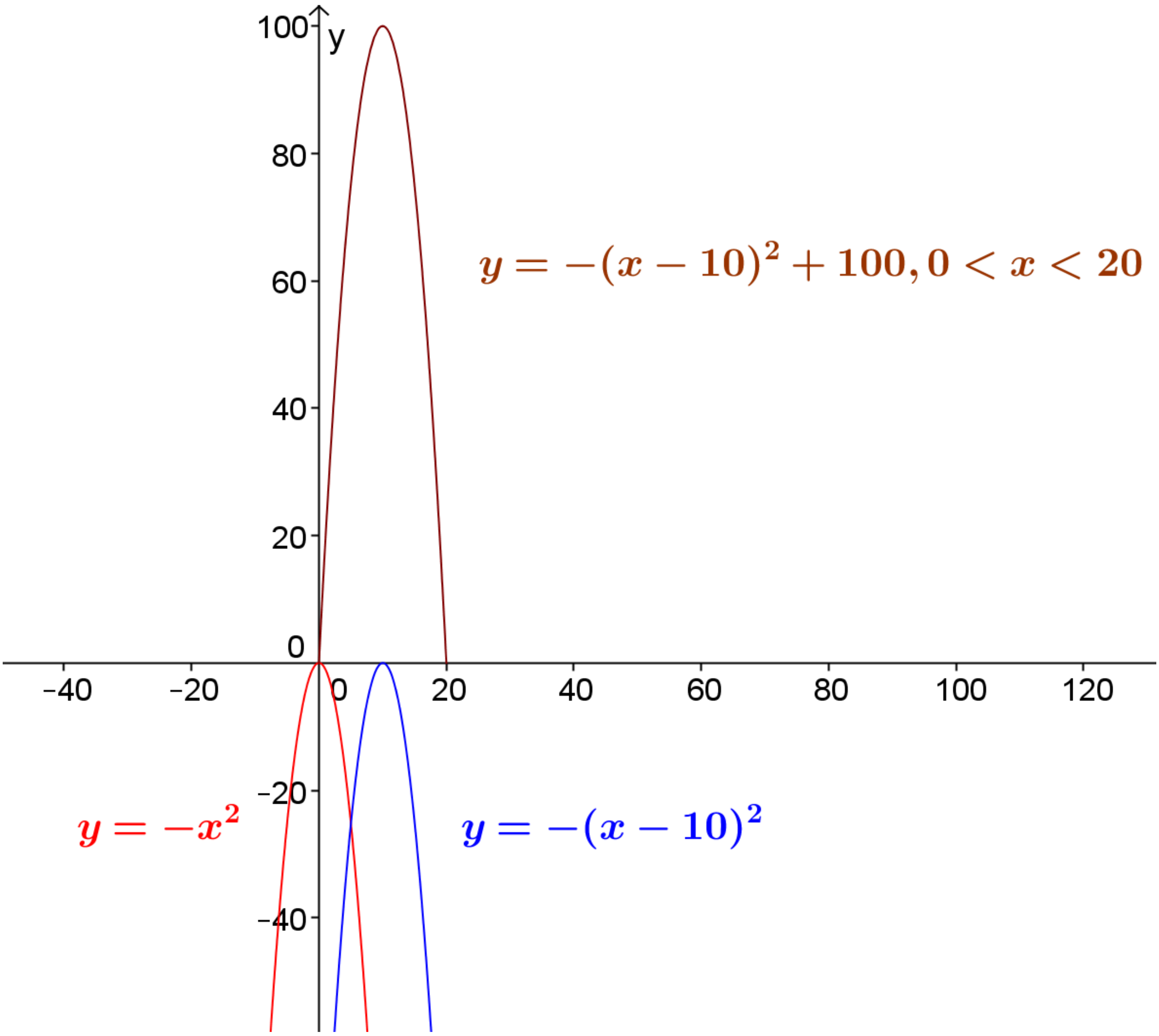
άρα η συνάρτηση E έχει τύπο:

$$E(x)=x\cdot(20-x)=-x^2+20x, \text{ με } 0<x<20.$$

γ) Ισχύει ότι:

$$-(x-10)^2+100 = -\left(x^2-20x+100\right)+100 = -x^2+20x-100+100 = -x^2+20x=E(x)$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $E(x) = -(x-10)^2 + 100$ προκύπτει από τη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = -x^2$ αρχικά κατά 10 μονάδες προς τα αριστερά και στη συνέχεια κατά 100 μονάδες προς τα πάνω.
Επιπλέον από την πλήρη καμπύλη θα κρατήσουμε μόνο το κομμάτι της που αποτελείται από τα σημεία της με τετμημένες $0 < x < 20$.



Η κορυφή της παραβολής που αποτελεί τη γραφική παράσταση της f είναι το σημείο $(0,0)$, άρα, μετά την παραπάνω μετατόπιση, η κορυφή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης είναι το σημείο $(10,100)$.
Συνεπώς το μέγιστο εμβαδό του κήπου προκύπτει για $x = 10$ και $y = 20 - 10 = 10$ δηλαδή για διαστάσεις λαχανόκηπου 10m επί 10m.

ΑΣΚΗΣΗ Δ5 (4_20924)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία Α(1, 2) και Β(5, 8), να δείξετε ότι

$\alpha = \frac{3}{2}$ και $\beta = \frac{1}{2}$

Μονάδες 8

β) Αν $g(x)$ είναι η συνάρτηση που προκύπτει από τη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f οριζόντια κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά και κατακόρυφα κατά 3 μονάδες προς τα κάτω, να βρείτε τον τύπο της g.

Μονάδες 9

γ) Αν $h(x) = \frac{3}{2}(x-1)$ είναι η συνάρτηση που προκύπτει από τη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f οριζόντια κατά κ μονάδες προς τα δεξιά και κατακόρυφα κατά $\frac{\kappa}{2}$ μονάδες κάτω, να βρείτε το κ ($\kappa > 0$).

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

α) Αφού η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha x + \beta \text{ , } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

διέρχεται από τα σημεία Α(1, 2) και Β(5, 8), ισχύει

$$f(1) = 2 \text{ και } f(5) = 8 \Leftrightarrow$$

$$\alpha + \beta = 2 \text{ και } 5\alpha + \beta = 8$$

Αφαιρώντας τις σχέσεις κατά μέλη προκύπτει

$$4\alpha = 6 \Leftrightarrow 2\alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = \frac{3}{2}$$

Αντικαθιστώντας $\alpha = \frac{3}{2}$ στη σχέση $\alpha + \beta = 2$ προκύπτει

$$\frac{3}{2} + \beta = 2 \Leftrightarrow \beta = 2 - \frac{3}{2} \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{2}$$

Τότε

$$f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

β) Αφού g(x) είναι η συνάρτηση που προκύπτει από τη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f οριζόντια κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά και κατακόρυφα κατά 3 μονάδες προς τα κάτω, ισχύει

$$g(x) = f(x + 1) - 3 \Leftrightarrow$$

$$g(x) = \frac{3}{2}(x+1) + \frac{1}{2} - 3 \Leftrightarrow$$

$$g(x) = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 3 \Leftrightarrow$$

$$g(x) = \frac{3}{2}x + \frac{4}{2} - 3 \Leftrightarrow$$

$$g(x) = \frac{3}{2}x - 1 \Leftrightarrow$$

γ) Αφού $h(x)=\frac{3}{2}(x-1)$ είναι η συνάρτηση που προκύπτει από τη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f οριζόντια κατά *κ* μονάδες προς τα δεξιά και κατακόρυφα κατά $\frac{\kappa}{2}$ μονάδες κάτω, ισχύει

$$h(x)=f(x-\kappa)-\frac{\kappa}{2}\Leftrightarrow$$
$$\frac{3}{2}(x-1)=\frac{3}{2}(x-\kappa)+\frac{1}{2}-\frac{\kappa}{2}\Leftrightarrow$$
$$3(x-1)=3(x-\kappa)+1-\kappa\Leftrightarrow$$
$$\cancel{3x}-3=\cancel{3x}-3\kappa+1-\kappa\Leftrightarrow$$
$$4\kappa=4\Leftrightarrow$$
$$\kappa=1$$

Η ΘΕΩΡΙΑ ΜΕ ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ

Αντί κάποιων ψηγμάτων θεωρίας ή «κατάλληλων» μεθοδολογιών, θα αναφερθούμε σε ένα σημείο που, κατά την άποψή μας, είναι πηγή παρερμηνειών, απλουστεύσεων ή ακόμη και λαθών.
Αναφερόμαστε σε συναρτήσεις της μορφής $f(x)=\rho\cdot\eta\mu(\omega x)+k,\ \rho,\omega,k\in\mathbb{R}$ και $g(x)=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega x)+k,\ \rho,\omega,k\in\mathbb{R}$.

- Αρχικά, σε εφαρμογή του σχολικού βιβλίου (§3.4) υπάρχουν συμπεράσματα για συναρτήσεις της μορφής $f(x)=\rho\cdot\eta\mu(\omega x)$ και $g(x)=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega x)$, όπου $\rho>0$ και $\omega>0$ (1):
  - έχουν μέγιστη τιμή το ρ και ελάχιστη τιμή το $-\rho$,
  - είναι περιοδικές με περίοδο $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$

- Για τις συναρτήσεις της μορφής $f(x)=\rho\cdot\eta\mu(\omega x)$ και $g(x)=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega x)$, όπου $\rho<0$ και $\omega>0$ (2) (*βλέπε §3.4, άσκηση 1, Ά Ομάδας*), μπορούμε να καταλήξουμε σε αντίστοιχα συμπεράσματα, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι σε σχέση με τις συναρτήσεις της μορφής $f(x)=\rho\cdot\eta\mu(\omega x)$ και $f(x)=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega x)$, όπου $\rho>0$ και $\omega>0$, είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$, και έτσι να πούμε:
  - έχουν μέγιστη τιμή το $|\rho|$ και ελάχιστη τιμή το $-|\rho|$ (*αλλά σε διαφορετικά σημεία*)
  - είναι περιοδικές με περίοδο $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$

- Στην περίπτωση όπου $\omega<0$, κάνουμε χρήση των τύπων που ισχύουν για αναγωγή στο 1^{o} τεταρτημόριο και να παρατηρήσουμε ότι:
  - $f(x)=\rho\cdot\eta\mu(\omega x)=\rho\cdot\eta\mu(-(-\omega x))=-\rho\cdot\eta\mu(-\omega x)=-\rho\cdot\eta\mu(|\omega|x)$
  - $g(x)=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega x)=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu(-(-\omega x))=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu(-\omega x)=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu(|\omega|x)$

  Συνδυάζοντας τα παραπάνω με τις σχέσεις (1) και (2), καταλήγουμε στα αντίστοιχα συμπεράσματα για συναρτήσεις της μορφής $f(x)=\rho\cdot\eta\mu(\omega x)$ και $g(x)=\rho\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega x)$, όπου $\rho,\omega\in\mathbb{R}$ (3):
  - έχουν μέγιστη τιμή το $|\rho|$ και ελάχιστη τιμή το $-|\rho|$ (*αλλά σε διαφορετικά σημεία*)
  - είναι περιοδικές με περίοδο $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$

- Τέλος, για συναρτήσεις της μορφής $f(x)=\rho\cdot ημ(\omega x)+k,\ \rho,\omega,k\in\mathbb{R}$ και $g(x)=\rho\cdot συν(\omega x)+k,\ \rho,\omega,k\in\mathbb{R}$ (*βλέπε §3.4, ασκήσεις 2, 7 Ά Ομάδας και 3, 4 Β' Ομάδας)* μπορούμε να συνδυάσουμε τα προηγούμενα συμπεράσματα και την κατακόρυφη μετατόπιση που έχουν σχετικά πρόσφατα διδαχθεί οι μαθητές.
  Συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $f(x)=\rho\cdot ημ(\omega x)+k,\ \rho,\omega,k\in\mathbb{R}$ και $g(x)=\rho\cdot συν(\omega x)+k,\ \rho,\omega,k\in\mathbb{R}$, παρατηρούμε ότι έχουν γραφικές παραστάσεις που προκύπτουν από τις αντίστοιχες των συναρτήσεων $\varphi(x)=\rho\cdot ημ(\omega x)$ και $\gamma(x)=\rho\cdot συν(\omega x)$, με κατακόρυφη μετατόπιση κατά k μονάδες (προς τα επάνω αν $k>0$ ή προς τα κάτω αν $k<0$).
  Τότε μπορούμε να πούμε ότι:
  - έχουν μέγιστη τιμή το $|\rho|+k$ και ελάχιστη τιμή το $-|\rho|+k$
  - είναι περιοδικές με περίοδο $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$ (*αφού η κατακόρυφη μετατόπιση δεν επηρεάζει την περίοδο της συνάρτησης*)

- Όσον αφορά στις συναρτήσεις της μορφής $f(x)=\rho\cdot εφ(\omega x),\ \rho,\omega\in\mathbb{R}$ και $g(x)=\rho\cdot σφ(\omega x),\ \rho,\omega\in\mathbb{R}$, κατά την άποψή μου, δεν μπορούμε να βγάζουμε απ' ευθείας συμπεράσματα.
  Αυτό που μπορούμε να κάνουμε είναι να υποπτευόμαστε την περίοδο και να το αποδεικνύουμε αναλυτικά, όπως στις εφαρμογές 1 και 2 του σχολικού βιβλίου (§3.4). Π.χ. $f(x)=εφ2x$ (*βλέπε §3.4, άσκηση 8 Ά Ομάδας)*

Σχόλιο:
Στην συγκεκριμένη συλλογή ασκήσεων, τα παραπάνω αφορούν κυρίως στις ασκήσεις:

ΑΣΚΗΣΗ Β3 (17704)

ΑΣΚΗΣΗ Δ2 (17843)

ΑΣΚΗΣΗ Δ2 (17852)

ΑΣΚΗΣΗ Δ4 (17855)

§3.2 - Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

«Θέμα Β»

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (17663)

Αν $0<x<\frac{\pi}{2}$ και $(2\sigma\upsilon\nu x+1)\cdot(5\sigma\upsilon\nu x-4)=0$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu x=\frac{4}{5}$

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x.

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha\cdot\beta=0$, τότε $\alpha=0$ ή $\beta=0$, άρα, από τη σχέση

$$(2\sigma\upsilon\nu x+1)\cdot(5\sigma\upsilon\nu x-4)=0$$

προκύπτει ότι:

$$\{\ 2\sigma\upsilon\nu x+1=0 \ \text{ ή } \ 5\sigma\upsilon\nu x-4=0\ \}\Leftrightarrow\{\ \sigma\upsilon\nu x=-\frac{1}{2} \ \text{ ή } \ \sigma\upsilon\nu x=\frac{4}{5}\ \}.$$

Επειδή όμως $0<x<\frac{\pi}{2}$ προκύπτει ότι $\sigma\upsilon\nu x>0$, οπότε $\sigma\upsilon\nu x=\frac{4}{5}$.

β) Από τη γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=1$ παίρνουμε ότι $\eta\mu^2x=1-\sigma\upsilon\nu^2x$. Αντικαθιστούμε το $\sigma\upsilon\nu x$ με $\frac{4}{5}$ και έχουμε:

$$\eta\mu^2x=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}, \text{ δηλαδή } \eta\mu^2x=\frac{9}{25}.$$

Επειδή όμως $0<x<\frac{\pi}{2}$ προκύπτει ότι $\eta\mu x>0$, οπότε $\eta\mu x=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$,

δηλαδή $\eta\mu x=\frac{3}{5}$.

Από τις ταυτότητες $\varepsilon\varphi x=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$, $\sigma\varphi x=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$ αντικαθιστώντας τα παραπάνω παίρνουμε:

$$\varepsilon\varphi x=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{4},\quad \sigma\varphi x=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}.$$

Οπότε, $\varepsilon\varphi x=\frac{3}{4}$, $\sigma\varphi x=\frac{4}{3}$.

Παρόμοιες Ασκήσεις :

Σχολικό βιβλίο: *§3.5* Α΄ Ομάδας / Άσκηση 5-*§3.2* Α΄ Ομάδας / Άσκηση 25

«Θέμα Δ»

ΑΣΚΗΣΗ Δ1 (17844)

α) Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

Μονάδες 12

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) και του τριγωνομετρικού κύκλου, να βρείτε όλες τις γωνίες ω με $0 \le \omega \le 2\pi$, που ικανοποιούν τη σχέση $\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu\omega = -1$ και να τις απεικονίσετε πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο.

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) **Α΄ τρόπος:** Έχουμε ένα μη γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, οπότε λύνουμε την πρώτη ως προς y και έχουμε:

$$\begin{cases} y=-(x+1) \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-(x+1) \\ x^2+\left[-(x+1)\right]^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-(x+1) \\ x^2+(x+1)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-(x+1) \\ x^2+x^2+2x+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=-(x+1) \\ 2x^2+2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-(x+1) \\ 2x(x+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-(x+1) \\ x=0 \text{ ή } x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=0 \\ x=-1 \end{cases}$$

Επομένως, $(0,-1)$ ή $(-1,0)$ οι δύο λύσεις

Β΄ τρόπος : Έχουμε,

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ (x+y)^2-2xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ (-1)^2-2xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ x=0 \text{ ή } y=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=-1 \\ x=0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=0 \\ x=-1 \end{cases}$$

Επομένως, $(0,-1)$ ή $(-1,0)$ οι δύο λύσεις

β) Έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\omega+\eta\mu\omega=-1 \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu^2\omega+\eta\mu^2\omega=1,$$

παρατηρούμε ότι είναι το αρχικό σύστημα αν θεωρήσουμε $x=\sigma\upsilon\nu\omega$ & $y=\eta\mu\omega$.

Επομένως από το α) ερώτημα οι λύσεις του συστήματος είναι:

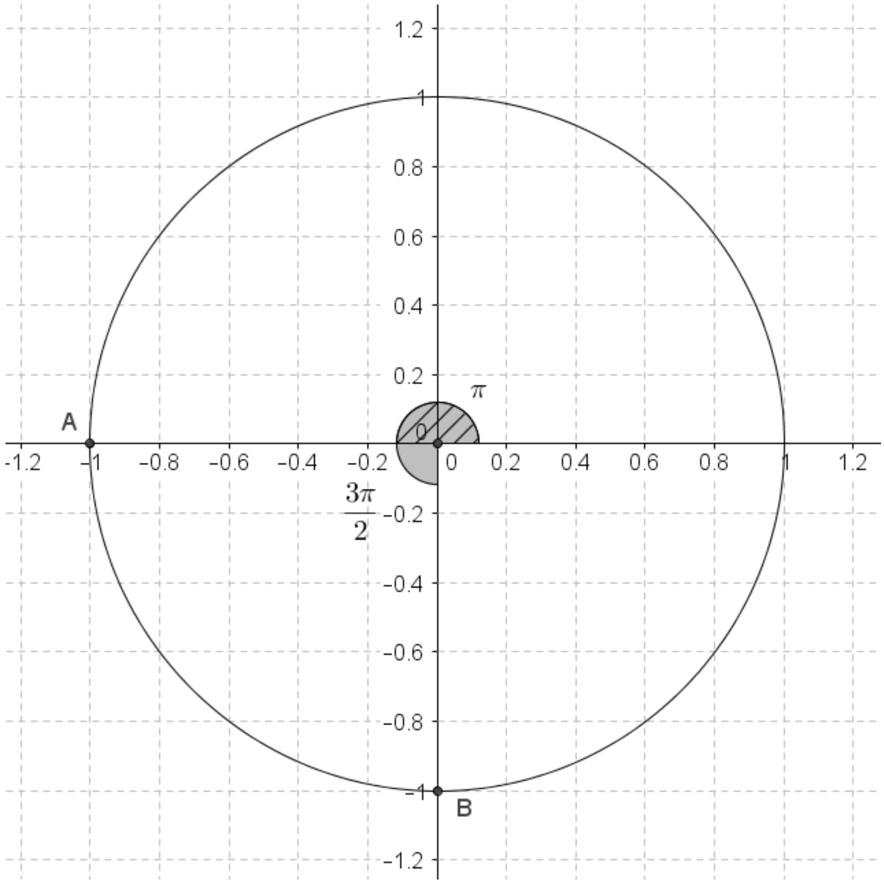
$$(x,y)=(-1,0) \text{ ή } (x,y)=(0,-1).$$

Δηλαδή

$$\left\{(\sigma\upsilon\nu\omega,\eta\mu\omega)=(-1,0) \text{ ή } (\sigma\upsilon\nu\omega,\eta\mu\omega)=(0,-1)\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sigma\upsilon\nu\omega=-1 \\ \eta\mu\omega=0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \sigma\upsilon\nu\omega=0 \\ \eta\mu\omega=-1 \end{cases} \overset{0\le\omega\le2\pi}{\Leftrightarrow} \Leftrightarrow \omega=\pi \text{ ή } \omega=\frac{3\pi}{2}$$

Η απεικόνιση των λύσεων στον τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται με την βοήθεια των σημείων Α και Β των αρνητικών ημιαξόνων Οx΄ και Οy΄ αντίστοιχα.



Παρόμοιες Ασκήσεις :

§3.3 - Αναγωγή στο $1^{ο}$ τεταρτημόριο

«Θέμα Β»

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (17699)

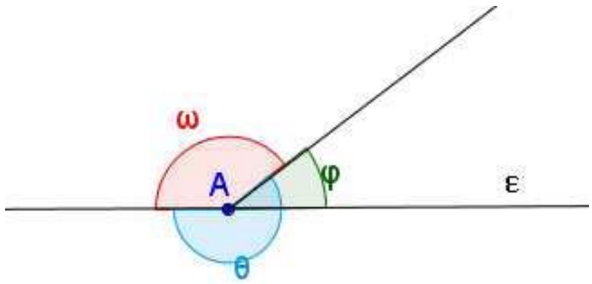
Δίνεται $ημφ=\frac{3}{5}$, όπου $φ$ η οξεία γωνία που σχηματίζεται με κορυφή το σημείο A της ευθείας (ε) του διπλανού σχήματος.

α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας $φ$.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο των γωνιών $θ$ και $ω$ του σχήματος.

Μονάδες 15



ΛΥΣΗ

α) Αν $φ$ οξεία γωνία, τότε $0<φ<\frac{π}{2}$ δηλαδή είναι γωνία του $1^{ου}$ τεταρτημορίου όπου είναι $συνφ>0$ (1).

Ισχύει,

$$ημ^2φ+συν^2φ=1 \Leftrightarrow συν^2φ=1-ημ^2φ \Leftrightarrow συν^2φ=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2 \Leftrightarrow συν^2φ=\frac{16}{25} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} συνφ=\frac{4}{5}$$

β) Από το σχήμα που δίνεται έχουμε,

- $θ=π+φ$, οπότε από τύπους αναγωγής στο $1^{ο}$ τεταρτημόριο για τις γωνίες που διαφέρουν κατά π είναι

  $$ημθ=ημ(π+φ)=-ημφ=-\frac{3}{5} \text{ και } συνθ=συν(π+φ)=-συνφ=-\frac{4}{5}$$

- Ενώ $φ+ω=180^{ο} \Leftrightarrow ω=180^{ο}-φ$, οπότε από τύπους αναγωγής στο $1^{ο}$ τεταρτημόριο για τις παραπληρωματικές γωνίες είναι,

  $$ημω=ημ(180^{ο}-φ) \Leftrightarrow ημω=ημφ \Leftrightarrow ημω=\frac{3}{5}$$

και

$$συνω=συν(180^{ο}-φ) \Leftrightarrow συνω=-συνφ \Leftrightarrow συνω=-\frac{4}{5}$$

Παρόμοιες Ασκήσεις :

Σχολικό βιβλίο: -

§3.4 - Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις

«Θέμα Β»

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (17656)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x$, $x\in\mathbb{R}$

α) Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης; Ποια είναι η περίοδος της f ;

Μονάδες 9

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

Μονάδες 10

γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση μπορεί να πάρει την τιμή 1. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

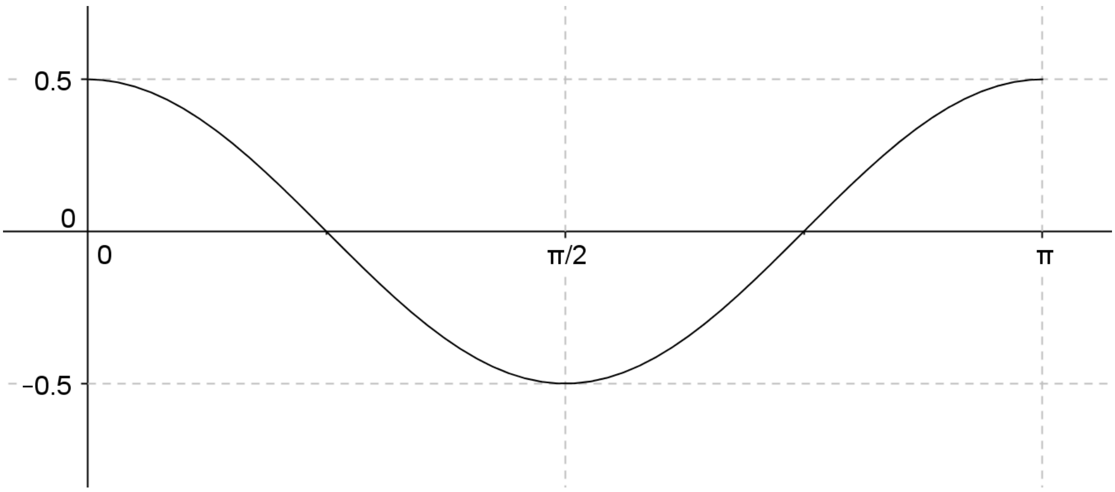
α) Η συνάρτηση f είναι της μορφής $\rho\sigma\upsilon\nu(\omega x)$ με $\rho=\frac{1}{2}>0$ και $\omega=2>0$. Άρα,

$\min f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}$ η ελάχιστη τιμή της f και $\max f(x)=f(0)=\frac{1}{2}$ η μέγιστη τιμή της f. Επιπλέον, η περίοδος της f θα είναι $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

β) Συμπληρώνουμε έναν πίνακα τιμών για την f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f(x)=\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x$	$\frac{1}{2}$	↘	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↗	$\frac{1}{2}$

Σχεδιάζουμε τώρα την γραφική παράσταση της f:



γ) Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f είναι το $\frac{1}{2}$, άρα, $f(x) \le \frac{1}{2} < 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως, η συνάρτηση f δε μπορεί να πάρει την τιμή 1.

Παρόμοιες Ασκήσεις : Σχολικό βιβλίο: *§3.4* Α΄ Ομάδας / Άσκηση 5

ΑΣΚΗΣΗ Β2 (17693)

α) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους παρακάτω αριθμούς:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6},\ \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4},\ \sigma\upsilon\nu\frac{17\pi}{10}$$

Μονάδες 12

β) Αν $\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2}$ να συγκρίνετε τους αριθμούς $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x_1\right)$ και $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x_2\right)$

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Είναι,

$$\frac{17\pi}{10} = \frac{10\pi + 7\pi}{10} = \pi + \frac{7\pi}{10}$$

Έτσι έχουμε,

$$\sigma\upsilon\nu\frac{17\pi}{10} = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{10\pi}{10}+\frac{7\pi}{10}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\pi+\frac{7\pi}{10}\right) = -\sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{10}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{7\pi}{10}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{10} \quad (1)$$

Ακόμη είναι,

$$0 < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{10} < \frac{\pi}{2} \ \left(\text{αφού } \frac{3\pi}{10} < \frac{5\pi}{10} = \frac{\pi}{2} \ \text{ και } \ \frac{5\pi}{20} = \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{10} = \frac{6\pi}{20}\right)$$

και η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, οπότε

$$\sigma\upsilon\nu 0 > \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} > \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} > \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{10} > \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \overset{(1)}{\Rightarrow} 0 < \sigma\upsilon\nu\frac{17\pi}{10} < \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} < \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} < 1$$

β) **<u>1ος τρόπος</u>**

Από τους τύπους αναγωγής στο 1ο τεταρτημόριο για τις συμπληρωματικές γωνίες έχουμε,

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x_1\right) = \sigma\upsilon\nu x_1 \ \text{ και } \ \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x_2\right) = \sigma\upsilon\nu x_2$$

με $\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2}$ και αφού η $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ ισχύει,

$$\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x_1 < \sigma\upsilon\nu x_2 \Rightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x_1\right) < \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x_2\right)$$

<u>2ος τρόπος</u>

Έχουμε,

$$\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -\pi > -x_1 > -x_2 > -\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \pi > \frac{\pi}{2} - x_1 > \frac{\pi}{2} - x_2 > \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{2} - x_1 > \frac{\pi}{2} - x_2 > -\pi \underset{\text{στο } \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]}{\overset{\eta\mu x \searrow}{\Leftrightarrow}} \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right) < \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x_2\right)$$

Παρόμοιες Ασκήσεις :

Σχολικό βιβλίο: -

ΑΣΚΗΣΗ Β3 (17704)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3\sigma\upsilon\nu 2x$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f

Μονάδες 12

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και να παραστήσετε γραφικά την f σε διάστημα μιας περιόδου.

Μονάδες 13

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$\sigma\upsilon\nu 2x$					
$f(x) = -3\sigma\upsilon\nu 2x$					

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι της μορφής $f(x) = \kappa \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega x)$ που είναι περιοδική με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$ με $\omega = 2$ και $\kappa = -3$, άρα έχουμε, $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Επιπλέον, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

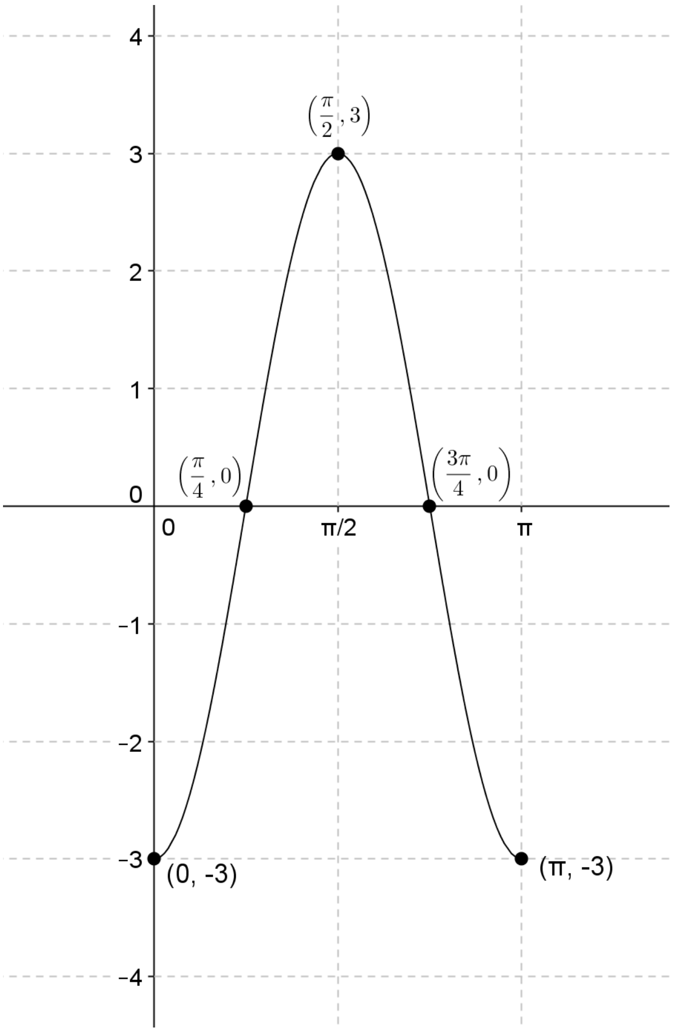
$$|\sigma\upsilon\nu 2x| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \sigma\upsilon\nu 2x \le 1 \overset{\cdot(-3)}{\Leftrightarrow} 3 \ge -3 \cdot \sigma\upsilon\nu 2x \ge -3 \Leftrightarrow f(-\pi) \ge -3 \cdot \sigma\upsilon\nu 2x \ge f(0)$$

Άρα το ελάχιστο της f είναι το -3 και το μέγιστο της το 3

β) Ο πίνακας συμπληρωμένος μετά τις πράξεις είναι,

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sigma\upsilon\nu 2x$	1	0	-1	0	1
$f(x) = -3\sigma\upsilon\nu 2x$	-3	0	3	0	-3

Ενώ η C_f σε διάστημα μιας περιόδου, δηλαδή στο $[0, \pi]$ φαίνεται παρακάτω,



Παρόμοιες Ασκήσεις :
Σχολικό βιβλίο: *§3.4* Α΄ Ομάδας / Άσκηση 5,6

ΑΣΚΗΣΗ Β4 (17725)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ημ(π - 3x) + συν\left(\frac{π}{2} - 3x\right), x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2ημ(3x)$

Μονάδες 10

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

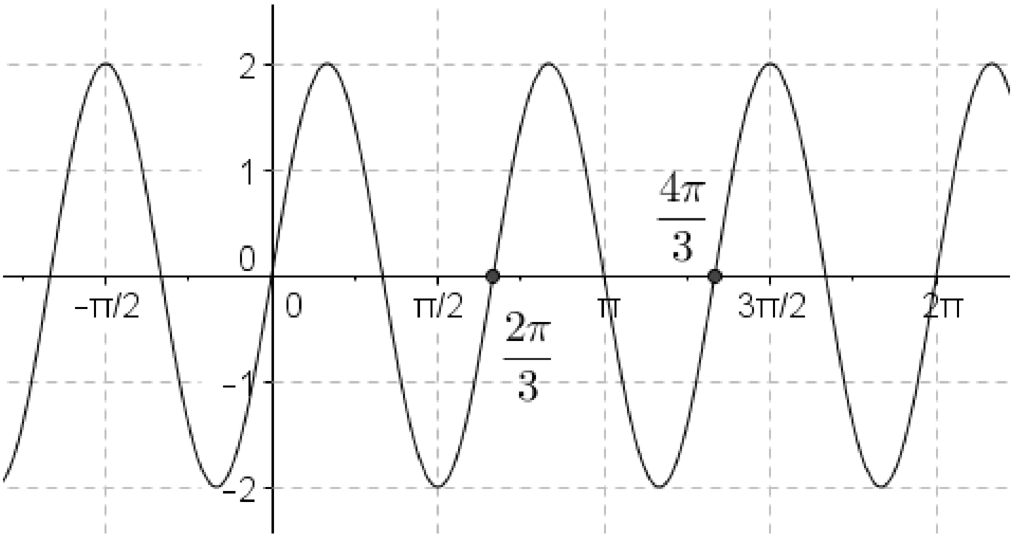
α) Έχουμε,

$$f(x) = ημ(π - 3x) + συν\left(\frac{π}{2} - 3x\right) = ημ3x + ημ3x = 2ημ3x$$

από τύπους αναγωγής στο $1^ο$ τεταρτημόριο για τις παραπληρωματικές γωνίες (στην πρώτη περίπτωση) και από τύπους αναγωγής στο $1^ο$ τεταρτημόριο για τις συμπληρωματικές γωνίες (στην δεύτερη περίπτωση) β) Η συνάρτηση f είναι της μορφής $f(x)=\rho\cdot ημ(ωx)$ με $ω=3$ και $\rho=2$, που είναι περιοδική με περίοδο $T=\frac{2\pi}{ω}$.

Επομένως, η συνάρτηση έχει ελάχιστο το -2, μέγιστο το 2 και περίοδο $T=\frac{2\pi}{3}$.

Άρα η γραφική της παράσταση είναι:



Παρόμοιες Ασκήσεις :

Σχολικό βιβλίο: *§3.3* Β΄ Ομάδας / Άσκηση -*§3.4* Α΄ Ομάδας / Άσκηση 3

ΑΣΚΗΣΗ Β5 (19913)

Έστω η συνάρτηση $f(x)=(ημx+συνx)^2, x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=1+ημ2x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Μονάδες 12

β) Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f.

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$f(x)=(ημx+συνx)^2=(ημx)^2+2ημxσυνx+(συνx)^2=\underbrace{ημ^2x+συν^2x}_{1}+2ημxσυνx=1+ημ2x$$

β) Θεωρώ συνάρτηση $φ(x)=ημ2x$ η οποία είναι της μορφής $\rho\cdot ημωx$, όπου ρ=1>0 και ω=2 > 0. Συνεπώς, η μέγιστη τιμή της συνάρτησης φ θα είναι ρ = 1 και η ελάχιστη τιμή της –ρ= – 1 και η περίοδός της $T=\frac{2\pi}{ω}=\frac{2\pi}{2}=\pi$

Άρα, η συνάρτηση $f(x)=1+φ(x)$ θα έχει περίοδο ίδια με την περίοδο της φ, δηλαδή $T=\pi$ και

μέγιστη τιμή maxf(x) =1+maxφ(x) = 1 + 1 = 2

ελάχιστη τιμή minf (x) = 1 + minφ(x) =1 + (-1) = 0

«Θέμα Δ»

ΑΣΚΗΣΗ Δ1 (17841)

Η Αλίκη και η Αθηνά διασκεδάζουν στη ρόδα του λούνα παρκ. Η απόσταση, σε μέτρα, του καθίσματός τους από το έδαφος τη χρονική στιγμή t sec δίνεται από τη συνάρτηση

$$h(t)=8+6\cdot ημ\left(\frac{\pi\cdot t}{30}\right),\quad 0\le t\le 180$$

α) Να βρείτε το ελάχιστον και το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το κάθισμα, καθώς και τις στιγμές κατά τις οποίες το κάθισμα βρίσκεται στο ελάχιστο και στο μέγιστο ύψος.

Μονάδες 8

β) Να υπολογίσετε την ακτίνα της ρόδας.

Μονάδες 3

γ) Να βρείτε την περίοδο της κίνησης, δηλαδή το χρόνο στον οποίο η ρόδα ολοκληρώνει μία περιστροφή. Πόσους γύρους έκαναν οι δύο φίλες στο διάστημα από 0 έως 180sec;

Μονάδες 4+2=6

δ) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας τον πίνακα τιμών και το σύστημα συντεταγμένων που δίνονται παρακάτω και:

i. να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης του ύψους $h(t)$.

Μονάδες 3

ii. να σχεδιάσετε στο σύστημα συντεταγμένων το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(t)$ με $0\le t\le 90$.

Μονάδες 5

t	0	15	30	45	60	75	90
$h(t)$							

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση h είναι συνάρτηση της μορφής

$$h(t)=\rho\cdot ημ(\omega t)+c \text{ με } \rho=6,\ \omega=\frac{\pi}{30} \text{ και } c=8.$$

Η γραφική της παράσταση προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=\rho\cdot ημ(\omega t)$ κατά $c=8$ μονάδες μήκους προς τα πάνω.

Η συνάρτηση g έχει μέγιστη τιμή $g_{max}=6$ και ελάχιστη τιμή $g_{min}=-6$ (αφού $\rho=6$), άρα αντίστοιχα η συνάρτηση h έχει μέγιστη τιμή $h_{max}=g_{max}+8=6+8=14$ και ελάχιστη τιμή $h_{min}=g_{min}+8=-6+8=2$.

Συνεπώς, το μέγιστο ύψος που φτάνει το κάθισμα είναι $h_{max}=14m$ ενώ το ελάχιστο ύψος είναι $h_{min}=2m$.

Για να βρούμε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες το κάθισμα βρίσκεται στο μέγιστο ύψος εργαζόμαστε ως εξής:

$h(t)=h_{max}=14$ όταν

$8+6\eta\mu\left(\frac{\pi\cdot t}{30}\right)=14\Leftrightarrow 6\eta\mu\left(\frac{\pi\cdot t}{30}\right)=14-8=6\Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi\cdot t}{30}\right)=1\ \eta\mu\left(\frac{\pi\cdot t}{30}\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow$

$\frac{\pi\cdot t}{30}=2k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow \frac{t}{30}=2k+\frac{1}{2},\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow t=60k+15,\ k\in\mathbb{Z}$.

Επιπλέον ισχύει $0\le t\le 180$ άρα

$$0\le 60k+15\le 180\Leftrightarrow -15\le 60k\le 165\Leftrightarrow -\frac{1}{4}\le k\le \frac{165}{60}\Leftrightarrow -0,25\le k\le 2,75$$

και αφού $k\in\mathbb{Z}$ το k μπορεί να πάρει τις τιμές 0 ή 1 ή 2.

Για $k=0$ έχουμε $t=60\cdot 0+15=15$, για $k=1$ έχουμε $t=60\cdot 1+15=75$ ενώ για $k=2$ έχουμε $t=60\cdot 2+15=135$, άρα το κάθισμα φτάνει στο μέγιστο ύψος τις χρονικές στιγμές 15sec, 75sec και 135sec.

Αντίστοιχα θα βρούμε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες το κάθισμα βρίσκεται στο ελάχιστο ύψος ως εξής:

$h(t)=h_{min}=2$ όταν

$8+6\eta\mu\left(\frac{\pi\cdot t}{30}\right)=2\Leftrightarrow 6\eta\mu\left(\frac{\pi\cdot t}{30}\right)=2-8=-6\Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi\cdot t}{30}\right)=-1$

$\Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi\cdot t}{30}\right)=\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right)\Leftrightarrow \frac{\pi\cdot t}{30}=2k\pi+\frac{3\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow \frac{t}{30}=2k+\frac{3}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow t=60k+45,\ k\in\mathbb{Z}$

Επιπλέον ισχύει $0\le t\le 180$ άρα

$$0\le 60k+45\le 180\Leftrightarrow -45\le 60k\le 135\Leftrightarrow -\frac{3}{4}\le k\le \frac{135}{60}\Leftrightarrow -0,75\le k\le 2,25$$

και αφού $k\in\mathbb{Z}$ το k μπορεί να πάρει τις τιμές 0 ή 1 ή 2.

Για $k=0$ έχουμε $t=60\cdot 0+45=45$, για $k=1$ έχουμε $t=60\cdot 1+45=105$ ενώ για $k=2$ έχουμε $t=60\cdot 2+45=165$, άρα το κάθισμα φτάνει στο μέγιστο ύψος τις χρονικές στιγμές 45sec, 105sec και 165sec.

β) Αν R είναι η ακτίνα της ρόδας τότε ισχύει $h_{max}-h_{min}=2R$, αφού οι θέσεις μέγιστου και ελάχιστου ύψους είναι αντιδιαμετρικά σημεία της κυκλικής τροχιάς του καθίσματος.

Συνεπώς

$$h_{max}-h_{min}=2R\Rightarrow 2R=14-2=12\Rightarrow R=6,$$

δηλαδή η ακτίνα της ρόδας είναι $R=6m$.

γ) Ο χρόνος μίας πλήρους περιστροφής της ρόδας είναι πχ ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών διελεύσεων του καθίσματος από τη θέση μέγιστου ύψους (ή ελάχιστου ύψους, ή γενικά οποιαδήποτε συγκεκριμένης θέσης της τροχιάς), άρα αφού πχ το κάθισμα βρίσκεται στη θέση μέγιστου ύψους τις διαδοχικές χρονικές στιγμές 15sec και 75sec, η περίοδος της κίνησης είναι $T = 75\sec - 15\sec = 60\sec$.

Επίσης μπορούμε $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{30}} = 60\sec$

Επιπλέον το διάστημα από 0sec έως 180sec (δηλαδή χρονικό διάστημα 180sec) είναι χρονικό διάστημα στο οποίο γίνονται $180\sec : 60\sec = 3$ πλήρεις περιστροφές του τροχού ή 3 γύροι για τις δύο φίλες.

δ) i. Ο πίνακας τιμών της συνάρτησης του ύψους $h(t)$, σε m, συμπληρώνεται ως εξής:

t	0	15	30	45	60	75	90
$h(t)$	8	14	8	2	8	14	8

αφού:

για $t = 0\sec$ είναι $h(0) = 8 + 6\cdot ημ\left(\dfrac{\pi\cdot 0}{30}\right) = 8 + 6\cdot ημ0 = 8 + 6\cdot 0 = 8$,

για $t = 15\sec$ είναι $h(15) = 8 + 6\cdot ημ\left(\dfrac{\pi\cdot 15}{30}\right) = 8 + 6\cdot ημ\dfrac{\pi}{2} = 8 + 6\cdot 1 = 14$,

για $t = 30\sec$ είναι $h(30) = 8 + 6\cdot ημ\left(\dfrac{\pi\cdot 30}{30}\right) = 8 + 6\cdot ημ\pi = 8 + 6\cdot 0 = 8$,

για $t = 45\sec$ είναι $h(45) = 8 + 6\cdot ημ\left(\dfrac{\pi\cdot 45}{30}\right) = 8 + 6\cdot ημ\dfrac{3\pi}{2} = 8 + 6\cdot(-1) = 2$,

για $t = 60\sec$ είναι $h(60) = 8 + 6\cdot ημ\left(\dfrac{\pi\cdot 60}{30}\right) = 8 + 6\cdot ημ2\pi = 8 + 6\cdot 0 = 8$,

για $t = 75\sec$ είναι $h(75) = 8 + 6\cdot ημ\left(\dfrac{\pi\cdot 75}{30}\right) = 8 + 6\cdot ημ\dfrac{5\pi}{2} = 8 + 6\cdot 1 = 14$,

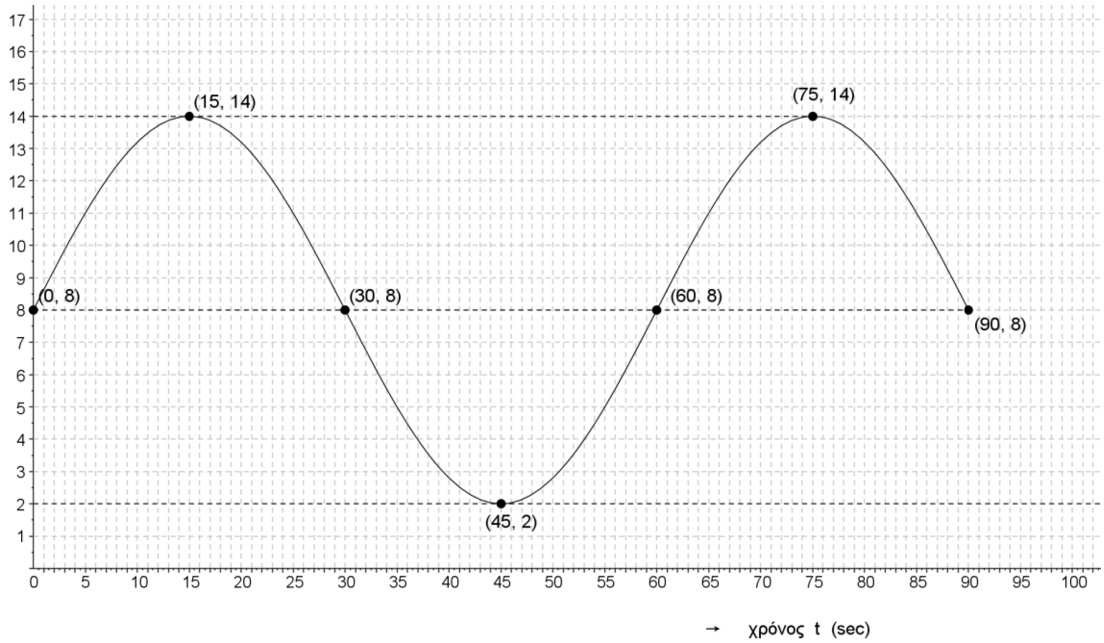
αφού $ημ\dfrac{5\pi}{2} = ημ\left(2\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = ημ\dfrac{\pi}{2} = 1$

για $t = 90\sec$ είναι $h(90) = 8 + 6\cdot ημ\left(\dfrac{\pi\cdot 90}{30}\right) = 8 + 6\cdot ημ3\pi = 8 + 6\cdot 0 = 8$,

αφού $ημ3\pi = ημ(2\pi + \pi) = ημ\pi = 0$.

ii. Η $h(t) = 8 + 6\cdot ημ\left(\dfrac{\pi\cdot t}{30}\right)$ έχει Τ=60 ,μέγιστη τιμή 14 και ελάχιστη τιμή το 2.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(t)$ με $0 \le t \le 90$ δίνεται από το παρακάτω σχήμα:



Παρόμοιες Ασκήσεις :
Σχολικό βιβλίο: §3.4 Β΄ Ομάδας / Άσκηση 2,3

ΑΣΚΗΣΗ Δ2 (17852)

Ένα παιγνίδι κρέμεται με ένα ελατήριο από το ταβάνι. Το ύψος του από το πάτωμα σε cm συναρτήσει του χρόνου t (sec) δίνεται από τη σχέση:

$$h(t) = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t) + \beta \text{ όπου } \alpha, \beta \text{ πραγματικές σταθερές και } \omega > 0.$$

Όταν το ελατήριο ταλαντώνεται, το ελάχιστο ύψος του παιχνιδιού από το πάτωμα είναι 20cm και το μέγιστο 100cm. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το ύψος παίρνει την ελάχιστη τιμή του και ο χρόνος μιας πλήρους ταλάντωσης (θέσεις: ελάχιστο-ηρεμία-μέγιστο-ηρεμία-ελάχιστο) είναι 6sec.

α) Να δείξετε ότι $\omega = \frac{\pi}{3}$

Μονάδες 5

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των α και β αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Μονάδες 6

γ) Να υπολογίσετε το ύψος του παιγνιδιού από το πάτωμα 14sec μετά την έναρξη της ταλάντωσης.

Μονάδες 8

δ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h(t), για $0 \le t \le 12$.

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

α) Ξέρουμε ότι η περίοδος δίνεται από το τύπο $T = \frac{2\pi}{\omega}$, μας δίνεται από τα δεδομένα της άσκησης ότι η περίοδος είναι 6sec, επομένως έχουμε:

$$\frac{2\pi}{\omega} = 6 \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{3}$$

β) Έχουμε,

$$h(0)=20 \Leftrightarrow \alpha\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega\cdot 0)+\beta=20 \Leftrightarrow \alpha\cdot 1+\beta=20 \Leftrightarrow \boxed{\alpha+\beta=20}$$

Εφόσον η περίοδος του ελατηρίου είναι 6sec και μια πλήρη ταλάντωση σημαίνει κίνηση στις θέσεις: ελάχιστο-ηρεμία-μέγιστο-ηρεμία-ελάχιστο, άρα το παιγνίδι θα χρειαστεί το μισό χρόνο (3sec) για να φτάσει στο μέγιστο ύψος του .

$$h(3)=100 \Leftrightarrow \alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\cdot 3\right)+\beta=100 \Leftrightarrow \alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\pi+\beta=100 \Leftrightarrow \boxed{-\alpha+\beta=100}$$

Λύνουμε το σύστημα των δυο εξισώσεων, και έχουμε:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=20\\ -\alpha+\beta=100\end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 2\beta=120 \Rightarrow \boxed{\beta=60}.\ \text{Επομένως : }\ \alpha+60=20 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=-40}$$

Άρα η συνάρτηση θα έχει τύπο:

$$h(t)=-40\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi t}{3}\right)+60$$

γ)Έχουμε,

$$h(14)=-40\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{14\pi}{3}\right)+60=-40\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{12\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)+60=-40\cdot\sigma\upsilon\nu\left(2\cdot 2\pi+\frac{2\pi}{3}\right)+60$$

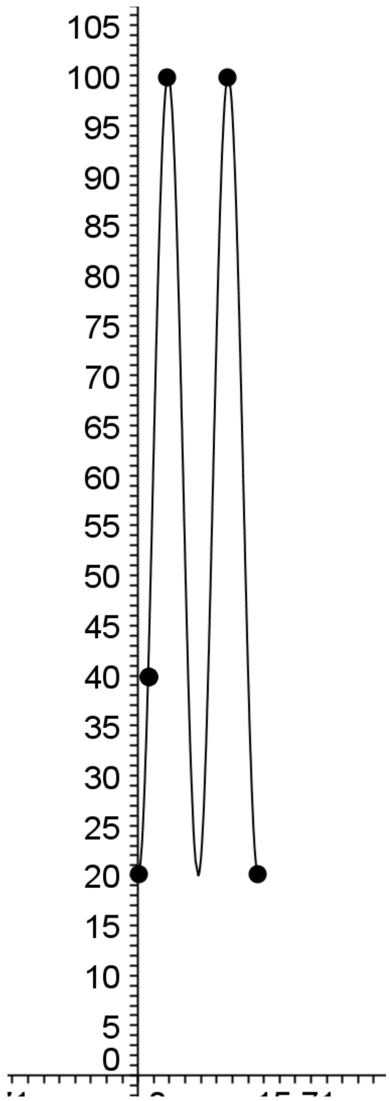
$$=-40\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}\right)+60$$

$$=-40\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+60$$

$$=-40\cdot\left(-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)+60$$

$$=-40\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+60=20+60=80$$

δ) Η γραφική παράσταση φαίνεται δίπλα.



Παρόμοιες Ασκήσεις :

Σχολικό βιβλίο: §3.4 Β΄ Ομάδας / Άσκηση 3

ΑΣΚΗΣΗ Δ3 (4_20339)

Μια ρόδα ποδηλάτου περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της. Σημειώνουμε ένα σημείο Ρ της ρόδας (όπως φαίνεται στο σχήμα), το οποίο τη χρονική στιγμή $t=0$, είναι το σημείο επαφής της ρόδας με μια επιφάνεια. Η συνάρτηση που εκφράζει την απόσταση h (σε m) του σημείου Ρ από την επιφάνεια, t sec μετά την αρχή της κίνησης δίνεται από τη σχέση:

$$h(t)=-0,2συν(ωt)+0,2$$, με ω θετική πραγματική σταθερά.

Υποθέτουμε ότι το σημείο Ρ κάνει ένα πλήρη κύκλο σε 4 sec.

α) Να αποδείξετε ότι $ω=\frac{π}{2}$.

Μονάδες 5

β) Να προσδιορίσετε την απόσταση του Ρ από την επιφάνεια τις στιγμές: $t_1=1sec$, $t_2=2sec$ και $t_3=7sec$.

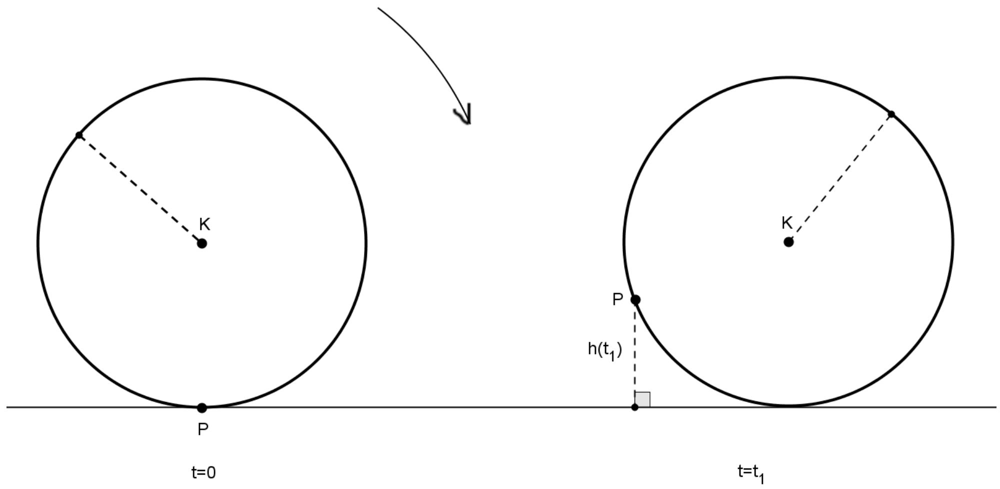
Μονάδες 6

γ) Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της h.

Μονάδες 5

δ) Να προσδιορίσετε την ακτίνα της ρόδας.

Μονάδες 9



ΛΥΣΗ

α) Επειδή ο κύκλος κάνει μια πλήρη περιστροφή σε 4sec σημαίνει ότι η περίοδος της συνάρτησης είναι 4, άρα

$$T=4 \Leftrightarrow 4=\frac{2π}{ω} \Leftrightarrow ω=\frac{π}{2}$$

β) Έχουμε,

$$h(1)=-0,2\cdot συν\left(\frac{π}{2}\cdot 1\right)+0,2=-0,2\cdot 0+0,2=0,2$$

$$h(2) = -0,2 \cdot συν\left(\frac{π}{2} \cdot 2\right) + 0,2 = -0,2 \cdot (-1) + 0,2 = 0,2 + 0,2 = 0,4$$

$$h(7) = -0,2 \cdot συν\left(\frac{π}{2} \cdot 7\right) + 0,2 = -0,2 \cdot συν\left(\frac{7π}{2}\right) + 0,2 = -0,2 \cdot συν\left(4π - \frac{π}{2}\right) + 0,2 = 0,2$$

γ) Έχουμε,

$$-1 \le συν\left(\frac{πt}{2}\right) \le 1 \Leftrightarrow 0,2 \ge -0,2 \cdot συν\left(\frac{πt}{2}\right) \ge -0,2 \Leftrightarrow 0,4 \ge h(t) \ge 0 \Leftrightarrow h(2) \ge h(t) \ge h(0)$$

άρα η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 0,4 m (και πραγματοποιείται για πρώτη φορά μετά από 2 sec), ενώ η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης είναι 0 m (και προφανώς πραγματοποιείται στην αρχή του πειράματος).

δ) Όταν η απόσταση του σημείου P από την επιφάνεια είναι μέγιστη, καταλαβαίνουμε ότι βρίσκεται στο αντιδιαμετρικό σημείο του κύκλου σε σχέση με το σημείο της επιφάνειας, άρα η απόσταση του σημείου εκφράζει την διάμετρο του κύκλου, δηλαδή

$$h(2) = 0,4 \Leftrightarrow 2ρ = 0,4 \Leftrightarrow ρ = 0,2$$

Επομένως η ακτίνα του κύκλου είναι 0,2 m.

§3.5 - Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις

«Θέμα Β»

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (16968)

α) Είναι η τιμή $x=\frac{\pi}{4}$ λύση της εξίσωσης $3\sigma\upsilon\nu 4x+3=0$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\sigma\upsilon\nu 4x$ με την ευθεία $y=-1$.

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$3\sigma\upsilon\nu 4x+3=0 \Leftrightarrow 3\cdot(\sigma\upsilon\nu 4x+1)=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 4x+1=0 \ (1)$$

Για $x=\frac{\pi}{4}$ η (1) γίνεται:

$$\sigma\upsilon\nu\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right)+1=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\pi+1=0 \Leftrightarrow -1+1=0, \text{ που ισχύει.}$$

Δηλαδή, το $\frac{\pi}{4}$ επαληθεύει την (1), άρα, είναι λύση της.

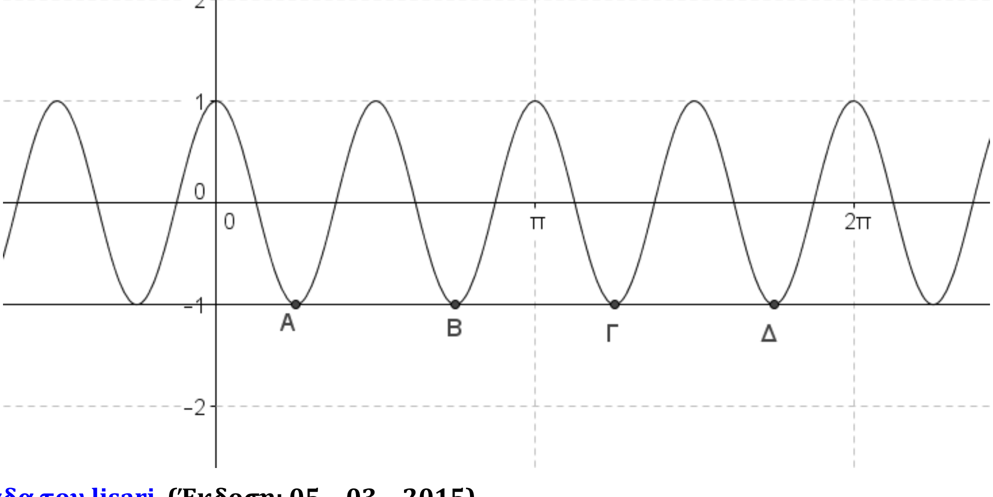
β) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\sigma\upsilon\nu 4x$ με την ευθεία $y=-1$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=-1$.

Οπότε έχουμε:

$$f(x)=-1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 4x=-1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 4x=\sigma\upsilon\nu\pi$$

$$\Leftrightarrow 4x=2\kappa\pi\pm\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\frac{2\kappa\pi}{4}\pm\frac{\pi}{4},\ \kappa\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\kappa\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{4},\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

Αυτό φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα, όπου σε πλάτος κάθε περιόδου, εμφανίζονται τα 4 σημεία τομής.



Παρόμοιες Ασκήσεις :
Σχολικό βιβλίο: *§3.5* Α΄ Ομάδας / Άσκηση 2 (iv)

ΑΣΚΗΣΗ Β2 (17652)
Δίνεται γωνία ω που ικανοποιεί τη σχέση:

$$(\eta\mu\omega+\sigma\upsilon\nu\omega)^2=1$$

α) Να αποδείξετε ότι είτε $\eta\mu\omega=0$ είτε $\sigma\upsilon\nu\omega=0$

Μονάδες 13

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές της γωνίας ω

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ
α) Έχουμε:

$$\begin{aligned}(\eta\mu\omega+\sigma\upsilon\nu\omega)^2=1 &\Leftrightarrow \eta\mu^2\omega+2\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1\\ &\Leftrightarrow \underbrace{\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega}_{1}+2\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega=1\\ &\Leftrightarrow 1+2\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega=1\\ &\Leftrightarrow 2\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega=0\\ &\Leftrightarrow \eta\mu\omega=0 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\omega=0\end{aligned}$$

β) Έχουμε,

$$\eta\mu\omega=0\Leftrightarrow\eta\mu\omega=\eta\mu0\Leftrightarrow\begin{cases}\omega=2k\pi+0\\ \text{ή}\\ \omega=2k\pi+(\pi-0)\end{cases},k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\begin{cases}\omega=2k\pi\\ \text{ή}\\ \omega=(2k+1)\pi\end{cases},k\in\mathbb{Z}$$

άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι $\omega=\lambda\pi\ ,\lambda\in\mathbb{Z}$

Επίσης,

$$\sigma\upsilon\nu\omega=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\omega=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\omega=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}\ ,k\in\mathbb{Z}$$

Τελικά, οι δυνατές τιμές της γωνίας ω είναι $\omega=k\pi$ ή $\omega=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}\ ,k\in\mathbb{Z}$.

(Η δεύτερη μορφή γράφεται ισοδύναμα και ως εξής: $\omega=k\pi+\frac{\pi}{2}\ ,k\in\mathbb{Z}$)

Παρόμοιες Ασκήσεις :
Σχολικό βιβλίο: *§3.5* Α΄ Ομάδας / Άσκηση 1 (i,iii), Άσκηση 5

ΑΣΚΗΣΗ Β3 (17681)
Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\eta\mu x+1$, $x\in\mathbb{R}$.
α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f

Μονάδες 10

β) Για ποια τιμή του $x\in[0,2\pi]$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή;

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) **1ος τρόπος: (Αλγεβρικά)**

Από τη γνωστή σχέση $-1 \le ημx \le 1$, $x \in \mathbb{R}$, έχουμε,

$$-1 \le ημx \le 1 \overset{\bullet 2}{\Leftrightarrow} -2 \le 2ημx \le 2 \overset{+1}{\Leftrightarrow} -2+1 \le 2ημx+1 \le 2+1$$

$$\Leftrightarrow -1 \le 2ημx+1 \le 3 \Leftrightarrow -1 \le f(x) \le 3 \quad (1).$$

Όμως,

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2ημ\frac{\pi}{2}+1 = 2\cdot 1+1 = 3 \quad \text{και} \quad f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2ημ\left(-\frac{\pi}{2}\right)+1 = 2\cdot(-1)+1 = -1.$$

Άρα η σχέση (1) γίνεται

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \le f(x) \le f\left(\frac{\pi}{2}\right), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα η ελάχιστη τιμή της f είναι -1 και η μέγιστη 3.

2ος Τρόπος (γεωμετρικά)

Η συνάρτηση $g(x) = 2ημx$ είναι της μορφής $ρσυν(ωx)$ με $ρ = 2 > 0$ και $ω = 1 > 0$.

Άρα, η μέγιστη τιμή της f είναι ίση με το $ρ = 2$ και η ελάχιστη ίση με το $-ρ = -2$

Η συνάρτηση $f(x) = 2ημx+1$, $x \in \mathbb{R}$., έχει γραφική παράσταση που προκύπτει από την αντίστοιχη της g με κατακόρυφη μετατόπιση κατά 1 μονάδα προς τα επάνω. Κατά συνέπεια η συνάρτηση f θα έχει μέγιστη τιμή 3 και ελάχιστη τιμή το -1.

β) Αναζητούμε $x \in [0, 2\pi]$ τέτοιο ώστε,

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow 2ημx+1 = 3 \Leftrightarrow ημx = 1 \Leftrightarrow ημx = ημ\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 2k\pi+\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \ (1).$$

Όμως έχουμε τον περιορισμό

$$0 \le x \le 2\pi \Leftrightarrow 0 \le 2k\pi+\frac{\pi}{2} \le 2\pi \Leftrightarrow 0 \le 2k+\frac{1}{2} \le 2 \Leftrightarrow 0 \le 4k+1 \le 4$$

$$\Leftrightarrow -1 \le 4k \le 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \le k \le \frac{3}{4} \quad \text{και} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Άρα $k = 0$.

Οπότε η σχέση (1) δίνει $x = \frac{\pi}{2}$.

Παρόμοιες Ασκήσεις :

Σχολικό βιβλίο: *§3.4* Α΄ Ομάδας / Άσκηση 5-*§3.5*Α΄ Ομάδας / Άσκηση 12

ΑΣΚΗΣΗ Β4 (17692)

α) Να αποδείξετε ότι $ημ\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+συν(\pi+x) = 0$.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in [0, 2\pi)$ για τις οποίες ισχύει $συνx = -ημ\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$.

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει ότι

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-(-x)\right)=\sigma\upsilon\nu(-x)=\sigma\upsilon\nu x\,,$$

[διότι είναι οι γωνίες με άθροισμα $\frac{\pi}{2}$ rad και έτσι το ημίτονο της μιας είναι το συνημίτονο της άλλης], δηλαδή $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sigma\upsilon\nu x$ (1).

Επίσης,

$$\sigma\upsilon\nu(\pi+x)=-\sigma\upsilon\nu x \quad (2)$$

[διότι οι γωνίες που διαφέρουν κατά π rad έχουν αντίθετα συνημίτονα].
Οπότε από (1) και (2) έχουμε,

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sigma\upsilon\nu(\pi+x)=\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x=0$$

β) Η σχέση $\sigma\upsilon\nu x=-\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ είναι ισοδύναμη με την

$$\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=0\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow$$

$$x=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}. \quad (3)$$

Έχουμε όμως τον περιορισμό

$$0\le x<2\pi\Leftrightarrow 0\le k\pi+\frac{\pi}{2}<2\pi\Leftrightarrow 0\le k+\frac{1}{2}<2\Leftrightarrow 0\le 2k+1<4.$$

$$\Leftrightarrow -1\le 2k\le 3\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le k\le\frac{3}{2}$$

όμως $k\in\mathbb{Z}$, άρα $k=0$ ή $k=1$.

- Για $k=0$ η σχέση (3) δίνει $x=\frac{\pi}{2}$.
- Για $k=1$ η σχέση (3) δίνει $x=\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$

Παρόμοιες Ασκήσεις :
Σχολικό βιβλίο: *§3.3* Α΄ Ομάδας / Άσκηση 5,6-*§3.5 Β΄* Ομάδας / Άσκηση 1,5

ΑΣΚΗΣΗ Β5 (17736)

Δίνεται η παράσταση: $A=\frac{\eta\mu^2 x}{1-\sigma\upsilon\nu x}$, $x\neq 2\kappa\pi\,,\kappa\in\mathbb{Z}$

α) Να αποδείξετε ότι $A=1+\sigma\upsilon\nu x$

Μονάδες 12

β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{\eta\mu^2 x}{1-\sigma\upsilon\nu x}=\frac{1}{2}$ στο διάστημα $(0,2\pi)$

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \neq 2\kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, έχουμε,

$$A = \frac{\eta\mu^2 x}{1-\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{1-\sigma\upsilon\nu x} = \frac{(1-\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)}{1-\sigma\upsilon\nu x} = 1+\sigma\upsilon\nu x$$

β) Αφού $\frac{\eta\mu^2 x}{1-\sigma\upsilon\nu x} = 1+\sigma\upsilon\nu x$, η εξίσωση, ισοδύναμα, γίνεται:

$$1+\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$x = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3}$.

Όμως $x \in (0, 2\pi)$ άρα :

- Αν $x = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3}$

  $0 < 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} < 2\pi \Leftrightarrow 0 - \frac{2\pi}{3} < 2\kappa\pi < 2\pi - \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3} < 2\kappa\pi < \frac{4\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < \kappa < \frac{2}{3}$.

  Αφού $\kappa \in Z$ τότε $\kappa = 0$ άρα $x = \frac{2\pi}{3}$

- Αν $x = 2\kappa\pi - \frac{2\pi}{3}$

  $0 < 2\kappa\pi - \frac{2\pi}{3} < 2\pi \Leftrightarrow 0 + \frac{2\pi}{3} < 2\kappa\pi < 2\pi + \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} < 2\kappa\pi < \frac{8\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < \kappa < \frac{4}{3}$. Αφού

  $\kappa \in Z$ τότε $\kappa = 1$ άρα $x = \frac{4\pi}{3}$

Παρόμοιες Ασκήσεις :

Σχολικό βιβλίο: *§3.2* Α΄ Ομάδας / Άσκηση 10,11-*§3.5* Α΄ Ομάδας / Άσκηση 2

ΑΣΚΗΣΗ Β6 (17739)

Έστω γωνία x για την οποία ισχύουν: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ και $\eta\mu(\pi - x) - \eta\mu(\pi + x) = 1$

α) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu x = \frac{1}{2}$

Μονάδες 12

β) Να βρείτε την γωνία x

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Από τύπους αναγωγής στο 1ο τεταρτημόριο για τις παραπληρωματικές γωνίες και για τις γωνίες που διαφέρουν κατά π ακτίνια, είναι:

$$\eta\mu(\pi - x) - \eta\mu(\pi + x) = 1 \Leftrightarrow \eta\mu x - [-\eta\mu x] = 1 \Leftrightarrow \eta\mu x + \eta\mu x = 1 \Leftrightarrow 2\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{1}{2}$$

β) **1ος τρόπος**

Έχουμε,

$$\eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{6},\ \text{θα είναι } x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

Επειδή η μοναδική (*λόγω μονοτονίας*) γωνία από π/2 έως π $\left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$ που δίνει ημίτονο $\frac{1}{2}$ είναι απευθείας η $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

2ος τρόπος

Έχουμε,

$\eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left(x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6}\right), \kappa \in \mathbb{Z}$, και αφού $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ έχουμε :

- Αν $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ τότε

  $\frac{\pi}{2} < 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} < \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} < 2\kappa\pi < \pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} < 2\kappa\pi < \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{6} < \kappa < \frac{5}{12}$, αφού $\kappa \in \mathbb{Z}$ τότε δεν υπάρχει κ

- Αν $x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}$ τότε

  $\frac{\pi}{2} < 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} < \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} < 2\kappa\pi < \pi - \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{2\pi}{6} < 2\kappa\pi < \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{1}{6} < \kappa < \frac{1}{12}$, αφού $\kappa \in \mathbb{Z}$ τότε $\kappa = 0$ άρα $x = \frac{5\pi}{6}$

Παρόμοιες Ασκήσεις :

Σχολικό βιβλίο: *§3.5 Α΄* Ομάδας / Άσκηση -*§3.5 Β΄* Ομάδας / Άσκηση 3

ΑΣΚΗΣΗ Β7 (17741)

α) Να αποδείξετε ότι : $\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x} = \frac{2}{\eta\mu x}$ όπου $x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$

Μονάδες 13

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$, είναι:

$$\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\eta\mu x(1+\sigma\upsilon\nu x)}{(1-\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)} + \frac{\eta\mu x(1-\sigma\upsilon\nu x)}{(1-\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)}$$

$$= \frac{\eta\mu x + \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x - \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{2\eta\mu x}{\eta\mu^2 x} = \frac{2}{\eta\mu x}$$

β) Για $x \neq \kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ είναι

$$\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}+\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}=\frac{4}{\sqrt{3}} \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow} \frac{2}{\eta\mu x}=\frac{4}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 4\eta\mu x = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \left(2\kappa\pi+\frac{\pi}{3} \text{ ή } x = 2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{3}\right),\ \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \left(2\kappa\pi+\frac{\pi}{3} \text{ ή } x = 2\kappa\pi+\frac{2\pi}{3}\right),\ \kappa \in \mathbb{Z}$$

Παρόμοιες Ασκήσεις :
Σχολικό βιβλίο: *§3.2* Α΄ Ομάδας / Άσκηση 11- *§3.5* Α΄ Ομάδας / Άσκηση 1

«Θέμα Δ»

ΑΣΚΗΣΗ Δ1 (17837)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|\alpha+1|\eta\mu(\beta\pi x)$ με $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\beta > 0$, η οποία έχει μέγιστη τιμή 3 και περίοδο 4.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 2$ ή $\alpha = -4$ και $\beta = \frac{1}{2}$.

Μονάδες 7

β) Για $\alpha = 2$ και $\beta = \frac{1}{2}$,

i. να λυθεί η εξίσωση $f(x)=3$.

Μονάδες 10

ii. να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0,8]$.

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι συνάρτηση της μορφής $f(x)=\rho\cdot\eta\mu\omega x$, όπου $\rho=|\alpha+1|>0$ και $\omega=\beta\pi>0$ (αφού $\beta>0$). Γνωρίζουμε ότι για κάθε συνάρτηση της μορφής αυτής ισχύει ότι η μέγιστη τιμή της είναι η ρ και η περίοδός της είναι η $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

Η συνάρτησή μας έχει μέγιστη τιμή 3, άρα ισχύει:

$$|\alpha+1|=3 \Leftrightarrow \alpha+1=3 \text{ ή } \alpha+1=-3 \Leftrightarrow \alpha=2 \text{ ή } \alpha=-4.$$

Επίσης η συνάρτησή μας έχει περίοδο 4, άρα ισχύει:

$$\frac{2\pi}{\beta\pi}=4 \Leftrightarrow \frac{2}{\beta}=4 \Leftrightarrow \beta=\frac{1}{2}$$

β) Για $\alpha=2$ και $\beta=\frac{1}{2}$ η συνάρτηση έχει τύπο:

$$f(x)=|2+1|\eta\mu\left(\frac{1}{2}\pi x\right)\Leftrightarrow f(x)=3\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

i. Έχουμε,

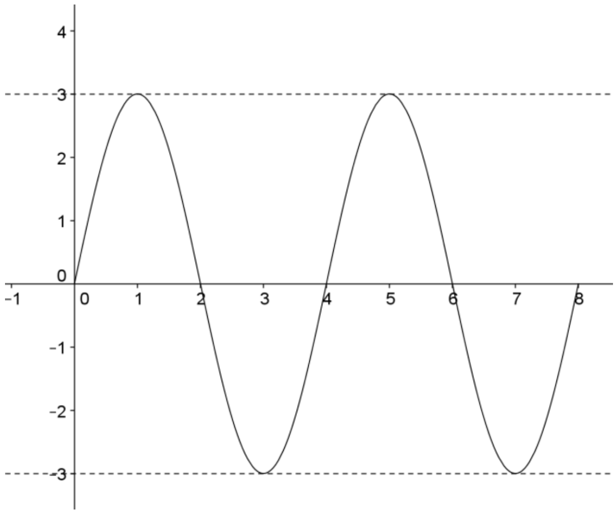
$$f(x)=3\Leftrightarrow 3\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)=3\Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)=1\Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\frac{\pi x}{2}=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow \pi x=4k\pi+\pi\Leftrightarrow x=4k+1,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Άρα η εξίσωση $f(x)=3$ έχει άπειρες λύσεις, των οποίων η μορφή είναι η

$$x=4k+1,\ k\in\mathbb{Z}.$$

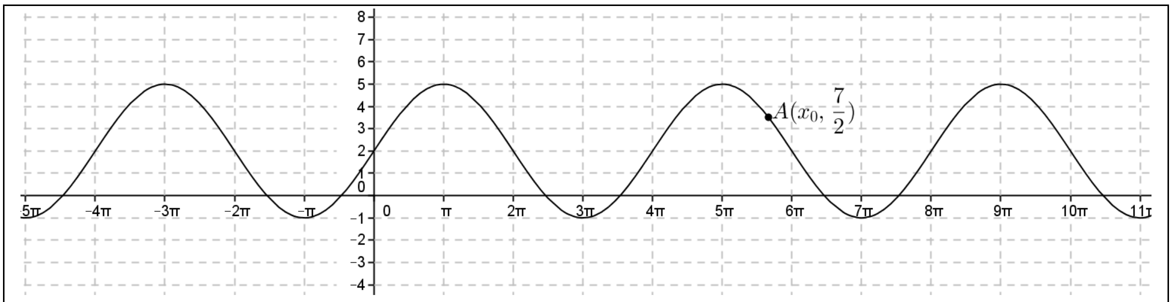
ii. Η $f(x)=3\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ έχει $T=4$, μέγιστη τιμή το 3 και ελάχιστη τιμή το -3. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Επιπλέον το διάστημα $[0,8]$ είναι διάστημα δύο περιόδων της f, γι αυτό και η γραφική παράσταση της f εκτείνεται σε διάστημα δύο πλήρων επαναλήψεών της.

Παρόμοιες Ασκήσεις :
Σχολικό βιβλίο: *§3.4* Α΄ Ομάδας / Άσκηση 5-Β΄ Ομάδας / Άσκηση 2-*§3.5* Α΄ Ομάδας / Άσκηση 3

ΑΣΚΗΣΗ Δ2 (4_17843) *(αποσύρθηκε 14 – 12 – 2014, διορθώθηκε και προστέθηκε στις 21 – 01 – 2015)*
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία είναι της μορφής: $f(x)=\rho\cdot\eta\mu(\omega x)+k$ με ρ,k : πραγματικές σταθερές και $\omega>0$.



α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να βρείτε:
i. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f

Μονάδες 3

ii. την περίοδο Τ της συνάρτησης f

Μονάδες 3

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των σταθερών ρ, ω και k. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

γ) Θεωρώντας γνωστό ότι: $\rho = 3,\ \omega = \frac{1}{2}$ και $k = 2$, να προσδιορίσετε αλγεβρικά την τετμημένη x_0 του σημείου Α της γραφικής παράστασης, που δίνεται στο σχήμα.

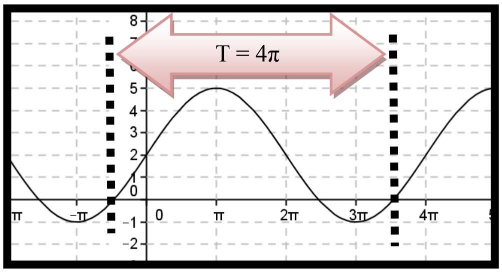
Μονάδες 10

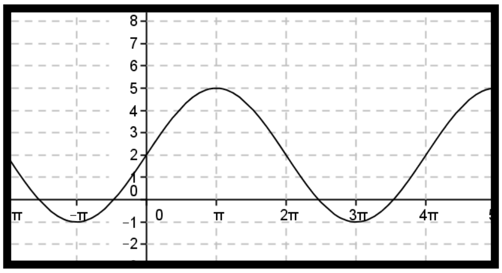
ΛΥΣΗ

α) i) Από τη γραφική παράσταση της f παρατηρούμε ότι η παράσταση μας έχει μέγιστη τιμή το 5 και ελάχιστη τιμή το -1.

ii) **α΄ τρόπος:** Η ημιτονοειδής καμπύλης ολοκληρώνεται από $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ έως $x_2 = 3\pi + \frac{\pi}{2}$, επομένως η περίοδος της είναι $T = 4\pi$.

β’ τρόπος: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης προκύπτει από την αντίστοιχη της συνάρτησης $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x)$ με $\rho, \omega > 0$ με κατακόρυφη μετατόπιση κατά 2 μονάδες προς τα επάνω. Έτσι, προκύπτει $k = 2$ και, με την βοήθεια της ευθείας $y = 2$, η περίοδος της είναι $T = 4\pi$.





β) Από το α) ii. ερώτημα έχουμε ότι $\boxed{k = 2}$ και $T = 4\pi$.

Επιπλέον, (*σύμφωνα με το αναλυτικά σχόλια στην αρχή αυτού του κεφαλαίου*), η συνάρτησή μας θα έχει μέγιστο $\rho + \kappa$ και ελάχιστο $-\rho + \kappa$.

Επομένως

$$\begin{cases} \rho + \kappa = 5 \\ -\rho + \kappa = -1 \end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \rho + \kappa = 5 \\ 2\kappa = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho + 2 = 5 \\ \kappa = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 3 \\ \kappa = 2 \end{cases}$$

Ακόμη, γνωρίζουμε ότι

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{1}{2}$$

γ) Έχουμε λοιπόν $f(x)=3\cdot ημ\frac{x}{2}+2$, για το σημείο Α, εφόσον ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f, θα ισχύει τότε: $f(x_0)=\frac{7}{2}$

$$3\cdot ημ\frac{x_0}{2}+2=\frac{7}{2}\Leftrightarrow 3\cdot ημ\frac{x_0}{2}=\frac{7}{2}-2\Leftrightarrow 3\cdot ημ\frac{x_0}{2}=\frac{7-4}{2}\Leftrightarrow \boxed{ημ\frac{x_0}{2}=\frac{1}{2}}$$

Ψάχνουμε λοιπόν τις ρίζες της τριγωνομετρικής εξίσωσης στο διάστημα $[5π,6π]$.

$$ημ\frac{x_0}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow ημ\frac{x_0}{2}=ημ\frac{π}{6}\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x_0}{2}=2κπ+\frac{π}{6},κ\in\mathbb{Z}\\ \frac{x_0}{2}=2κπ+π-\frac{π}{6},κ\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x_0=4κπ+\frac{π}{3},κ\in\mathbb{Z}\\ x_0=4κπ+\frac{5π}{3},κ\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Επομένως θα έχουμε:

$$5π\le 4κπ+\frac{π}{3}\le 6π\Leftrightarrow 5π-\frac{π}{3}\le 4κπ\le 6π-\frac{π}{3}\Leftrightarrow \frac{14π}{3}\le 4κπ\le\frac{17π}{3}\Leftrightarrow \frac{14}{12}\le κ\le\frac{17}{12}$$

από όπου προκύπτει ότι δεν υπάρχει $κ\in\mathbb{Z}$

$$5π\le 4κπ+\frac{5π}{3}\le 6π\Leftrightarrow 5π-\frac{5π}{3}\le 4κπ\le 6π-\frac{5π}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{10π}{3}\le 4κπ\le\frac{13π}{3}\Leftrightarrow \frac{10}{12}\le κ\le\frac{13}{12}\overset{κ\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} κ=1$$

από όπου βρίσκουμε $x_0=4π+\frac{5π}{3}=\frac{17π}{3}$

Παρόμοιες Ασκήσεις :
Σχολικό βιβλίο: §3.4 Β΄ Ομάδας / Άσκηση 1-§3.5 Β΄ Ομάδας / Άσκηση 3

Εδώ προβληματιζόμαστε…
Ο περιορισμός $ω>0$ είναι υποχρεωτικός για να έχουμε μοναδική λύση, αφού για $ρ=-3$ και $ω=-\frac{1}{2}$, έχουμε

$$-3ημ\left(-\frac{x}{2}\right)=3ημ\left(\frac{x}{2}\right),$$

δηλαδή υπάρχει και δεύτερη λύση στο πρόβλημα! Επομένως για να είμαστε σύμφωνοι με την θεωρία του σχολικού βιβλίου (*σχόλιο σελ. 81*), πρέπει η άσκηση να δίνει **ω θετική σταθερά** *(κάτι που απουσίαζε στην πρώτη εκδοχή)*

ΑΣΚΗΣΗ Δ3 (17846)
Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x)=συνx$ και $g(x)=συν2x$

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών των συναρτήσεων f και g. Στη συνέχεια, να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f (x) και g (x), για $x \in [0, 2\pi]$.

Μονάδες 8

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$f(x)$									
$g(x)$									

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, να προσδιορίσετε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

Μονάδες 4

γ) Να λύσετε αλγεβρικά την εξίσωση (1) στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και να σημειώσετε πάνω στο σχήμα του ερωτήματος (α) τις συντεταγμένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

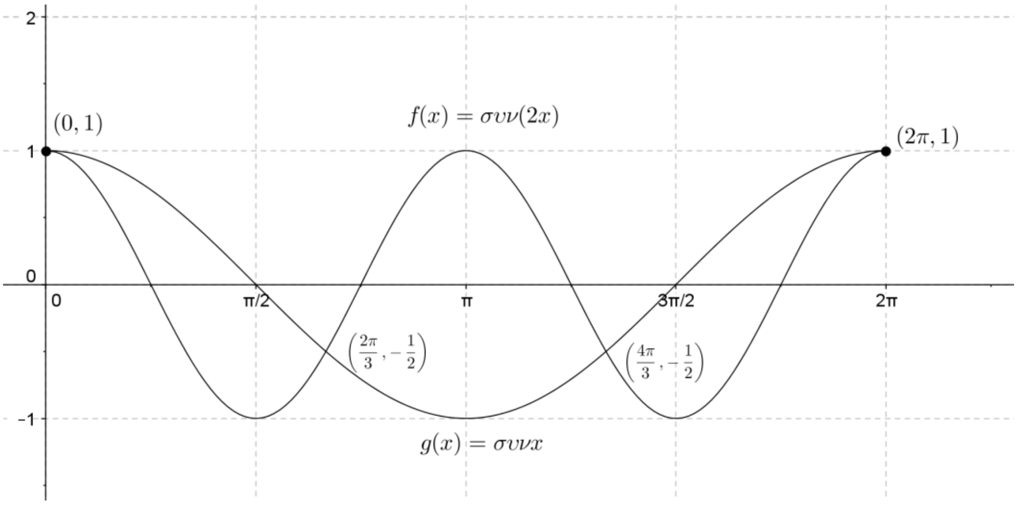
- $f(0) = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$
- $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} = 0$
- $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4} = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $f(\pi) = \sigma\upsilon\nu\pi = -1$
- $f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{4} = \sigma\upsilon\nu\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2} = 0$
- $f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{4} = \sigma\upsilon\nu\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $f(2\pi) = \sigma\upsilon\nu 2\pi = 1$
- $g(0) = \sigma\upsilon\nu(2 \cdot 0) = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$
- $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} = 0$
- $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\pi = -1$
- $g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(2 \cdot \frac{3\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2} = 0$
- $g(\pi) = \sigma\upsilon\nu 2\pi = 1$
- $g\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(2 \cdot \frac{5\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{2} = \sigma\upsilon\nu\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} = 0$

- $g\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(2\cdot\frac{3\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu3\pi=\sigma\upsilon\nu(2\pi+\pi)=\sigma\upsilon\nu\pi=-1$
- $g\left(\frac{7\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(2\cdot\frac{7\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{2}=\sigma\upsilon\nu\left(4\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$
- $g(2\pi)=\sigma\upsilon\nu4\pi=1$

Επομένως ο πίνακας συμπληρωμένος είναι :

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$f(x)$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$g(x)$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1

β) Η γραφική παράσταση φαίνεται παρακάτω



Το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης είναι τα σημεία τομής των δυο γραφικών παραστάσεων στο διάστημα $[0,2\pi]$. Παρατηρούμε ότι οι δυο γραφικές παραστάσεις τέμνονται σε 4 σημεία , άρα 4 είναι και οι λύσεις της εξίσωσης.

γ) Έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu2x=\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow\begin{cases}2x=2\kappa\pi+x,\ \kappa\in\mathbb{Z}\\ \qquad ή\\ 2x=2\kappa\pi-x,\ \kappa\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}\\ \qquad ή\\ x=\frac{2\kappa\pi}{3},\ \kappa\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Θέλουμε τις λύσεις αυτές μέσα στο διάστημα $[0,2\pi]$ επομένως θα έχουμε:

- $0\le x\le2\pi\Leftrightarrow0\le2\kappa\pi\le2\pi\Leftrightarrow0\le\kappa\le1$. Άρα,
  - $\kappa=0\Rightarrow\boxed{x=0}$ ή

- $\kappa = 1 \Rightarrow \boxed{x = 2\pi}$

➢ $0 \le x \le 2\pi \Leftrightarrow 0 \le \dfrac{2\kappa\pi}{3} \le 2\pi \Leftrightarrow 0 \le 2\kappa\pi \le 6\pi \Leftrightarrow 0 \le \kappa \le 3$. Άρα,

- $\kappa = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$ ή
- $\kappa = 1 \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{2\pi}{3}}$ ή
- $\kappa = 2 \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{4\pi}{3}}$ ή
- $\kappa = 3 \Rightarrow \boxed{x = 2\pi}$ ή

Επομένως έχουμε 4 λύσεις της εξίσωσης, τις: $\boxed{x = 0}, \boxed{x = \dfrac{2\pi}{3}}, \boxed{x = \dfrac{4\pi}{3}}, \boxed{x = 2\pi}$

Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων f και g , πρέπει να βρούμε τα αντίστοιχα: $f(x)$ ή $g(x)$.

- $f(0) = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$, άρα $(0,1)$ το πρώτο
- $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi}{3} = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$ άρα $\left(\dfrac{2\pi}{3}, -\dfrac{1}{2}\right)$ το δεύτερο
- $f\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) = \sigma\upsilon\nu\dfrac{4\pi}{3} = \sigma\upsilon\nu\left(\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$ άρα $\left(\dfrac{4\pi}{3}, -\dfrac{1}{2}\right)$ το τρίτο
- $f(2\pi) = \sigma\upsilon\nu 2\pi = 1$ άρα $(0,1)$ το τέταρτο

Παρόμοιες Ασκήσεις :
Σχολικό βιβλίο: *§3.4 Α΄* Ομάδας / Άσκηση 4- *§3.5* Β΄ Ομάδας / Άσκηση 1

ΑΣΚΗΣΗ Δ4 (17855)

Ένα σώμα ταλαντώνεται κατακόρυφα στο άκρο ενός ελατηρίου. Η απόσταση του σώματος από το έδαφος (σε cm), δίνεται από την συνάρτηση:

$$f(t) = 12 \cdot \eta\mu\frac{\pi t}{4} + 13, \text{ όπου t ο χρόνος σε ώρες.}$$

α) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης.

Μονάδες 7

β) Να βρείτε την απόσταση του σώματος από το έδαφος τις χρονικές στιγμές $t = 5$ και $t = 8$.

Μονάδες 8

γ) Να βρείτε κατά το χρονικό διάστημα από $t = 0$ έως $t = 8$, ποιά χρονική στιγμή η απόσταση του σώματος από το έδαφος είναι ελάχιστη. Ποια είναι η απόσταση αυτή;

Μονάδες10

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = \frac{8\pi}{\pi} = 8 \text{ ώρες}.$$

β) Έχουμε,

$$f(5)=12\cdot ημ\frac{5π}{4}+13=12\cdot ημ\left(π+\frac{π}{4}\right)+13=12\cdot\left(-ημ\left(\frac{π}{4}\right)\right)+13=12\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+13$$

Επομένως,

$$f(5)=13-6\sqrt{2} \text{ και } f(8)=12\cdot ημ\frac{8π}{4}+13=12\cdot ημ2π+13=12\cdot 0+13=13$$

άρα, $f(8)=13$

γ) Η ελάχιστη απόσταση του σώματος από το έδαφος είναι: $-12+13=1$, επομένως θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση $f(t)=1$ στο διάστημα $[0,8]$.

Έχουμε,

$$f(t)=1\Leftrightarrow 12\cdot ημ\frac{πt}{4}+13=1\Leftrightarrow 12\cdot ημ\frac{πt}{4}=-12\Leftrightarrow ημ\frac{πt}{4}=-1\Leftrightarrow ημ\frac{πt}{4}=ημ\frac{3π}{2}\Leftrightarrow$$

$$ημ\frac{πt}{4}=ημ\frac{3π}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{πt}{4}=2κπ+\dfrac{3π}{2}, κ\in\mathbb{Z}\\ \text{ή}\\ \dfrac{πt}{4}=2κπ+π-\dfrac{3π}{2}, κ\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=8κ+6, κ\in\mathbb{Z}\\ \text{ή}\\ t=8κ-2, κ\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Θέλουμε τη λύση ανάμεσα στο διάστημα $[0,8]$ δηλαδή: $0\le t\le 8$

- $0\le 8κ+6\le 8\Leftrightarrow -6\le 8κ\le 2\Leftrightarrow -\frac{6}{8}\le κ\le\frac{2}{8}$ οπότε έχουμε $κ=0$, άρα $\boxed{t=6}$
- $0\le 8κ-2\le 8\Leftrightarrow 2\le 8κ\le 10\Leftrightarrow \frac{2}{8}\le κ\le\frac{10}{8}$ οπότε έχουμε $κ=1$, άρα $\boxed{t=6}$

Επομένως η ελάχιστη απόσταση από το έδαφος είναι μετά από 6 ώρες.

Παρόμοιες Ασκήσεις :
Σχολικό βιβλίο: *§3.4* Β΄ Ομάδας / Άσκηση 2

ΑΣΚΗΣΗ Δ5 (20331)

Η θερμοκρασία μιας περιοχής σε βαθμούς Κελσίου ($°C$) κατά τη διάρκεια ενός εικοσιτετραώρου δίνεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση:

$$f(t)=-8συν\frac{πt}{12}+4,\quad \text{με } 0\le t\le 24 \text{ (t ο χρόνος σε ώρες)}$$

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη θερμοκρασία κατά τη διάρκεια του εικοσιτετραώρου.

Μονάδες 7

β) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που η θερμοκρασία είναι ίση με $0°C$.

Μονάδες 6

γ) Να παραστήσετε γραφικά την f για $t\in[0,24]$

Μονάδες 7

δ) Να βρείτε, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, πότε η θερμοκρασία είναι πάνω από $0°C$.

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση $g(t)=8συν\frac{πt}{12}$ είναι της μορφής $g(x)=ρ\cdot συν(ωt)$ με $ρ=8$ και $ω=\frac{π}{12}$, άρα έχει μέγιστη τιμή το $ρ=8$ και ελάχιστη τιμή το $-ρ=-8$

Η συνάρτηση $h(t)=-8συν\frac{πt}{12}$ έχει γραφική παράσταση που είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(t)=8συν\frac{πt}{12}$, ως προς τον άξονα $x'x$, οπότε θα έχει πάλι μέγιστη τιμή το $|ρ|=8$ και ελάχιστη τιμή το $-|ρ|=-8$ (*απλώς όπου πριν μέγιστο τώρα ελάχιστο και όπου πριν ελάχιστο τώρα μέγιστο*).

Τέλος, η συνάρτηση $f(t)=-8συν\frac{πt}{12}+4$ έχει γραφική παράσταση που προκύπτει από την αντίστοιχη της συνάρτησης h με κατακόρυφη μετατόπιση κατά 4 μονάδες προς τα επάνω.

Δηλαδή, θα έχει μέγιστη τιμή το

$$\max f(x)=|ρ|+4=8+4=12$$

και ελάχιστη τιμή το

$$\min f(x)=-|ρ|+4=-8+4=-4.$$

Αυτό σημαίνει ότι η μέγιστη θερμοκρασία κατά τη διάρκεια του εικοσιτετραώρου είναι $12°C$, ενώ η ελάχιστη θερμοκρασία $-4°C$.

β) Οι χρονικές στιγμές που η θερμοκρασία είναι ίση με $0°C$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(t)=0,\ t\in[0,24]$.

Έχουμε για κάθε $t\in[0,24]$,

$$f(t)=0\Leftrightarrow -8συν\frac{πt}{12}+4=0\Leftrightarrow -8συν\frac{πt}{12}=-4$$

$$\Leftrightarrow συν\frac{πt}{12}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow συν\frac{πt}{12}=συν\frac{π}{3}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{πt}{12}=2kπ+\frac{π}{3}\ ή\ \frac{πt}{12}=2kπ-\frac{π}{3}\right),k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{t}{12}=2k+\frac{1}{3}\ ή\ \frac{t}{12}=2k-\frac{1}{3}\right),k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow(t=24k+4\ ή\ t=24k-4),k\in\mathbb{Z}$$

Και επειδή $t\in[0,24]$ θα πρέπει

$$(0\le 24k+4\le 24\ ή\ 0\le 24k-4\le 24)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(-4\le 24k\le 20\ ή\ 4\le 24k\le 28)$$

$$\Leftrightarrow\left(-\frac{4}{24}\le k\le\frac{20}{24}\ ή\ \frac{4}{24}\le k\le\frac{28}{24}\right)$$

όμως $k\in\mathbb{Z}$ άρα,

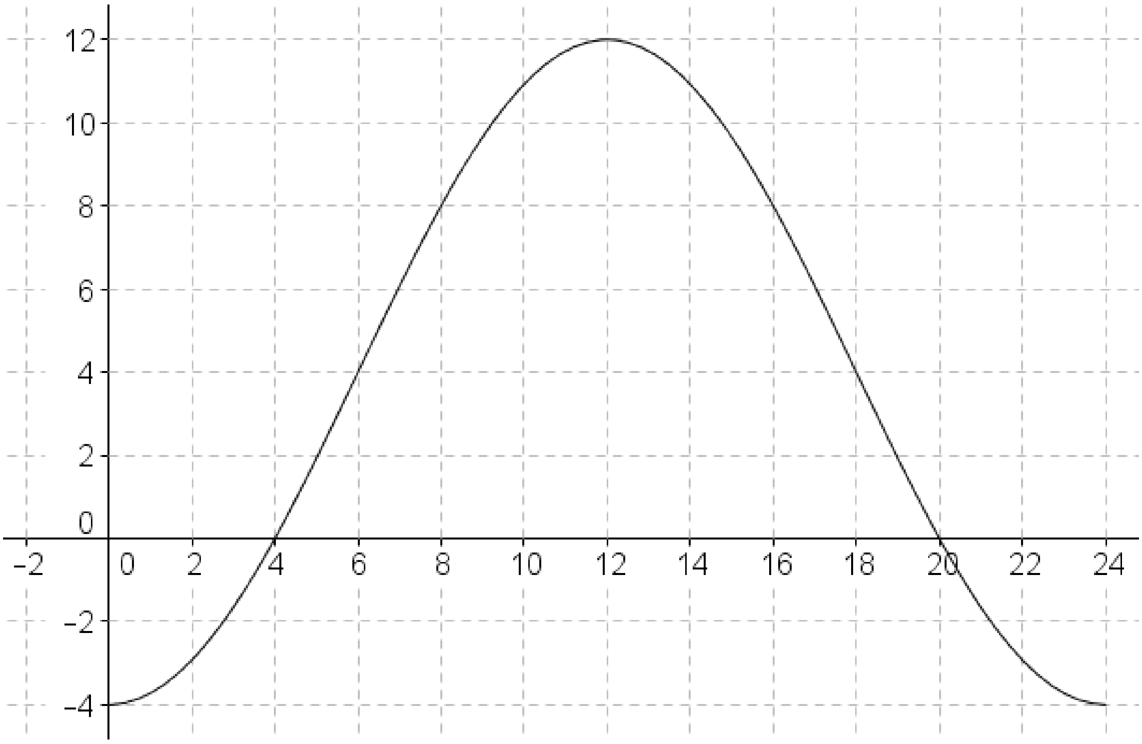
$k=0$ (για τον $1^{ο}$ τύπο) ή $k=1$ (για τον $2^{ο}$ τύπο)

Οπότε οι λύσεις της εξίσωσης είναι:

$$t_1 = 24\cdot 0 + 4 \Leftrightarrow t_1 = 4 \text{ και } t_2 = 24\cdot 1 - 4 \Leftrightarrow t_2 = 20,$$

δηλαδή οι χρονικές στιγμές που η θερμοκρασία είναι ίση με $0°C$ είναι στις $t_1 = 4$ και $t_2 = 20$

γ) Η γραφική παράσταση της f για $t \in [0,24]$ είναι:



δ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, η θερμοκρασία είναι πάνω από $0°C$ σε ολόκληρο το χρονικό διάστημα $(4,20)$.

ΑΣΚΗΣΗ Δ6 (20338)

Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, που είναι της μορφής $f(x) = \alpha + \beta \cdot συν2x$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

α) Με βάση τη γραφική παράσταση της f, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

Μονάδες 4

β) Ποια είναι η περίοδος Τ της συνάρτησης f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

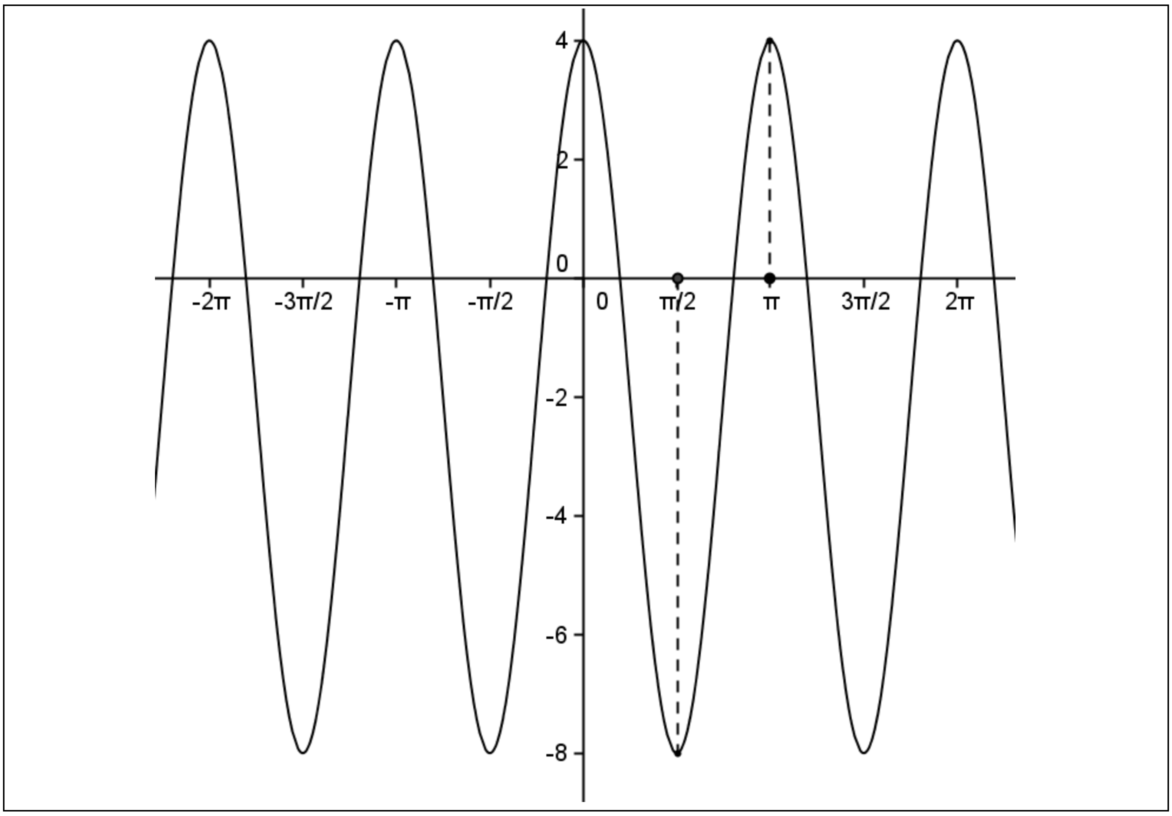
Μονάδες 4

γ) Με βάση τα δεδομένα του σχήματος, να αποδείξετε ότι: α = –2 και β = 6.

Μονάδες 8

δ) Να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 1$ στο διάστημα [0, 2π]

Μονάδες 9



ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με τη γραφική παράσταση η μέγιστη τιμή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι 4, ενώ η ελάχιστη τιμή είναι -8.

β) Αλγεβρική λύση

Η περίοδος της συνάρτησης $g(x) = συνωx$, βρίσκεται από τη σχέση $T = \frac{2π}{ω}$ όπου η σταθερά $ω > 0$ την καθορίζει. Συνεπώς η περίοδος της συνάρτησης f είναι $T = \frac{2π}{2} = π$ αφού $ω = 2$

Γεωμετρική λύση

Από το σχήμα παρατηρούμε η περίοδος της συνάρτησης είναι $T = π$, αφού κάθε διάστημα π, η γραφική παράσταση της f επαναλαμβάνεται.

γ) Η συνάρτηση f παρουσιάζει στη θέση 0 μέγιστο ίσο με 4 και στη θέση $\frac{π}{2}$ ελάχιστο ίσο με -8. Επομένως είναι

$$f(0) = 4 \Leftrightarrow α + β = 4 \text{ και } f\left(\frac{π}{2}\right) = -8 \Leftrightarrow α + β \cdot συνπ = -8 \Leftrightarrow α - β = -8$$

Για να βρούμε τους αριθμούς α, β λύνουμε το σύστημα,

$$\begin{cases} α + β = 4 \\ α - β = -8 \end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} α + β = 4 \\ α - β = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2α = -4 \\ α - β = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} α = -2 \\ β = 6 \end{cases}$$

δ) Για $α = -2$ και $β = 6$ ο τύπος της συνάρτησης f γίνεται $f(x) = -2 + 6 \cdot συν2x$. Για να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία (εφόσον υπάρχουν) της γραφικής παράστασης της

συνάρτησης f με την ευθεία $y = 1$ ουσιαστικά ψάχνουμε τα x (εφόσον υπάρχουν) για τα οποία το y θα είναι 1.
Επομένως λύνουμε την εξίσωση

$$f(x)=1 \Leftrightarrow -2+6\cdot συν2x=1 \Leftrightarrow 6\cdot συν2x=3 \Leftrightarrow συν2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow συν2x=συν\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=2κ\pi+\frac{\pi}{3} \\ ή \\ 2x=2κ\pi-\frac{\pi}{3} \end{cases}, κ\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x=κ\pi+\frac{\pi}{6} \\ ή \\ x=κ\pi-\frac{\pi}{6} \end{cases}, κ\in\mathbb{Z}$$

όμως $x\in[0,2\pi]$, άρα

$$0\le κ\pi+\frac{\pi}{6}\le 2\pi \overset{:\pi}{\Leftrightarrow} 0\le κ+\frac{1}{6}\le 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{6}\le κ\le 2-\frac{1}{6} \Leftrightarrow -\frac{1}{6}\le κ\le\frac{11}{6}$$

Όμως $κ\in\mathbb{Z}$ άρα $κ=0$ ή $κ=1$.

Επομένως για $κ=0$ είναι $x=\frac{\pi}{6}$ ενώ για $κ=1$ είναι $x=\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$

Ομοίως,

$$0\le κ\pi-\frac{\pi}{6}\le 2\pi \overset{:\pi}{\Leftrightarrow} 0\le κ-\frac{1}{6}\le 2 \Leftrightarrow \frac{1}{6}\le κ\le 2+\frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{6}\le κ\le\frac{13}{6}$$

Όμως $κ\in\mathbb{Z}$ άρα $κ=1$ ή $κ=2$

Επομένως για $κ=1$ είναι $x=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$ και για $κ=2$ είναι $x=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$

Συμπερασματικά τα κοινά σημεία της γραφική παράστασης της συνάρτησης *f* με την ευθεία y=1 είναι τα σημεία

$$A\left(\frac{\pi}{6},1\right), A\left(\frac{5\pi}{6},1\right), A\left(\frac{7\pi}{6},1\right), A\left(\frac{11\pi}{6},1\right)$$

 Παρόμοιες Ασκήσεις:

 Σχολικό βιβλίο: § 3.5 Β Ομάδας/ Άσκηση 3,5

ΑΣΚΗΣΗ Δ7 (4_20921)

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=αx+β$ όπου α, β πραγματικοί αριθμοί και της συνάρτησης

$$f(x)=ρ\cdot ημ(ωx), όπου\ ω>0 και\ ρ>0.$$

Και οι δύο συναρτήσεις έχουν πεδίο ορισμού το ℝ. Επίσης η f έχει μέγιστο 3.

α) Να αποδείξετε ότι ρ = 3 και ω = 2

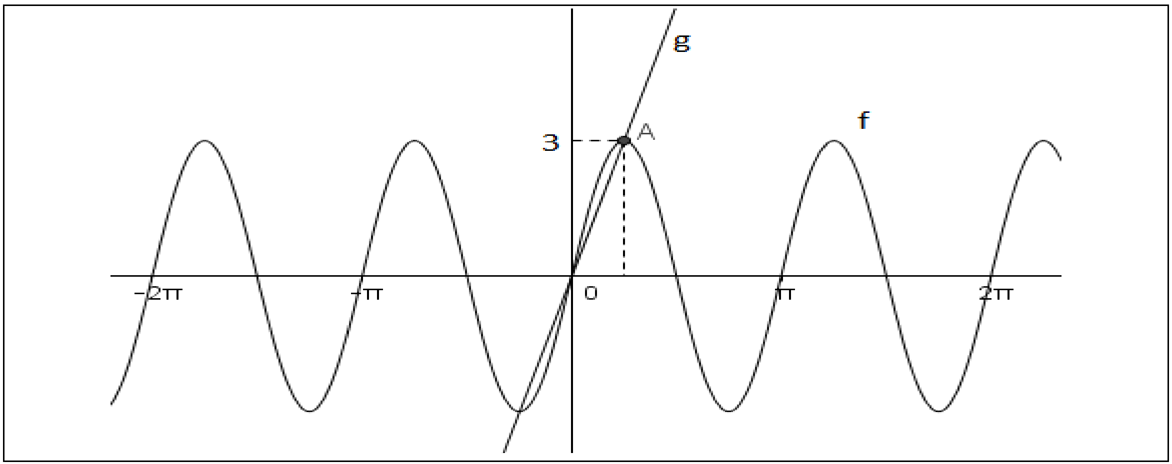
(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα α, β.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε, γραφικά, το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $3ημ(2x)-\frac{12x}{\pi}=0$ στο διάστημα [0,π]

(Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι:

- η περίοδος της συνάρτησης είναι $T = \pi$, οπότε

$$\frac{2\pi}{\omega} = \pi \Leftrightarrow \omega\pi = 2\pi \Leftrightarrow \omega = 2$$

- $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 \Leftrightarrow \rho\eta\mu\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 3 \Leftrightarrow \rho = 3$

Συνεπώς $f(x) = 3\eta\mu(2x)$

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από τα σημεία Ο(0, 0) και $A\left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$, επομένως

$$\begin{cases} \alpha\cdot 0+\beta = 0 \\ \alpha\cdot\frac{\pi}{4}+\beta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha\cdot\frac{\pi}{4} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = \frac{12}{\pi} \end{cases},$$

δηλαδή

$$g(x) = \frac{12x}{\pi}$$

γ) Η εξίσωση γίνεται: $3\eta\mu(2x) = \frac{12x}{\pi}$ ή $f(x) = g(x)$.

Ζητούνται λοιπόν τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων των f, g στο διάστημα [0, π], τα οποία, από τη γραφική παράσταση παρατηρούμε ότι είναι τα Ο(0, 0) και $A(\frac{\pi}{4}, 3)$.

Επομένως

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \left(x = 0 \text{ ή } x = \frac{\pi}{4}\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ8 (4_20922)

Δίνεται η συνάρτηση $f(t) = -2\eta\mu\frac{\pi t}{2} + 2,\ t\in[0,4]$

α) Να βρείτε την περίοδο της f.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της, καθώς και τις τιμές του t για τις οποίες η f παίρνει τις τιμές αυτές.

(Μονάδες 12)

γ) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Επειδή $f(t) = -2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 2$, έχουμε,

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$$

δηλαδή η f ορίζεται σε πλάτος μιας περιόδου της.

β) Είναι

$$-1 \le \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right) \le 1 \overset{\cdot(-2)}{\Leftrightarrow} 2 \ge -2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right) \ge -2 \overset{+2}{\Leftrightarrow} 4 \ge -2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 2 \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le f(t) \le 4$$

Η τιμή 0 επιτυγχάνεται όταν

$$f(t) = 0 \Leftrightarrow -2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow -2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right) = -2 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right) = 1,$$

και αφού η f (και συνεπώς και το $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right)$) ορίζεται σε πλάτος μιας περιόδου της, θα είναι

$$\frac{\pi}{2}t = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t = 1\,(\text{δεκτή}).$$

Η τιμή 4 επιτυγχάνεται όταν

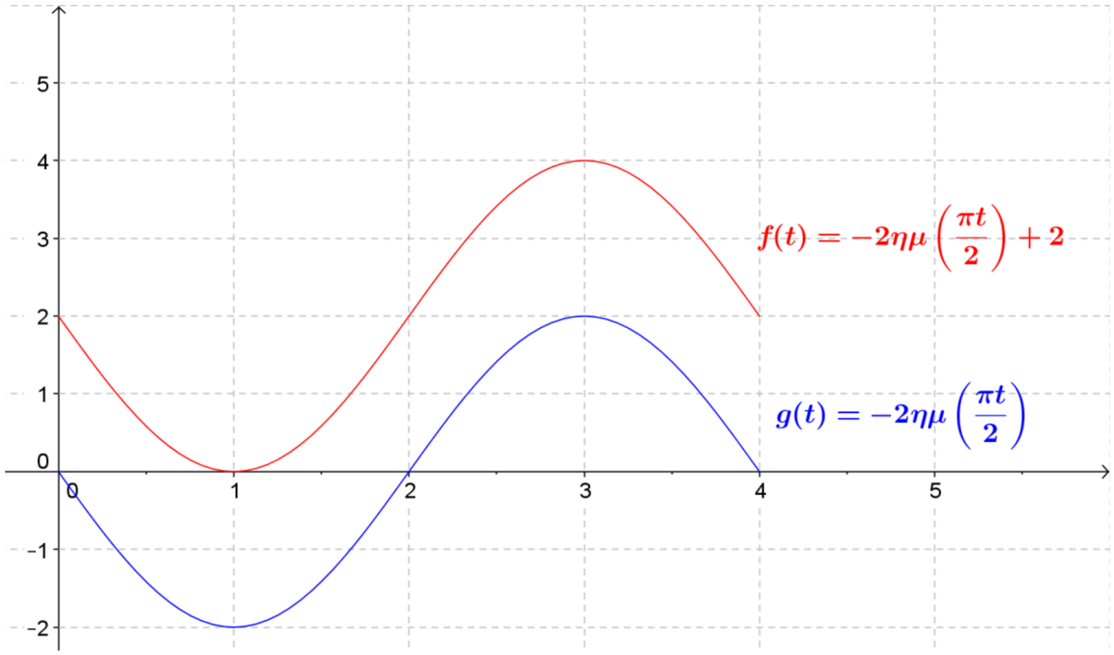
$$f(t) = 4 \Leftrightarrow -2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 2 = 4 \Leftrightarrow -2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right) = 2 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}t\right) = -1,$$

οπότε, όπως και παραπάνω, θα είναι

$$\frac{\pi}{2}t = \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow t = 3\ (\text{δεκτή}).$$

Επομένως η f παρουσιάζει ελάχιστο ίσο με 0, για t = 1, και μέγιστο ίσο με 4 για t = 3.

γ)



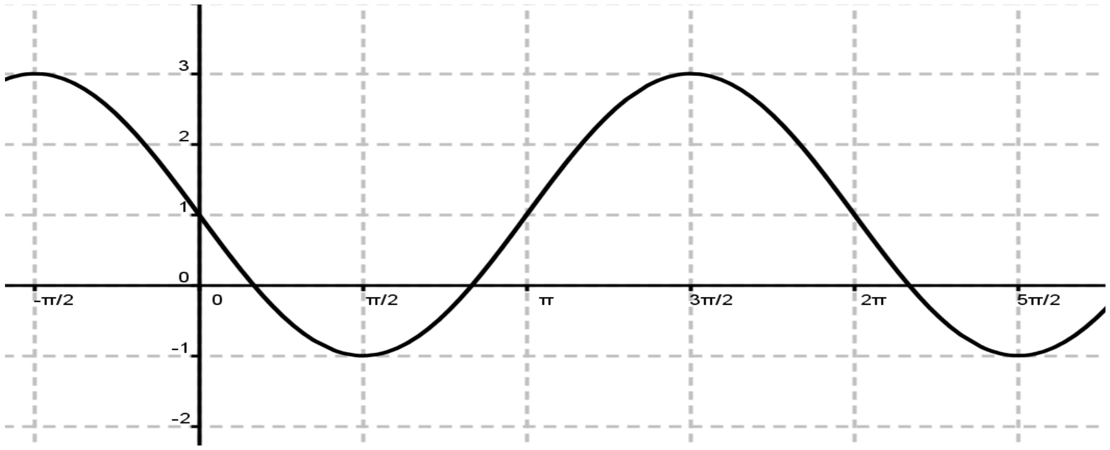
ΑΣΚΗΣΗ Δ9 (4_20923)

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = 2ημ(3x) + 1 , $x\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε την περίοδο T και τη μέγιστη τιμή της f .

Μονάδες 5

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης g(x) = αημ(βx) + γ , $x\in\mathbb{R}$



i. Να προσδιορίσετε τα *α, β, γ*.

Μονάδες 12

ii. Για *α* = – 2, *β* = 1 και *γ* = 1, να λύσετε την εξίσωση f(*x*) = g(*x*) στο διάστημα [0, π).

Μονάδες 8

Στόχοι

- *Αναγνωρίζουν την περίοδο και το μέγιστο μιας τριγωνομετρικής συνάρτησης.*
- *Χρησιμοποιούν γραφικές παραστάσεις για να βρίσκουν τον τύπο μιας συνάρτησης.*
- *Λύνουν τριγωνομετρικές εξισώσεις.*

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση

$$f(x) = 2\eta\mu(3x) + 1$$

έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{3}$ και μέγιστη τιμή 2 + 1 = 3

β) i) Αφού η συνάρτηση

$$g(x) = \alpha\eta\mu(\beta x) + \gamma$$

διέρχεται από το σημείο (0, 1) ισχύει

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow \alpha\eta\mu 0 + \gamma = 1 \Leftrightarrow \gamma = 1$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση έχει περίοδο

$$T = 2\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi \Leftrightarrow \beta = 1$$

Επίσης παρατηρούμε ότι η συνάρτηση έχει αντίθετο είδος μονοτονίας από την συνάρτηση ημx. Συνεπώς α < 0

Αφού η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή 3 ισχύει

$$|\alpha| + 1 = 3 \Leftrightarrow |\alpha| = 2 \Leftrightarrow \alpha = -2 \,(\text{αφού } \alpha < 0)$$

Άρα g(x) = – 2ημx + 1

ii) Είναι

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2\eta\mu(3x) + 1 = -2\eta\mu x + 1 \Leftrightarrow \eta\mu(3x) = -\eta\mu x \Leftrightarrow \eta\mu(3x) = \eta\mu(-x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2\kappa\pi - x \\ 3x = 2\kappa\pi + \pi + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 2\kappa\pi \\ 2x = 2\kappa\pi + \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\kappa\pi}{2} \\ x = \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\kappa\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Είναι

$$0 \le x < \pi \Leftrightarrow 0 \le \frac{\kappa\pi}{2} < \pi \Leftrightarrow 0 \le \frac{\kappa}{2} < 1 \Leftrightarrow 0 \le \kappa < 2$$

άρα

$$\kappa = 0 \text{ ή } \kappa = 1$$

οπότε

$$x = 0 \text{ ή } x = \frac{\pi}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ10 (4_22690)

Δίνεται η εξίσωση

$$1 - \eta\mu x = \sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu x \quad (A)$$

α) Να αποδείξετε ότι, αν x_0 είναι μία λύση της εξίσωσης (Α), τότε $\sigma\upsilon\nu x_0 \ge 0$.

Μονάδες 5

β) Θεωρούμε την εξίσωση

$$(1 - \eta\mu x)^2 = 3\sigma\upsilon\nu^2 x \quad (B)$$

η οποία προκύπτει υψώνοντας στο τετράγωνο τα δύο μέλη της εξίσωσης (Α). Να λύσετε την εξίσωση (Β).

Μονάδες 12

γ) Να λύσετε την εξίσωση (Α).

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

α) Έστω x_0 είναι μία λύση της εξίσωσης (Α), τότε

$$1-\eta\mu x_0=\sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu x_0$$

όμως $-1\le \eta\mu x\le 1$, άρα έχουμε

$$\eta\mu x_0\le 1\Leftrightarrow 1-\eta\mu x_0\ge 0\Leftrightarrow \sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu x_0\ge 0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x_0\ge 0$$

β) Έχουμε,

$$\begin{aligned}&(1-\eta\mu x)^2=3\sigma\upsilon\nu^2x\Leftrightarrow 1-2\eta\mu x+\eta\mu^2x=3\sigma\upsilon\nu^2x\\&\Leftrightarrow 1-2\eta\mu x+\eta\mu^2x=3\left(1-\eta\mu^2x\right)\\&\Leftrightarrow 4\eta\mu^2x-2\eta\mu x-2=0\\&\Leftrightarrow 2\eta\mu^2x-\eta\mu x-1=0\end{aligned}$$

έχουμε μια δευτεροβάθμια εξίσωση με άγνωστο το ημx, άρα η διακρίνουσα είναι

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1+8=9$$

και οι λύσεις είναι

$$\eta\mu x_1=\frac{1+3}{4}=1,\quad \eta\mu x_2=\frac{1-3}{4}=-\frac{1}{2}$$

Επομένως,

$$\eta\mu x_1=1\Leftrightarrow \eta\mu x_1=\eta\mu\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x_1=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

$$\eta\mu x_2=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \eta\mu x_2=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=2\kappa\pi-\frac{\pi}{6}\\ \text{ή}\\ x'_2=2\kappa\pi+\pi+\frac{\pi}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=2\kappa\pi-\frac{\pi}{6}\\ \text{ή}\\ x'_2=2\kappa\pi+\frac{7\pi}{6}\end{cases},\kappa\in\mathbb{Z}$$

άρα οι λύσεις της εξίσωσης (Β) είναι

$$2\kappa\pi-\frac{\pi}{6},\quad 2\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\quad 2\kappa\pi+\frac{7\pi}{6},\quad \kappa\in\mathbb{Z}$$

γ) *(Υπενθυμίζουμε ότι:* $\alpha^2=\beta^2\Leftrightarrow\sqrt{\alpha^2}=\sqrt{\beta^2}\Leftrightarrow|\alpha|=|\beta|\underset{\text{ομόσημοι}}{\overset{\alpha,\beta}{\Longleftrightarrow}}\alpha=\beta$*)*

Η εξίσωση (Α) και η εξίσωση (Β) είναι ισοδύναμες αν, και μόνο αν, $\sigma\upsilon\nu x\ge 0$.

Επομένως θα εξετάσουμε ποιες λύσεις από το ερώτημα β) ικανοποιούν τον περιορισμό μας.

- Για $x_1=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$, έχουμε $\sigma\upsilon\nu x_1=\sigma\upsilon\nu\left(2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=0\ge 0$, άρα η

$x_1=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$ είναι μια λύση της εξίσωσης (Α).

- Για $x_2 = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6}$, έχουμε $\sigma\upsilon\nu x_2 = \sigma\upsilon\nu\left(2\kappa\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \geq 0$, άρα η

$x_2 = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6}$ είναι μια λύση της εξίσωσης (Α).

- Για $x'_2 = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6}$, έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu x'_2 = \sigma\upsilon\nu\left(2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{6} = \sigma\upsilon\nu\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) < 0,$$

αφού η γωνία $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$ είναι στο τρίτο τεταρτημόριο.

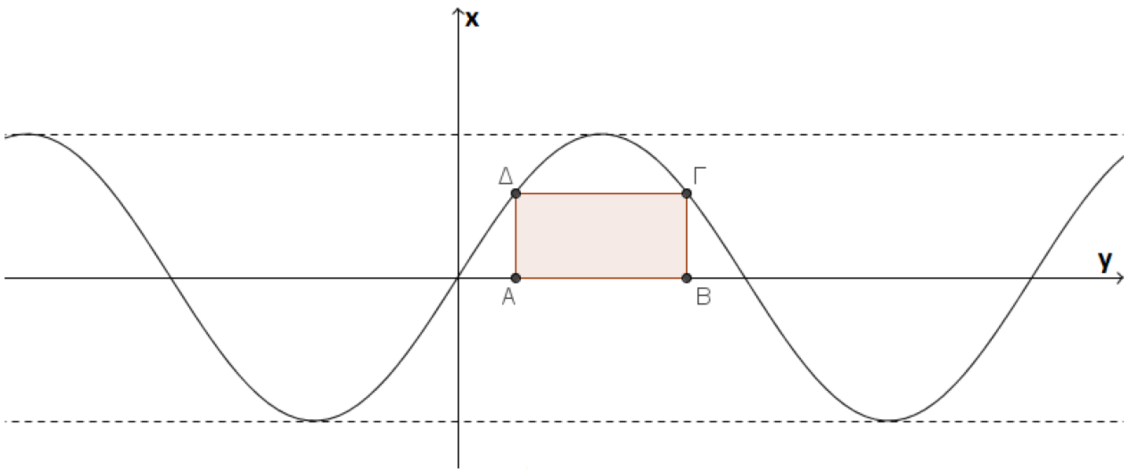
Άρα η γωνία $x'_2 = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6}$ για οποιοδήποτε $\kappa \in \mathbb{Z}$ δεν είναι λύση της εξίσωσης (Α).

Τελικά οι λύσεις της εξίσωσης (Α) είναι

$$2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \text{ και } 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6},\ \kappa \in \mathbb{Z}$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ11 (4_22691)

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\cdot x\right)$



α) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f.

Μονάδες 5

β) Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με $A\left(\frac{2}{3}, 0\right)$. Να βρείτε:

i. τις συντεταγμένες του σημείου Δ.

Μονάδες 10

ii. τις συντεταγμένες των σημείων Β και Γ.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Η περίοδος της συνάρτησης f είναι:

$$T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=\frac{8\pi}{\pi}=8$$

β) i) Το σημείο Δ ανήκει στην γραφική παράσταση της f κι έχει τετμημένη $\frac{2}{3}$, οπότε

$$\Delta\left(\frac{2}{3},f\left(\frac{2}{3}\right)\right)$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=2\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}\right)=2\eta\mu\frac{2\pi}{12}=2\eta\mu\frac{\pi}{6}=2\cdot\frac{1}{2}=1$$

Άρα

$$\Delta\left(\frac{2}{3},1\right)$$

ii) Το σημείο Γ έχει τεταγμένη 1 κι επειδή ανήκει στην γραφική παράσταση της f, λύνω την εξίσωση $f(x)=1$. Οπότε:

$$f(x)=1\Leftrightarrow 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}x\right)=1\Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{4}x\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{4}x\right)=\eta\mu\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\frac{\pi}{4}x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\\ \frac{\pi}{4}x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases},\kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\pi}{4}x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\\ \frac{\pi}{4}x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}\end{cases},\kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\begin{cases}x=8\kappa+\frac{2}{3}\\ x=8\kappa+\frac{10}{3}\end{cases},\kappa\in\mathbb{Z}$$

Λύνω την ανίσωση $x>\frac{2}{3}$

1η περίπτωση:

$8\kappa+\frac{2}{3}>\frac{2}{3}\Leftrightarrow 8\kappa>0\Leftrightarrow\kappa>0$ κι αφού $\kappa\in\mathbb{Z}$ η μικρότερη τιμή για την οποία ισχύει είναι $\kappa=1$ για την οποία έχουμε τη λύση $x=8+\frac{2}{3}=\frac{26}{3}$

2η περίπτωση:

$8\kappa+\frac{10}{3}>\frac{2}{3}\Leftrightarrow 8\kappa>-\frac{8}{3}\Leftrightarrow\kappa>-\frac{1}{3}$ κι αφού $\kappa\in\mathbb{Z}$ η μικρότερη τιμή για την οποία ισχύει είναι $\kappa=0$ για την οποία έχουμε τη λύση $x=0+\frac{10}{3}=\frac{10}{3}$

Επειδή $\frac{10}{3}<\frac{26}{3}$ οι συντεταγμένες του σημείου Γ είναι $\Gamma\left(\frac{10}{3},1\right)$.

Επομένως $B\left(\frac{10}{3},0\right)$.

ΑΣΚΗΣΗ Δ12 (4_22693)

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha\eta\mu(\omega x)$ με παραμέτρους $\alpha,\omega>0$.

Να βρείτε:

α) την περίοδο της συνάρτησης f.

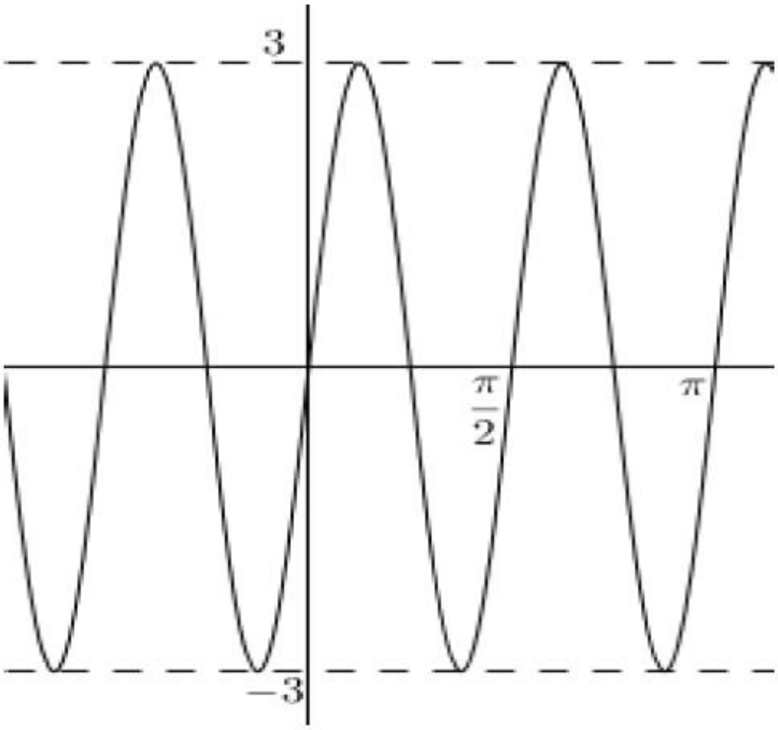
Μονάδες 9

β) τους αριθμούς α και ω.

Μονάδες 8

γ) τους αριθμούς $\kappa \in \mathbb{R}$ για τους οποίους η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ και στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση αυτή.

Μονάδες 8



ΛΥΣΗ

α) Από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f παρατηρούμε ότι έχει περίοδο $T = \frac{\pi}{2}$

β) Ισχύει ότι:

Ο αριθμός α είναι η μέγιστη τιμή της f, οπότε $\alpha = 3$ και

$$T = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \omega\pi = 4\pi \Leftrightarrow \omega = 4$$

γ) Για $\alpha = 3$ και $\omega = 4$ έχουμε: $f(x) = 3\eta\mu(4x)$.

Από την γραφική παράσταση της f παρατηρούμε ότι οι αριθμοί $\kappa \in \mathbb{R}$ για τους οποίους η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι το 3 και το -3.

Οπότε:

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow 3\eta\mu(4x) = 3 \Leftrightarrow \eta\mu(4x) = 1 \Leftrightarrow 4x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{8}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Όμως

$$0 \le \frac{\kappa\pi}{2}+\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{8} \le \frac{\kappa\pi}{2}<\frac{3\pi}{8} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \le \kappa\pi < \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \le \kappa < \frac{3}{4} \overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} \kappa = 0$$

Άρα η μοναδική λύση αυτής της εξίσωσης είναι

$$x=\frac{0\cdot\pi}{2}+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{8}.$$

$$f(x)=-3 \Leftrightarrow 3\eta\mu(4x)=-3 \Leftrightarrow \eta\mu(4x)=-1 \Leftrightarrow 4x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\kappa\pi}{2}-\frac{\pi}{8}, \kappa\in\mathbb{Z}$$

Όμως

$$0 \le \frac{\kappa\pi}{2}-\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{8} \le \frac{\kappa\pi}{2}<\frac{5\pi}{8} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \le \kappa\pi < \frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \le \kappa < \frac{5}{4} \overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} \kappa = 1$$

Άρα η μοναδική λύση αυτής της εξίσωσης είναι

$$x=\frac{1\cdot\pi}{2}-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}=\frac{3\pi}{8}.$$

§3.6 - Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος γωνιών

«Θέμα Β»

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (17664)

Δίνονται οι γωνίες ω, θ με $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$ και $\sigma\upsilon\nu\theta \neq 0$, για τις οποίες ισχύει:

$$\omega + \theta = 135^o.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\varepsilon\varphi(\omega+\theta) = -1$

Μονάδες 10

β) $\varepsilon\varphi\omega + \varepsilon\varphi\theta + 1 = \varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi\theta$

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Επειδή $\omega+\theta = 135^o$ έχουμε,

$$\varepsilon\varphi(\omega+\theta) = \varepsilon\varphi 135^o = \varepsilon\varphi(180^o - 45^o) = -\varepsilon\varphi 45^o = -1$$

(διότι οι γωνίες με άθροισμα 180^o έχουν αντίθετες εφαπτόμενες).

β) Ισχύει ο γενικός τύπος $\varepsilon\varphi(\omega+\theta) = \dfrac{\varepsilon\varphi\omega + \varepsilon\varphi\theta}{1 - \varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi\theta}$.

Όμως $\varepsilon\varphi(\omega+\theta) = -1$, άρα

$$-1 = \frac{\varepsilon\varphi\omega + \varepsilon\varphi\theta}{1 - \varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi\theta} \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega + \varepsilon\varphi\theta = \varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi\theta - 1 \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega + \varepsilon\varphi\theta + 1 = \varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi\theta$$

Παρόμοιες Ασκήσεις :

Σχολικό βιβλίο: -

Σημείωση: Το παραπάνω θέμα είχε αφαιρεθεί και ξαναπροστέθηκε στη Τράπεζα θεμάτων, αφού συμπληρώθηκαν οι περιορισμοί για το συνημίτονο, έτσι ώστε να ορίζονται οι εφαπτόμενες στις γωνίες ω και θ.

ΑΣΚΗΣΗ Β2 (19911)

α) Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu x + \dfrac{1}{2}\cdot\eta\mu x$

Μονάδες 13

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α), να λύσετε στο διάστημα $(0, \pi)$ την εξίσωση:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2}\cdot\eta\mu x = 0$$

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Από τους μετασχηματισμούς τριγωνομετρικών παραστάσεων, γνωρίζουμε ότι:

$$ημ(α+β)=ημα\cdot συνβ+συνα\cdot ημβ,$$

άρα,

$$ημ\left(x+\frac{π}{3}\right)=ημx\cdot συν\frac{π}{3}+συνx\cdot ημ\frac{π}{3}=ημx\cdot\frac{1}{2}+συνx\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot συνx+\frac{1}{2}\cdot ημx$$

β) Έχουμε,

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot συνx+\frac{1}{2}\cdot ημx=0\overset{α)}{\Leftrightarrow}ημ\left(x+\frac{π}{3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow ημ\left(x+\frac{π}{3}\right)=ημ0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x+\frac{π}{3}=2kπ,\ k\in\mathbb{Z} \\ x+\frac{π}{3}=2kπ+(π-0),\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x=2kπ-\frac{π}{3},\ k\in\mathbb{Z} \\ x=2kπ+\frac{2π}{3},\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow x=kπ+\frac{2π}{3},\ k\in\mathbb{Z}$$

Όμως πρέπει οι λύσεις της εξίσωσης να ανήκουν στο διάστημα $(0,π)$, οπότε πρέπει:

$$0<x<π\Leftrightarrow 0<2kπ+\frac{2π}{3}<π\overset{:π}{\Leftrightarrow}0<2k+\frac{2}{3}<1\overset{-\frac{2}{3}}{\Leftrightarrow}-\frac{2}{3}<2k<\frac{1}{3}\overset{k\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow}k=0$$

Τότε, για $k=0$, η εξίσωση έχει λύση $x=\frac{2π}{3}$

Παρόμοιες Ασκήσεις :

Σχολικό βιβλίο: *§3.6* Α΄ Ομάδας / Άσκηση 3,6-*§3.5* Α΄ Ομάδας / Άσκηση 9

ΑΣΚΗΣΗ Β3 (2_22639)

α) Να δείξετε ότι $ημ\left(x+\frac{π}{4}\right)+ημ\left(x-\frac{π}{4}\right)=\sqrt{2}\cdot ημx$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Μονάδες 13

β) Να βρείτε με τη βοήθεια του ερωτήματος α) τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)=ημ\left(x+\frac{π}{4}\right)+ημ\left(x-\frac{π}{4}\right),\ x\in\mathbb{R}$

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$ημ\left(x+\frac{π}{4}\right)+ημ\left(x-\frac{π}{4}\right)=ημx\cdot συν\frac{π}{4}+ημ\frac{π}{4}\cdot συνx+ημx\cdot συν\frac{π}{4}-ημ\frac{π}{4}\cdot συνx$$

$$=ημx\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+ημx\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2ημx\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\cdot ημx$$

β) Από το ερώτημα α) έχουμε, $f(x) = \sqrt{2} \cdot ημx$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει,

$$-1 \le ημx \le 1 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \le \sqrt{2}ημx \le \sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow -\sqrt{2} \le f(x) \le \sqrt{2}$$

Άρα η συνάρτηση f έχει μέγιστη τιμή το $\sqrt{2}$ και ελάχιστη τιμή το $-\sqrt{2}$

§3.7 - Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 2α

«Θέμα Β»

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (19912)

Δίνεται γωνία ω για την οποία ισχύει ότι: $-\sigma\upsilon\nu 2\omega + 5\eta\mu\omega - 2 = 0$

α) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $2\eta\mu^2\omega + 5\eta\mu\omega - 3 = 0$

Μονάδες 12

β) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu\omega = \frac{1}{2}$

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Από τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 2α (§3.7) γνωρίζουμε ότι

$$\sigma\upsilon\nu 2\omega = 1 - \eta\mu^2\omega \ (1).$$

Οπότε η δοσμένη σχέση γίνεται:

$$-\sigma\upsilon\nu 2\omega + 5\eta\mu\omega - 2 = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} -\left(1-\eta\mu^2\omega\right) + 5\eta\mu\omega - 2 = 0 \Rightarrow 2\eta\mu^2\omega + 5\eta\mu\omega - 3 = 0 \ (2)$$

β) Η εξίσωση $2\eta\mu^2\omega + 5\eta\mu\omega - 3 = 0$ (2), αν θέσουμε $\eta\mu\omega = x$ (3) (άρα $-1 \le x \le 1$), οδηγείται στην βοηθητική εξίσωση

$$2x^2 + 5x - 3 = 0 \ (4).$$

Η διακρίνουσα της είναι

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 5^2 - 4\cdot 2\cdot(-3) = 49 > 0,$$

άρα η (4) έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες:

$$x_1 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-5+\sqrt{49}}{2\cdot 2} = \frac{-5+7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ή

$$x_2 = \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-5-\sqrt{49}}{2\cdot 2} = \frac{-5-7}{4} = \frac{-12}{4} = -3 < -1$$

και έτσι απορρίπτεται.

Άρα

$$x = \frac{1}{2} \overset{(3)}{\Rightarrow} \eta\mu\omega = \frac{1}{2}$$

Παρόμοιες Ασκήσεις :

Σχολικό βιβλίο: §3.7 Α΄ Ομάδας / Άσκηση 3,5-§3.3 Α΄ Ομάδας / Άσκηση 1

«Θέμα Δ»

ΑΣΚΗΣΗ Δ1 (17838)

Για τη γωνία ω ισχύει ότι $5συν2ω+28συνω+21=0$.

α) Να δείξετε ότι $συνω=-\frac{4}{5}$.

Μονάδες 10

β) Αν για τη γωνία ω επιπλέον ισχύει $\frac{\pi}{2}<ω<\pi$, τότε:

i) να δείξετε ότι $συν2ω=\frac{7}{25}$ και $ημ2ω=-\frac{24}{25}$

Μονάδες 8

ii) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$Π=\frac{13\cdot\left[ημ^2 2ω+συν^2 2ω\right]+12}{18\cdot εφ2ω\cdot σφ2ω+25\left[ημ2ω+συν2ω\right]}$$

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$5συν2ω+28συνω+21=0 \Leftrightarrow 5\left(2συν^2ω-1\right)+28συνω+21=0 \Leftrightarrow$$
$$10συν^2ω-5+28συνω+21=0 \Leftrightarrow 10συν^2ω+28συνω+16=0 \Leftrightarrow$$
$$5συν^2ω+14συνω+8=0.$$

Θέτουμε $y=συνω$ οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$5y^2+14y+8=0.$$

Η εξίσωση αυτή είναι δευτέρου βαθμού ως προς y με διακρίνουσα

$$Δ=14^2-4\cdot5\cdot8=196-160=36>0,$$

συνεπώς έχει δύο διαφορετικές ρίζες που βρίσκονται από τον τύπο:

$$y_{1,2}=\frac{-14\pm\sqrt{36}}{2\cdot5}=\frac{-14\pm6}{10}$$

δηλαδή $y=\frac{-14+6}{10}=\frac{-8}{10}=-\frac{4}{5}$ ή $y=\frac{-14-6}{10}=\frac{-20}{10}=-2$.

Συνεπώς ισχύει

$$συνω=-\frac{4}{5} \text{ ή } συνω=-2, \text{ άτοπο (αφού } -1\le συνω\le 1\text{)},$$

άρα $συνω=-\frac{4}{5}$.

β) i. Ισχύει

$$ημ^2ω=1-συν^2ω \Rightarrow ημ^2ω=1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2=\frac{25}{25}-\frac{16}{25} \Rightarrow ημ^2ω=\frac{9}{25}$$

και αφού $\frac{\pi}{2}<ω<\pi$, ισχύει ότι $ημω>0$ συνεπώς

$$ημ^2ω=\frac{9}{25}\Rightarrow ημω=+\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$$

τότε,

$$συν2ω=2συν^2ω-1\Rightarrow συν2ω=2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)^2-1=2\cdot\frac{16}{25}-1=\frac{32}{25}-1=\frac{7}{25}$$

και

$$ημ2ω=2ημωσυνω\Rightarrow ημ2ω=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{24}{25}.$$

ii. Από τη θεμελιώδη τριγωνομετρική ταυτότητα γνωρίζουμε ότι

$$ημ^2 2ω+συν^2 2ω=1,$$

ενώ ισχύει και ότι $εφ2ω\cdot σφ2ω=1$, συνεπώς η παράσταση Π γίνεται:

$$Π=\frac{13\cdot\left[ημ^2 2ω+συν^2 2ω\right]+12}{18\cdot εφ2ω\cdot σφ2ω+25[ημ2ω+συν2ω]}=\frac{13\cdot1+12}{18\cdot1+25\cdot\left(-\frac{24}{25}+\frac{7}{25}\right)}=$$

$$\frac{13\cdot1+12}{18\cdot1+25\cdot\left(-\frac{24}{25}+\frac{7}{25}\right)}=\frac{25}{18+25\cdot\left(-\frac{17}{25}\right)}=\frac{25}{18-17}=\frac{25}{1}=25.$$

Παρόμοιες Ασκήσεις :

Σχολικό βιβλίο: *§3.5* Α΄ Ομάδας / Άσκηση 10 -*§3.2* Α΄ Ομάδας / Άσκηση 2

§4.2 - Διαίρεση πολυωνύμων

«ΘΕΜΑ Β»

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (2_22649)

α) Να βρείτε το υπόλοιπο και το πηλίκο της διαίρεσης $(x^3-6x^2+11x-2):(x-3)$

Μονάδες 10

β) Αν $P(x)=x^3-6x^2+11x+\lambda$ να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η διαίρεση $P(x):(x-3)$ να έχει υπόλοιπο 0.

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Κάνουμε Horner του πολυωνύμου $x^3-6x^2+11x-2$ με το 3

1	–6	11	–2	$\rho=3$
	3	–9	6	
1	–3	2	4	

Σύμφωνα με το σχήμα Horner το υπόλοιπο και το πηλίκο της διαίρεσης $(x^3-6x^2+11x-2):(x-3)$ είναι αντίστοιχα $\upsilon=4$ και $\pi(x)=x^2-3x+2$

β) Κάνουμε Horner του πολυωνύμου $x^3-6x^2+11x+\lambda$ με το 3

1	–6	11	λ	$\rho=3$
	3	–9	6	
1	–3	2	$\lambda+6$	

Σύμφωνα με το σχήμα Horner το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-3)$ είναι $\upsilon=\lambda+6$ άρα

$$\lambda+6=0\Leftrightarrow\lambda=-6$$

ΑΣΚΗΣΗ Β2 (2_22680)

Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x)=-2x^3+\lambda^2(x^2-1)+\lambda(x^3-1)+\lambda+9 \text{ και}$$

$$Q(x)=(\lambda+12)x^2+(\lambda-2)x^3+(\lambda^2-9)x \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

α) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι και τα δύο πολυώνυμα είναι $3^{ου}$ βαθμού. Συμφωνείτε με την άποψη αυτή; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 13

β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Είναι

$$P(x) = -2x^3 + \lambda^2(x^2 - 1) + \lambda(x^3 - 1) + \lambda + 9 \Leftrightarrow$$

$$P(x) = -2x^3 + \lambda^2 x^2 - \lambda^2 + \lambda x^3 - \lambda + \lambda + 9 \Leftrightarrow$$

$$P(x) = (\lambda - 2)x^3 + \lambda^2 x^2 - \lambda^2 + 9$$

Και

$$Q(x) = (\lambda + 12)x^2 + (\lambda - 2)x^3 + (\lambda^2 - 9)x \Leftrightarrow$$

$$Q(x) = (\lambda - 2)x^3 + (\lambda + 12)x^2 + (\lambda^2 - 9)x$$

Τα δύο παραπάνω πολυώνυμα είναι $3^{ου}$ βαθμού αν και μόνο αν ισχύει

$$\lambda - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 2$$

β) Τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα αν και μόνο αν ισχύει

$$\lambda - 2 = \lambda - 2 \text{ και } \lambda^2 = \lambda + 12 \text{ και } \lambda^2 - 9 = 0 \text{ και } -\lambda^2 + 9 = 0$$

$$\text{ισχύει για κάθε } \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \lambda^2 - \lambda - 12 = 0 \text{ και } \lambda^2 = 9 \text{ και } \lambda^2 = 9$$

$$\lambda = 4 \text{ ή } \lambda = -3 \text{ και } \lambda = \pm 3 \text{ και } \lambda = \pm 3$$

αφού το τριώνυμο $\lambda^2 - \lambda - 12 = 0$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1 + 48 = 49$$

και ρίζες

$$\lambda = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 4 \\ -3 \end{cases}$$

Άρα τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα αν και μόνο αν $\lambda = -3$

ΑΣΚΗΣΗ Β3 (2_22688)

Το πολυώνυμο $P(x)$ αν διαιρεθεί με το $(x-2)$ δίνει πηλίκο $(x^2 - 3x + 2)$ και υπόλοιπο τον πραγματικό αριθμό u.

α) Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης.

Μονάδες 8

β) Αν $P(1) = 10$, να βρείτε το u.

Μονάδες 9

γ) Αν u=10,να βρείτε το $P(x)$.

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε, $P(x) = (x-2)\cdot(x^2 - 3x + 2) + u$

β) Έχουμε, $P(1) = 10 \Leftrightarrow 10 = (1-2)\cdot(1^2 - 3\cdot 1 + 2) + u \Leftrightarrow u = 10$

γ) Αν u=10 τότε

$$P(x) = (x-2)\cdot(x^2 - 3x + 2) + 10 = x^3 - 3x^2 + 2x - 2x^2 + 6x - 4 + 10 = x^3 - 5x^2 + 8x + 6$$

άρα $P(x) = x^3 - 5x^2 + 8x + 6$

§4.3 - Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις

«ΘΕΜΑ Β»

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (2_22640)

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 12$

α) Να αιτιολογήσετε γιατί το διώνυμο $x - 3$ είναι παράγοντας του $P(x)$

Μονάδες 13

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) <u>α΄ τρόπος</u>

Παρατηρούμε ότι

$$P(3) = 3^3 - 2\cdot 3^2 + 3 - 12 = 27 - 18 - 9 = 0$$

οπότε η $x = 3$ είναι ρίζα του $P(x)$, άρα το διώνυμο $x - 3$ είναι παράγοντας του $P(x)$

<u>β΄ τρόπος</u>

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner έχουμε,

1	-2	1	12	3
	3	3	12	
1	1	4	0	

Άρα,

$$P(x) = (x-3)\left(x^2 + x + 4\right)$$

δηλαδή το διώνυμο $x - 3$ είναι παράγοντας του $P(x)$

β) Έχουμε,

$$P(x) = 0 \overset{\alpha)}{\Leftrightarrow} (x-3)\left(x^2 + x + 4\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - 3 = 0 \quad ή \quad x^2 + x + 4 = 0\right) \Leftrightarrow x = 3$$

αφού το τριώνυμο $x^2 + x + 4$ έχει $\Delta = 1 - 16 = -15 < 0$, άρα η εξίσωση $x^2 + x + 4 = 0$ είναι αδύνατη.

ΑΣΚΗΣΗ Β2 (2_22641)

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - 11x + 30$ με $\alpha \in \mathbb{R}$, για το οποίο γνωρίζουμε ότι έχει ρίζα το 5.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του α.

Μονάδες 12

β) Για $\alpha = -4$, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Αφού το 5 είναι ρίζα του $P(x)$, ισχύει

$$P(5)=0 \Leftrightarrow 5^3+\alpha 5^2-11\cdot 5+30=0$$
$$\Leftrightarrow 5^2+\alpha 5\ \ -11+6=0 \Leftrightarrow 5\alpha=-20$$
$$\Leftrightarrow \alpha=-4$$

β) Για $\alpha=-4$ το $P(x)$ γίνεται, $P(x)=x^3-4x^2-11x+30$
και με τη βοήθεια του σχήματος Horner έχουμε,

1	-4	-11	30	5
	5	5	-30	
1	1	-6	0	

άρα είναι

$$P(x)=(x-5)\left(x^2+x-6\right)$$

Επομένως,

$$P(x)=0 \Leftrightarrow (x-5)\left(x^2+x-6\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x-5=0 \quad ή \quad x^2+x-6=0\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(x=5 \ ή\ x=-3\ ή\ x=2\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ Β3 (2_22642)

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2-11x+30$ με $\alpha\in\mathbb{R}$, για το οποίο γνωρίζουμε ότι η τιμή του για $x=1$ είναι 16.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του α.

Μονάδες 12

β) Για $\alpha=-4$ και το 2 είναι ρίζα της εξίσωσης $P(x)=0$, να προσδιορίσετε τις άλλες ρίζες της εξίσωσης $P(x)=0$.

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$P(1)=16 \Leftrightarrow 1+\alpha-11+30=16 \Leftrightarrow \alpha=-4$$

β) Για $\alpha=-4$ το $P(x)$ γίνεται, $P(x)=x^3-4x^2-11x+30$
και αφού έχει ρίζα το $x=2$, με τη βοήθεια του σχήματος Horner έχουμε,

1	-4	-11	30	2
	2	-4	-30	
1	-2	-15	0	

άρα είναι

$$P(x)=(x-2)\left(x^2-2x-15\right)$$

Επομένως,

$$P(x)=0\Leftrightarrow(x-2)\left(x^2-2x-15\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\left(x-2=0 \quad ή \quad x^2-2x-15=0\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(x=2 \;\; ή \;\; x=-3 \;\; ή \;\; x=5\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ Β4 (2_22643)

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ με $\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$, το οποίο έχει ρίζες τους αριθμούς 0, 1 και 3.

α) Να δείξετε ότι $\beta=-4,\gamma=3$ και $\delta=0$.

Μονάδες 15

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$P(0)=0\Leftrightarrow\boxed{\delta=0} \quad (1)$$

$$P(1)=0\Leftrightarrow 1+\beta+\gamma+\delta=0\overset{(1)}{\Leftrightarrow}1+\beta+\gamma=0\Leftrightarrow\gamma=-1-\beta \quad (2)$$

$$P(3)=0\Leftrightarrow 27+9\beta+3\gamma=0\overset{:3}{\Leftrightarrow}9+3\beta+\gamma=0\overset{(2)}{\Leftrightarrow}9+3\beta-1-\beta=0\Leftrightarrow 2\beta=-8\Leftrightarrow\boxed{\beta=-4}$$

Τότε η (2) :

$$\gamma=-1-(-4)\Leftrightarrow\boxed{\gamma=3}$$

Επομένως είναι

$$P(x)=x^3-4x^2+3x$$

β) Έχουμε,

$$P(x)<0\Leftrightarrow x^3-4x^2+3x<0\Leftrightarrow x\left(x^2-4x+3\right)<0$$

οπότε τα πρόσημα των παραγόντων και το πρόσημο του $P(x)$ φαίνονται στον πίνακα,

x	$-\infty$	0		1		3	$+\infty$
x	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x^2-4x+3	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Επομένως,

$$P(x)<0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,0)\cup(1,3)$$

ΑΣΚΗΣΗ Β5 (2_22644)

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\lambda^2x^3-4\lambda x+3$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x-1$.

Μονάδες 10

β) Αν $\lambda=3$, να βρείτε όλες τις ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$.

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Αρκεί,

$$P(1)=0 \Leftrightarrow \lambda^2-4\lambda+3=0 \Leftrightarrow (\lambda=1 \text{ ή } \lambda=3)$$

β) Αν $\lambda=3$ τότε $P(x)=9x^3-12x+3$ και από το (α) έχει παράγοντα το $x-1$, οπότε με τη βοήθεια του σχήματος Horner έχουμε,

9	0	-12	3	1
	9	9	-3	
9	9	-3	0	

Επομένως ,

$$P(x)=(x-1)(9x^2+9x-3)=3(x-1)(3x^2+3x-1)$$

Άρα,

$$P(x)=0 \Leftrightarrow 3(x-1)(3x^2+3x-1)=0 \Leftrightarrow \left(x=1 \text{ ή } x=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{6} \right)$$

ΑΣΚΗΣΗ Β6 (2_22645)

Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=2x^4-x^3+\alpha x^2-5x+6$ διέρχεται από το σημείο $M(-2,0)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=-14$

Μονάδες 12

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Αφού η C_f διέρχεται από το σημείο $M(-2,0)$ ισχύει,

$$f(-2)=0 \Leftrightarrow 2(-2)^4-(-2)^3+\alpha(-2)^2-5(-2)+6=0$$

$$\Leftrightarrow 56+4\alpha=0 \Leftrightarrow 4\alpha=-56 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=-14}$$

Άρα,

$$f(x)=2x^4-x^3-14x^2-5x+6$$

β) Η C_f τέμνει τον $y'y$ για $x=0$ με $f(0)=6$, δηλαδή στο σημείο $A(0,6)$

Ακόμη, η C_f τέμνει τον $x'x$ στα σημεία με τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης, $f(x)=0$.

Όμως από το ερωτ. α) μία ρίζα της f είναι η $x=-2$, έτσι με τη βοήθεια του σχήματος Horner έχουμε,

2	-1	-14	-5	6	-2
	-4	10	8	-6	
2	-5	-4	3	0	

έτσι έχουμε,

$$f(x)=(x+2)(2x^3-5x^2-4x+3)$$

οι πιθανές ακέραιες ρίζες του πηλίκου $\pi(x)=2x^3-5x^2-4x+3$ που βρήκαμε είναι, $\pm 1, \pm 3$

και έτσι με τη βοήθεια του σχήματος Horner για $\rho=3$ έχουμε,

2	-5	-4	3	3
	6	3	-3	
2	1	-1	0	

οπότε,

$$f(x)=(x+2)(x-3)(2x^2+x-1)$$

Επομένως,

$$f(x)=0 \Leftrightarrow (x+2)(x-3)(2x^2+x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x=-2 \text{ ή } x=3 \text{ ή } x=-1 \text{ ή } x=\frac{1}{2}\right)$$

Δηλαδή τα σημεία τομής της C_f με τον $x'x$ είναι τα,

$$M(-2,0),\ B(3,0),\ \Gamma(-1,0) \text{ και } \Delta\left(\frac{1}{2},0\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ Β7 (2_22646)

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=3x^3-10x^2+9x-2$

α) Να κάνετε τη διαίρεση του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $3x^2-4x+1$ και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

Μονάδες 15

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $P(x)=0$

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Η διαίρεση του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $3x^2-4x+1$ φαίνεται παρακάτω

$$\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{3x^3} & -10x^2 & +9x & -2 & 3x^2-4x+1 \\ \cline{5-5}
\cancel{-3x^3} & +4x^2 & -x & & x-2 \\ \cline{1-4}
 & \cancel{-6x^2} & \cancel{+8x} & \cancel{-2} & \\
 & \cancel{6x^2} & \cancel{-8x} & \cancel{+2} & \\ \cline{2-4}
 & & 0 & &
\end{array}$$

Σύμφωνα με το παραπάνω η ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης είναι η:

$$3x^3-10x^2+9x-2=(3x^2-4x+1)(x-2)$$

β) Είναι

$$P(x)=0 \Leftrightarrow$$
$$(3x^2-4x+1)(x-2)=0 \Leftrightarrow$$
$$3x^2-4x+1=0 \text{ ή } x=2 \Leftrightarrow$$
$$x=1 \text{ ή } x=\frac{1}{3} \text{ ή } x=2$$

αφού το τριώνυμο $3x^2-4x+1=0$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=16-12=4$$

και ρίζες

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{4\pm2}{6}=\begin{cases}1\\ \dfrac{1}{3}\end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β8 (2_22647)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3+x^2-5x+2$

α) Να βρείτε τα σημεία τομής, της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$

Μονάδες 15

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 2x^3+x^2-5x+2=0 \ (1)$$

Πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης $2x^3+x^2-5x+2=0$ είναι οι διαιρέτες $\pm1,\pm2$ του σταθερού όρου.

Κάνουμε Horner με το 1

2	1	-5	2	$\rho=1$
	2	3	-2	
2	3	-2	0	

Σύμφωνα με το σχήμα Horner ισχύει

$$2x^3+x^2-5x+2=(x-1)(2x^2+3x-2)$$

Τότε η εξίσωση (1) γίνεται

$$(x-1)(2x^2+3x-2)=0 \Leftrightarrow$$

$$x-1=0 \text{ ή } 2x^2+3x-2=0 \Leftrightarrow$$

$$x=1 \text{ ή } x=\frac{1}{2} \text{ ή } x=-2$$

αφού το τριώνυμο $2x^2+3x-2=0$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=9+16=25$$

και ρίζες

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-3\pm5}{4}=\begin{cases}\frac{1}{2}\\-2\end{cases}$$

Άρα τα σημεία τομής, της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ είναι τα

$$(1,0),\ (\frac{1}{2},0),\ (-2,0)$$

β) Τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ είναι οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει

$$f(x)<0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2+3x-2)<0$$

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x^2+3x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ όταν

$$x\in(-\infty,-2)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ Β9 (2_22648)

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2-5x+\beta$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

α) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το $x-2$ είναι ίσο με – 4, να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

Μονάδες 13

β) Αν $\alpha=-2$ και $\beta=6$ να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Αφού το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το 1 ισχύει

$$P(1)=0 \Leftrightarrow 1^3+\alpha\cdot 1^2-5\cdot 1+\beta=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta=4\ (1)$$

Αφού το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το $x-2$ είναι ίσο με -4 ισχύει

$$P(2)=-4 \Leftrightarrow 2^3+\alpha\cdot 2^2-5\cdot 2+\beta=-4 \Leftrightarrow 4\alpha+\beta=-2\quad (2)$$

Αφαιρώντας από την (2) την (1) προκύπτει

$$3\alpha=-6 \Leftrightarrow \alpha=-2$$

Αντικαθιστώντας όπου α το -2 στην (1) προκύπτει

$$\beta=6$$

β) Για $\alpha=-2$ και $\beta=6$ είναι $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$

Κάνουμε Horner με το 1

1	-2	-5	6	$\rho=1$
	1	-1	-6	
1	-1	-6	0	

Σύμφωνα με το σχήμα Horner ισχύει

$$x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x^2-x-6)$$

Είναι

$$P(x)=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)(x^2-x-6)=0 \Leftrightarrow$$

$$x-1=0 \text{ ή } x^2-x-6=0 \Leftrightarrow$$

$$x=1 \text{ ή } x=3 \text{ ή } x=-2$$

αφού το τριώνυμο $x^2-x-6=0$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1+24=25$$

και ρίζες

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{1\pm 5}{2}=\begin{cases}3\\-2\end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β10 (2_22679)

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x)=x^3-3x \quad x\in(-2,2)$$

α) Είναι η f άρτια ή περιττή; Να αποδείξετε αλγεβρικά τον ισχυρισμό σας.

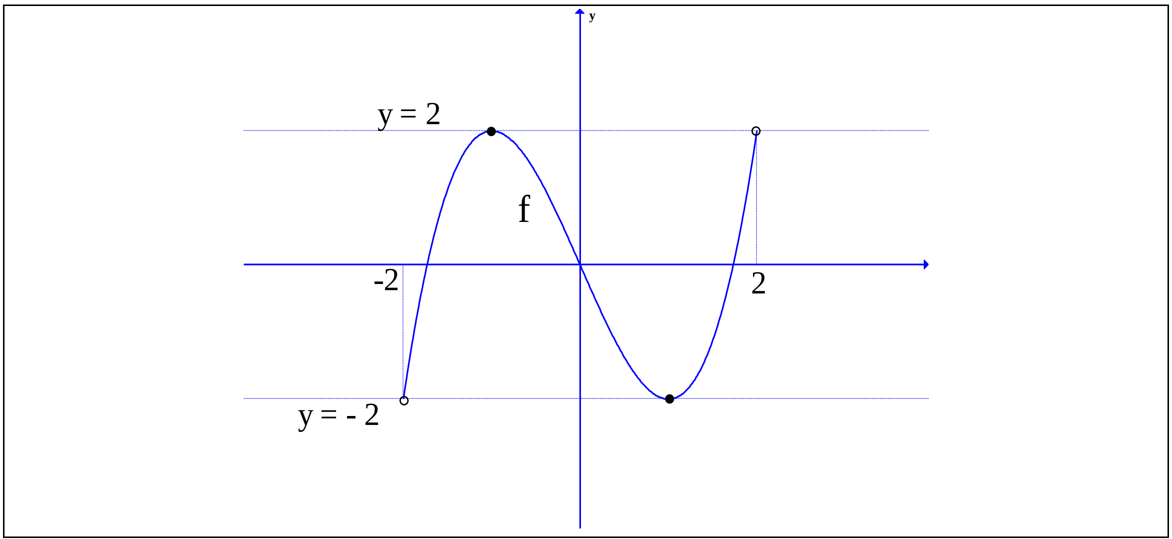
Μονάδες 7

β) Χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση της f να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

Μονάδες 6

γ) Να βρείτε τις θέσεις των ακρότατων της f

Μονάδες 12



ΛΥΣΗ

α) Η f είναι περιττή (αφού η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς την αρχή O(0, 0)).

Πράγματι, για κάθε $x \in (-2, 2)$ ισχύει $-x \in (-2, 2)$ και

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -f(x)$$

β) Από τη γραφική παράσταση της f παρατηρούμε ότι η μέγιστη τιμή της f είναι 2 και η ελάχιστη τιμή της – 2.

γ) Η θέση του μεγίστου της f είναι το x για το οποίο ισχύει

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x = 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x - 2 = 0 \quad (1)$$

Κάνουμε Horner με το -1

1	0	-3	-2	$\rho = -1$
	-1	1	2	
1	-1	-2	0	

Σύμφωνα με το σχήμα Horner ισχύει

$$x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x^2 - x - 2)$$

Τότε η εξίσωση (1) γίνεται

$$(x+1)(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x + 1 = 0 \text{ ή } x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = -1 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } x = -1$$

Αφού το τριώνυμο $x^2 - x - 2 = 0$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1 + 8 = 9$$

και ρίζες

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Η $x = 2$ απορρίπτεται, αφού $x \in (-2, 2)$, άρα η f παρουσιάζει μέγιστο για $x = -1$

Η θέση του ελαχίστου της f είναι το x για το οποίο ισχύει

$$f(x) = -2 \Leftrightarrow x^3 - 3x = -2 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \ (2)$$

Κάνουμε Horner με το 1

1	0	-3	2	$\rho = 1$
	1	1	-2	
1	1	-2	0	

Σύμφωνα με το σχήμα Horner ισχύει

$$x^3 - 3x - 2 = (x-1)(x^2 + x - 2)$$

Τότε η εξίσωση (2) γίνεται

$$(x-1)(x^2+x-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x - 1 = 0 \text{ ή } x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 1 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -2$$

αφού το τριώνυμο $x^2 + x - 2 = 0$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1 + 8 = 9$$

και ρίζες

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

Η $x = -2$ απορρίπτεται (αφού $x \in (-2, 2)$), άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 1$

ΑΣΚΗΣΗ Β11 (2_22681)

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 2$ Αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x + 1$ και $P(2) = 18$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 2$

Μονάδες 10

β) Να λύσετε την εξίσωση: $P(x) = 0$

Μονάδες 8

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $P(x) \leq 0$

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

α) Είναι

$$x + 1 \text{ παράγοντας του } P(x) \Leftrightarrow -1 \text{ ρίζα του } P(x) \Leftrightarrow$$

$$P(-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(-1)^3 + \alpha(-1)^2 + \beta(-1) + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha - \beta = -1 \ (1)$$

Ισχύει

$$P(2) = 18 \Leftrightarrow 2^3 + \alpha \cdot 2^2 + \beta \cdot 2 + 2 = 18 \Leftrightarrow 4\alpha + 2\beta = 8 \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = 4 \ (2)$$

Προσθέτοντας τις (1), (2) κατά μέλη προκύπτει

$$3\alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

Αντικαθιστώντας όπου α το 1 στη σχέση (2) προκύπτει $\beta = 2$

β) Για $\alpha=1$ και $\beta=2$ είναι $P(x)=x^3+x^2+2x+2$

Κάνουμε Horner με το -1

1	1	2	2	$\rho=-1$
	-1	0	-2	
1	0	2	0	

Σύμφωνα με το σχήμα Horner ισχύει

$$x^3+x^2+2x+2=(x+1)(x^2+2)$$

Είναι

$$P(x)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+2)=0 \Leftrightarrow x+1=0 \text{ ή } x^2+2=0 \Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x^2=-2 \text{ αδύνατη}$$

γ) Είναι

$$P(x)\le 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+2)\le 0 \Leftrightarrow x+1\le 0 \Leftrightarrow x\le -1$$

(αφού ισχύει $x^2+2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$)

ΑΣΚΗΣΗ Β12 (2_22682)

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+(\kappa-6)x^2-7x+\kappa$

α) Να βρείτε για ποια τιμή του $\kappa\in\mathbb{R}$ το 2 είναι ρίζα του $P(x)$

Μονάδες 12

β) Αν $\kappa=6$ να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Αφού το 2 είναι ρίζα του $P(x)$ ισχύει

$$P(2)=0 \Leftrightarrow 2^3+(\kappa-6)2^2-7\cdot 2+\kappa=0 \Leftrightarrow$$
$$8+4\kappa-24-14+\kappa=0 \Leftrightarrow$$
$$5\kappa=30 \Leftrightarrow$$
$$\kappa=6$$

β) Για $\kappa=6$ είναι $P(x)=x^3-7x+6$

Κάνουμε Horner με το 1

1	0	-7	6	$\rho=1$
	1	1	-6	
1	1	-6	0	

Σύμφωνα με το σχήμα Horner ισχύει

$$x^3-7x+6=(x-1)(x^2+x-6)$$

Είναι

$$P(x)=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)(x^2+x-6)=0$$

$$x-1=0 \text{ ή } x^2+x-6=0$$

$$x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=-3$$

Αφού το τριώνυμο $x^2+x-6=0$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1+24=25$$

και ρίζες

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-1\pm5}{2}=\begin{cases}2\\-3\end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β13 (2_22683)

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta\chi+6$

α) Αν γνωρίζετε ότι η τιμή του πολυωνύμου για $\chi=1$ είναι ίση με 10 και $P(2)=10$ να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

Μονάδες 12

β) Αν $\alpha=-5$ και $\beta=8$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)>10$

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$P(1)=10\Leftrightarrow 1^3+\alpha\cdot1^2+6\cdot1+6=10\Leftrightarrow \alpha+\beta=3 \ \ (1)$$

$$P(2)=10\Leftrightarrow 2^3+\alpha\cdot2^2+\beta\cdot2+6=10\Leftrightarrow 4\alpha+2\beta=-4 \ \ (2)$$

Λύνω το σύστημα των (1),(2)

$$\alpha+\beta=3\Leftrightarrow\alpha=3-\beta \ \ (3)$$

$$4\alpha+2\beta=-4\Rightarrow 4\cdot(3-\beta)+2\beta=-4\Rightarrow$$

$$12-4\beta+2\beta=-4\Rightarrow$$

$$-2\beta=-16\Rightarrow$$

$$\beta=8$$

άρα α=-5

β) Έχουμε,

$$P(x)>10$$

$$x^3-5x^2+8x+6>10\Leftrightarrow x^3-5x^2+8x-4>0$$

Έστω

$Q(x)=x^3-5x^2+8x-4$ τότε η $Q(x)=0$ θα έχει πιθανές ακέραιες ρίζες τις : $\pm1,\pm2,\pm4$

$$Q(1)=1^3-5\cdot1^2+8\cdot1-4=1-5+8-4=0$$

Άρα το 1 ρίζα του $Q(x)$. Κάνουμε σχήμα Horner με το 1:

1	-5	8	-4	1
↓	1	-4	4	
1	-4	4	0	

Άρα

$$Q(x)=x^3-5x^2+8x-4=(x-1)\cdot(x^2-4x+4)=(x-1)\cdot(x-2)^2$$

οπότε

$$Q(x)>0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot(x-2)^2>0$$

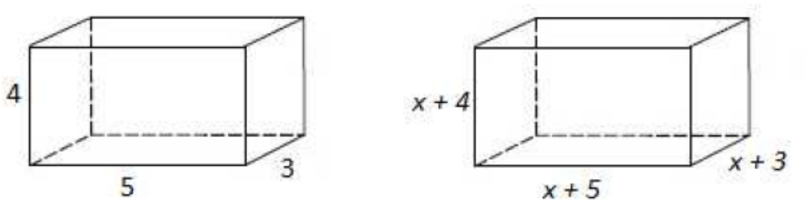
x	$-\infty$ 1	2	$+\infty$
$x-1$	-	+	+
$(x-1)^2$	+	+	+
Γινόμενο	-	+	+

Επομένως,

$$Q(x)>0 \text{ για } x\in(1,2)\cup(2,+\infty)$$

ΑΣΚΗΣΗ Β14 (2_22684)

Μια εταιρεία κατασκευάζει κουτιά σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 3cm,4cm και 5cm



Ένας νέος πελάτης ζήτησε από την εταιρεία να κατασκευάσει κουτιά με όγκο $120cm^3$,δηλαδή διπλάσιο από εκείνον που κατασκευάζει.

Η εταιρεία αποφάσισε να κατασκευάσει τα κουτιά που ζήτησε ο πελάτης της ,αυξάνοντας τις διαστάσεις του αρχικού κουτιού κατά σταθερό ακέραιο μήκος x

α) Να αποδείξετε ότι το x θα είναι λύση της εξίσωσης $x^3+12x^2+47x-60=0$

(Ο όγκος V ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις α, β, γ δίνεται από τον τύπο $:V=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$

Μονάδες 12

β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο x λύνοντας την εξίσωση που δίνεται στο ερώτημα α

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Οι διαστάσεις του νέου κουτιού θα είναι όπως φαίνεται και στο σχήμα $x+4, x+5, x+3$.Άρα αφού $V=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$,

$$V=(x+4)\cdot(x+5)\cdot(x+3)$$

$$=(x^2+5x+4x+20)\cdot(x+3)$$

$$=x^3+3x^2+9x^2+27x+20x+60$$

$$=x^3+12x^2+47x+60$$

Όμως

$$V=120$$

άρα

$$x^3+12x^2+47x+60=120 \Leftrightarrow x^3+12x^2+47x-60=0$$

Έστω

$$V(x)=x^3+12x^2+47x-60$$

Η εξίσωση $V(x)=0$ έχει πιθανές ακέραιες ρίζες τους διαιρέτες του 60 άρα $\pm1, \pm2, \pm3$

$$V(1)=1^3+12\cdot1^2+47\cdot1-60=0$$

Άρα το 1 ρίζα της $V(x)$

Κάνουμε σχήμα Horner με το 1:

1	12	47	-60	1
↓	1	13	60	
1	13	60	0	

Άρα

$$V(\chi)=x^3+12x^2+47x-60=(x-1)\cdot(x^2+13x+60)$$

Άρα

$$V(x)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \text{ ή } x^2+13x+60=0$$

$$x=1 \quad \text{ή} \quad \Delta=13^2-4\cdot60=169-240<0$$

Άρα η εξίσωση $x^2+13x+60=0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες, δεκτή μόνο η $x=1$. Οι διαστάσεις του νέου κουτιού θα είναι 5, 6, 4.

ΑΣΚΗΣΗ Β15 (2_22685)

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=(\alpha^3+2)x^3+x^2+1$ και $Q(x)=3\alpha x^3+x^2+1$, όπου α θετικός πραγματικός αριθμός

α) Να βρείτε το α ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα

Μονάδες 13

β) Αν α=1, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x)=0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Για να ισχύει

$$P(x)=Q(x) \Leftrightarrow (\alpha^3+2)x^3+x^2+1=3\alpha x^3+x^2+1$$

Πρέπει

$$\alpha^3+2=3\alpha \Leftrightarrow \alpha^3-3\alpha+2=0$$

Έστω $h(\alpha)=\alpha^3-3\alpha+2$ τότε η εξίσωση $h(\alpha)=0$ θα έχει πιθανές ακέραιες ρίζες τις $\pm1, \pm2$

$h(1)=1^3-3\cdot1+2=0$ άρα το 1 ρίζα του $h(\alpha)$

Κάνουμε σχήμα Horner με το 1:

1	0	-3	2	1
↓	1	1	-2	
1	1	-2	0	

Άρα

$$h(\alpha)=\alpha^3-3\alpha+2=(\alpha-1)\cdot(\alpha^2+\alpha-2)$$

Άρα

$$h(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha-1=0 \text{ ή } \alpha^2+\alpha-2=0$$

$$\Delta=1-9\cdot 1\cdot(-2)=9$$

$$\alpha_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{-1-3}{2}=-2\\ \frac{-1+3}{2}=1\end{cases}$$

Άρα για $\alpha=1$ ή $\alpha=-2$ τα $P(x),Q(x)$ είναι ίσα

β) Για α=1, το πολυώνυμο $P(x)$ γράφεται $P(x)=3x^3+x^2+1$, άρα η εξίσωση

$$P(x)=0 \Leftrightarrow 3x^3+x^2+1=0$$

έχει πιθανές ακέραιες ρίζες τις ± 1

$$P(-1)=3\cdot 1^3+1^2+1=5\neq 0$$

$$P(-1)=3\cdot(-1)^3+(-1)^2+1=-1\neq 0$$

Άρα η εξίσωση $P(x)=0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες .

ΑΣΚΗΣΗ Β16 (2_22686)

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+2x^2-4x+\lambda$

α) Αν $P(-1)=6$,να δείξετε ότι $\lambda=1$

Μονάδες 11

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$

Μονάδες 14

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$P(-1)=6 \Leftrightarrow (-1)^3+2\cdot(-1)^2-4\cdot(-1)+\lambda=6$$

$$-1+2+4+\lambda=6$$

$$5+\lambda=6$$

$$\lambda=1$$

Άρα $P(x)=x^3+2x^2-4x+1$

β) Η $P(x)=0$ θα έχει πιθανές ακέραιες ρίζες τις ± 1

$$P(1)=1^3+2\cdot 1^2-4\cdot 1+1=0$$

Άρα το 1 ρίζα του $P(x)$

Κάνουμε σχήμα Horner με το 1:

1	2	-4	1	1
↓	1	3	-1	
1	3	-1	0	

Άρα

$$P(x)=x^3+2x^2-4x+1=(x-1)\cdot(x^2+3x-1)$$

οπότε

$$P(x)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \text{ ή } x^2+3x-1=0$$

$$\Delta=3^2-4\cdot(-1)=13$$

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}\begin{cases}\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}\\ \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}\end{cases}$$

οι ρίζες είναι

$$x=1,\ x=\frac{-3-\sqrt{13}}{2},\ x=\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β17 (2_22687)

Το πολυώνυμο $P(x)=(\lambda^2-1)x^4-2(\lambda-1)x^3+2\lambda x^2+\lambda+1$ είναι $3^{ου}$ βαθμού.

α) Να δείξετε ότι $\lambda=-1$

Μονάδες 9

β) Να βρείτε το $P(x)$

Μονάδες 7

γ) Να βρείτε τις ρίζες του $P(x)$

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Αφού $P(x)$ $3^{ου}$ βαθμού πρέπει :

$$\lambda^2-1=0 \Leftrightarrow \lambda^2=1 \Leftrightarrow \lambda=\pm 1$$

ταυτόχρονα όμως πρέπει ο συντελεστής του «x^3» να είναι $\neq 0$ άρα

$$-2(\lambda-1)\neq 0 \Leftrightarrow \lambda-1\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 1$$

Άρα πρέπει τελικά $\lambda=-1$

β) Αφού $\lambda=-1$ το

$$P(x)=\left[(-1)^2-1\right]x^4-2\left[(-1)-1\right]x^3+2\cdot(-1)x^2+(-1)+1$$

$$=0\cdot x^4-2\cdot(-2)x^3-2x^2+0$$
$$=+4x^3-2x^2$$

Άρα

$$P(x)=4x^3-2x^2$$

γ) Έχουμε,

$$P(x)=0\Leftrightarrow 4x^3-2x^2=0\Leftrightarrow$$
$$2x^2\cdot(2x-1)=0\Leftrightarrow$$
$$x^2=0 \text{ ή } 2x-1=0$$
$$x=0 \text{ ή } x=\frac{1}{2} \text{ διπλή ρίζα}$$

Άρα οι ρίζες του είναι οι $0,\frac{1}{2}$

«ΘΕΜΑ Δ»

ΑΣΚΗΣΗ Δ1 (4_22734)

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδό $E=30cm^2$ του οποίου η υποτείνουσα είναι κατά 1cm μεγαλύτερη από τη μία κάθετη πλευρά. Αν ονομάσουμε x το μήκος αυτής της κάθετης πλευράς και y το μήκος της άλλης πλευράς (σε cm), τότε:

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί x, y ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$y=\frac{60}{x} \text{ και } (x+1)^2=x^2+y^2$$

Μονάδες 4

β) Να δείξετε ότι ο αριθμός x ικανοποιεί την εξίσωση:

$$2x^3+x^2-3600=0$$

Μονάδες 4

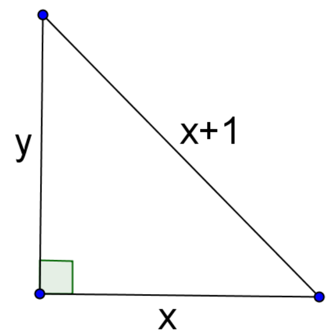
γ) Αν γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς x είναι αριθμός ακέραιος και μικρότερος του 15, να βρείτε την τιμή του x καθώς και τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου.

Μονάδες 12

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει άλλο ορθογώνιο τρίγωνο (με διαφορετικά μήκη πλευρών από αυτά που προσδιορίσατε στο ερώτημα γ) το οποίο ικανοποιεί τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος.

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ



α) Έχουμε,

$$E=30 \Leftrightarrow \frac{x\cdot y}{2}=30 \Leftrightarrow x\cdot y=60 \Leftrightarrow y=\frac{60}{x}.$$

Από Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε ότι:

$$(x+1)^2=x^2+y^2$$

β) Έχουμε,

$$(x+1)^2=x^2+y^2 \Leftrightarrow (x+1)^2=x^2+\left(\frac{60}{x}\right)^2 \Leftrightarrow x^2+2x+1=x^2+\frac{3600}{x^2} \Leftrightarrow 2x+1=\frac{3600}{x^2} \Leftrightarrow$$
$$2x^3+x^2=3600 \Leftrightarrow 2x^3+x^2-3600=0$$

γ) Εφαρμόζοντας σχήμα Horner για $\rho=12$ προκύπτει:

$$2x^3+x^2-3600=0 \Leftrightarrow (x-12)(2x^2+25x+300)=0 \Leftrightarrow x-12=0 \text{ ή } 2x^2+25x+300=0$$

Άρα $x=12$ αφού η δεύτερη εξίσωση είναι αδύνατη $(\Delta=-1775<0)$.

Επομένως η άλλη κάθετη πλευρά είναι $y=\frac{60}{12}=5$ και η υποτείνουσα είναι 13.

δ) Αφού η εξίσωση $2x^3+x^2-3600=0$ έχει μοναδική λύση την $x=12$ δεν υπάρχει άλλο ορθογώνιο τρίγωνο το οποίο να ικανοποιεί τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος.

ΑΣΚΗΣΗ Δ2 (4_22759)

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{4}x^3+\gamma x+\delta, x\in\mathbb{R}$ και γ, δ πραγματικές σταθερές.

α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να αποδείξετε ότι $\gamma=-1$ και $\delta=0$.

Μονάδες 5

β) Θεωρώντας τώρα δεδομένο ότι $f(x)=\frac{1}{4}x^3-x$:

i) να αποδείξετε ότι $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

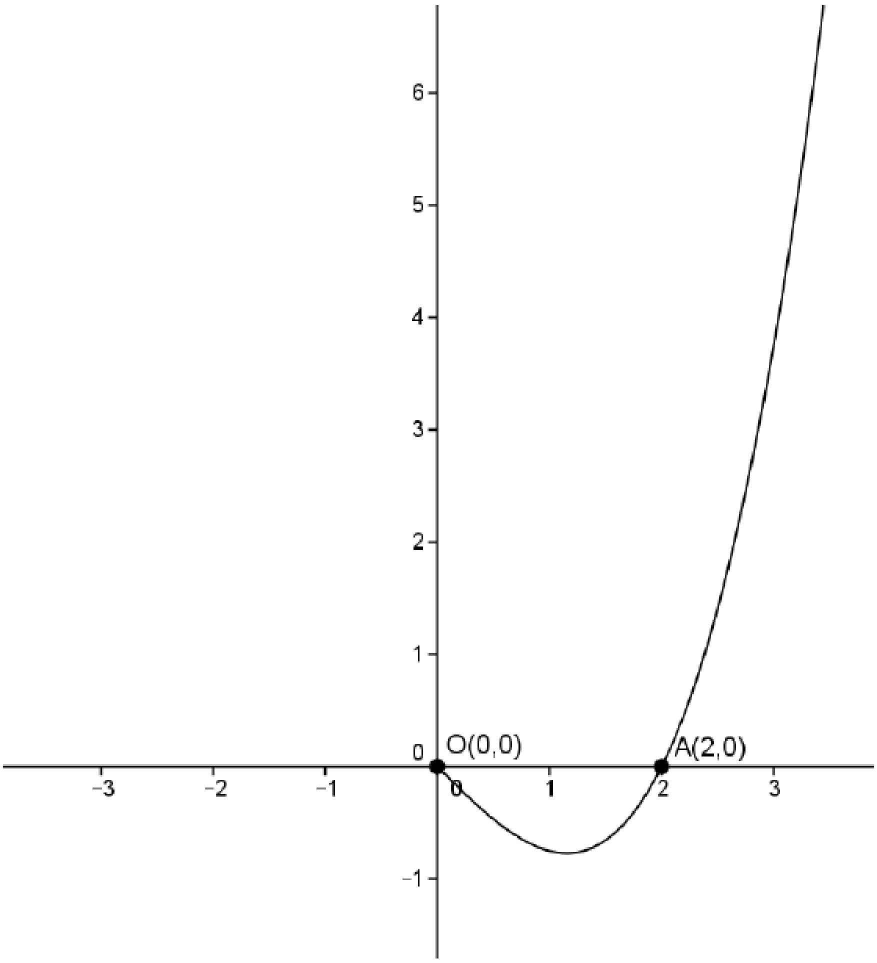
Μονάδες 5

ii) να μεταφέρετε στην κόλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x<0$.

Μονάδες 5

iii) να επαληθεύσετε ότι $f(1)=-\frac{3}{4}$ και στη συνέχεια, να λύσετε τις εξισώσεις $f(x)=-\frac{3}{4}$ και $f(x)=\frac{3}{4}$.

Μονάδες 10



ΛΥΣΗ

α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $O(0,0)$ και $A(2,0)$ οπότε:

$$f(0)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}0^3+\gamma\cdot 0+\delta=0 \Leftrightarrow \delta=0$$

και η f γίνεται:

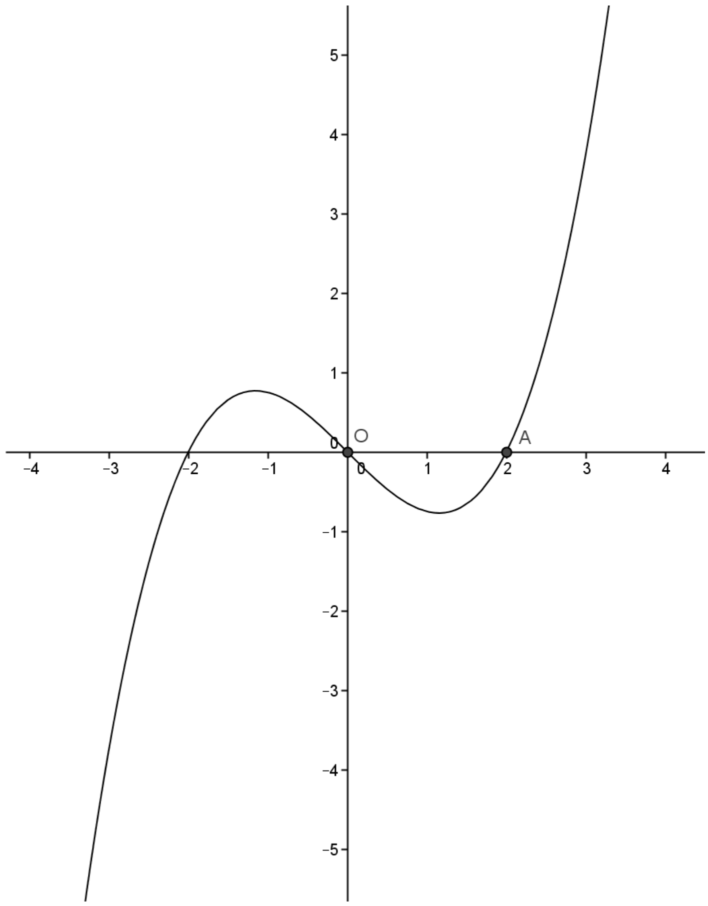
$$f(x)=\frac{1}{4}x^3+\gamma x$$

$$f(2)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\cdot 2^3+\gamma\cdot 2=0 \Leftrightarrow 2+2\gamma=0 \Leftrightarrow 2\gamma=-2 \Leftrightarrow \gamma=-1.$$

β) i) Έχουμε,

$$f(-x)=\frac{1}{4}(-x)^3-(-x)=-\frac{1}{4}x^3+x=-\left(\frac{1}{4}x^3-x\right)=-f(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

ii) Αφού $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι περιττή και η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.



iii) Έχουμε

$$f(1)=\frac{1}{4}\cdot 1^3-1=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}$$

$$f(x)=-\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{4}x^3-x=-\frac{3}{4}\Leftrightarrow x^3-4x=-3\Leftrightarrow x^3-4x+3=0\Leftrightarrow(x-1)\left(x^2+x-3\right)=0$$

$$x-1=0\Leftrightarrow x=1 \text{ ή}$$

$$x^2+x-3=0,\ \Delta=13 \text{ και } x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}=\begin{cases}x_1=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\\ x_2=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}\end{cases}$$

Αφού η f είναι περιττή οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=\frac{3}{4}$ είναι:

$$x=-1 \text{ ή } x=\frac{1-\sqrt{13}}{2} \text{ ή } x=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ3 (4_22762)

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=3x^4-12x^3+8x^2+\alpha x+\beta$, όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το $x+1$ αφήνει υπόλοιπο $16+P(1)$ και διαιρούμενο με $x-1$ αφήνει υπόλοιπο $16-P(-1)$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $P(1)=0$ και $P(-1)=16$

Μονάδες 8

β) να αποδείξετε ότι $\alpha=4$ και $\beta=-3$

Μονάδες 9

γ) να αποδείξετε ότι $P(4)\cdot P(5)\cdot P(6)\cdot P(7)\neq 0$

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

α) Αφού το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το $x+1$ αφήνει υπόλοιπο $16+P(1)$ και διαιρούμενο με $x-1$ αφήνει υπόλοιπο $16-P(-1)$ ισχύουν ότι:

$$P(-1)=16+P(1)\ (1) \text{ και } P(1)=16-P(-1)\ (2)$$

$$(1)\overset{(2)}{\Rightarrow}P(-1)=16+16-P(-1)\Rightarrow 2P(-1)=32\Rightarrow P(-1)=16$$

$$(2)\Rightarrow P(1)=16-16\Rightarrow P(1)=0$$

β) $P(1)=0\Rightarrow 3\cdot 1^4-12\cdot 1^3+8\cdot 1^2+\alpha\cdot 1+\beta=0\Rightarrow 3-12+8+\alpha+\beta=0\Rightarrow \alpha+\beta=1$

$P(-1)=16\Rightarrow 3\cdot(-1)^4-12\cdot(-1)^3+8\cdot(-1)^2+\alpha\cdot(-1)+\beta=16\Rightarrow 3+12+8-\alpha+\beta=16\Rightarrow$
$-\alpha+\beta=-7$

Λύνοντας το σύστημα των δύο παραπάνω σχέσεων προκύπτει ότι: $\alpha=4$ και $\beta=-3$

γ) Εφαρμόζουμε σχήμα Horner στο P(x) για $\rho=1$:

3	−12	8	4	−3
↓	3	−9	−1	3
3	−9	−1	3	0

οπότε

$$P(x)=(x-1)(3x^3-9x^2-x+3)$$

Εφαρμόζουμε σχήμα Horner στο $3x^3-9x^2-x+3$ για $\rho=3$:

3	−9	−1	3
↓	9	0	−3
3	0	−1	0

οπότε

$$P(x)=(x-1)(x-3)(3x^2-1)$$

Λύνω την εξίσωση

$$P(x)=0\Leftrightarrow(x-1)(x-3)(3x^2-1)=0$$

$$x-1=0\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x-3=0\Leftrightarrow x=3 \text{ ή } 3x^2-1=0\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Επομένως οι ρίζες του πολυωνύμου P(x) είναι οι $1,3,\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Οπότε

$$P(4)\neq 0, P(5)\neq 0, P(6)\neq 0, P(7)\neq 0$$

Άρα

$$P(4)\cdot P(5)\cdot P(6)\cdot P(7)\neq 0$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ4 (4_22764)

Έστω $P(x)$ πολυώνυμο τρίτου βαθμού το οποίο διαιρείται με το πολυώνυμο x^2+2x και είναι τέτοιο, ώστε $P(1)=0$ και $P(2)=8$.

α) Να αποδείξετε ότι $P(x)=x^3+x^2-2x$

Μονάδες 10

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=8$

Μονάδες 6

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)>2$

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Επειδή του πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο x^2+2x, προκύπτει ότι το $P(x)$ θα γράφεται ως

$$P(x)=(x^2+2x)\cdot q(x),$$

όπου $q(x)$ πολυώνυμο $1^{ου}$ βαθμού (αφού το $P(x)$ είναι πολυώνυμο $3^{ου}$ βαθμού), άρα

$$P(x)=(x^2+2x)\cdot(\alpha x+\beta)\ ,\ \alpha\neq 0,\beta\in\mathbb{R}$$

- Από τη σχέση $P(1)=0\Rightarrow(1^2+2\cdot 1)\cdot(\alpha\cdot 1+\beta)=0\Rightarrow 3(\alpha+\beta)=0\Rightarrow\alpha+\beta=0$
- Από τη σχέση $P(2)=8\Rightarrow(2^2+2\cdot 2)\cdot(\alpha\cdot 2+\beta)=8\Rightarrow 8(\alpha\cdot 2+\beta)=8\Rightarrow 2\alpha+\beta=1$

Οπότε προκύπτει το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ 2\alpha+\beta=1\end{cases}$$

Αφαιρώντας τις δύο αυτές σχέσεις κατά μέλη, παίρνουμε:

$$2\alpha+\beta-(\alpha+\beta)=1-0\Rightarrow 2\alpha+\beta-\alpha-\beta=1\Rightarrow\alpha=1$$

Έτσι, από τη σχέση $\alpha+\beta=0$ προκύπτει ότι $\beta=-1$

Βρήκαμε, λοιπόν, ότι

$$\alpha=1,\beta=-1$$

και άρα

$$P(x)=(x^2+2x)\cdot(x-1)$$

Εκτελώντας την επιμεριστική ιδιότητα παίρνουμε

$$P(x)=x^3-x^2+2x^2-2x$$

$$P(x)=x^3+x^2-2x$$

β) Η εξίσωση $P(x)=8$ γράφεται ισοδύναμα

$$x^3+x^2-2x=8 \Leftrightarrow x^3+x^2-2x-8=0$$

Κάνουμε σχήμα Horner με το 2:

1	1	-2	-8	2
↓	2	6	8	
1	3	4	0	

Οπότε, η ταυτότητα της διαίρεσης δίνει:

$$x^3+x^2-2x-8=(x-2)(x^2+3x+4)$$

Άρα,

$$x^3+x^2-2x-8=0 \Leftrightarrow$$
$$(x-2)(x^2+3x+4)=0 \Leftrightarrow$$
$$\{x-2=0 \text{ ή } x^2+3x+4=0\} \Leftrightarrow$$
$$x=2 \text{ ή } x^2+3x+4=0$$

Το τριώνυμο x^2+3x+4 έχει διακρίνουσα $\Delta=-7<0$, άρα η εξίσωση $x^2+3x+4=0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$. Έτσι,

$$P(x)=8 \Leftrightarrow x=2$$

γ) Έχουμε,

$$P(x)>2 \Leftrightarrow$$
$$x^3+x^2-2x>2 \Leftrightarrow$$
$$x^3+x^2-2x-2>0 \Leftrightarrow$$
$$x^2(x+1)-2(x+1)>0 \Leftrightarrow$$
$$(x+1)(x^2-2)>0$$

Όμως,

$$\{x+1=0 \Leftrightarrow x=-1\} \text{ και } \{x^2-2=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}\}$$

Σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών

	$-\sqrt{2}$	-1	$\sqrt{2}$	
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
x^2-2	$+$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)(x^2-2)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Οπότε,

$$P(x)>2 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-2)>0 \Leftrightarrow -\sqrt{2}<x<-1 \text{ ή } x>\sqrt{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ5 (4_22774)

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha^3x^2-\alpha^2x-\alpha$, με $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x-\alpha)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

Μονάδες 7

β) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες το $(x-\alpha)$ διαιρεί το $P(x)$.

Μονάδες 6

γ) Αν $\alpha=-1$, τότε:

i. Να λύσετε την ανίσωση $P(x)\geq 0$.

Μονάδες 6

ii. Να λύσετε την ανίσωση $(x+1)P(x)\leq 0$.

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

α) Επειδή ο διαιρέτης είναι της μορφής $x-\rho$ θα χρησιμοποιήσουμε το σχήμα Horner.

1	α^3	$-\alpha^2$	$-\alpha$	α
↓	α	$\alpha^4+\alpha^2$	α^5	
1	$\alpha^3+\alpha$	α^4	$\alpha^5-\alpha$	

Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι $\upsilon=\alpha^5-\alpha$ και το πηλίκο είναι:

$$\pi(x)=x^2+(\alpha^3+\alpha)x+\alpha^4$$

Επομένως η ταυτότητα της διαίρεσης είναι:

$$P(x)=(x-\alpha)\cdot\left[x^2+(\alpha^3+\alpha)x+\alpha^4\right]+(\alpha^5-\alpha)\ (1)$$

β) Για να διαιρεί το $P(x)$ το $x-\alpha$ αρκεί το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-\alpha)$ να είναι μηδέν. Δηλαδή

$$\alpha^5-\alpha=0\Leftrightarrow \alpha(\alpha^4-1)=0\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \alpha^4=1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \text{ή}\\ \alpha=1 \quad \text{ή} \quad \alpha=-1\end{cases}$$

γ) i. Για $\alpha=-1$ η ταυτότητα της διαίρεσης (1) γίνεται:

$$(x+1)\cdot(x^2-2x+1)\geq 0\Leftrightarrow (x+1)\cdot(x-1)^2\geq 0$$

x	$-\infty$	-1	1 $+\infty$
$x+1$	-	+	+
$(x-1)^2$	+	+	+
$(x+1)(x-1)^2$	-	+	+

Άρα

$$P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, +\infty].$$

ii. Έχουμε,

$$(x+1)\cdot P(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)\cdot(x+1)\cdot(x-1)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2\cdot(x-1)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow [(x+1)\cdot(x-1)]^2 \geq 0$$

$\Leftrightarrow (x^2-1)^2 \geq 0$, ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x.

ΑΣΚΗΣΗ Δ6 (4_22775)

Μια εταιρία εκτίμησε ότι το κέρδος της P (σε χιλιάδες ευρώ) από την πώληση ενός συγκεκριμένου προϊόντος ήταν: $P(x) = -0,5x^3 + 1,9x^2 + 1,\ \ 0 \leq x < 4$, όπου x είναι η διαφημιστική δαπάνη (σε χιλιάδες ευρώ). Για αυτό το προϊόν, ξόδεψε για διαφήμιση 3 χιλιάδες ευρώ και το κέρδος της ήταν 4,6 χιλιάδες ευρώ.

α) i.Να χρησιμοποιήσετε την παρακάτω γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)$ για να εκτιμήσετε ένα άλλο ποσό x που θα μπορούσε να δαπανήσει για διαφήμιση η εταιρία ώστε να έχει το ίδιο κέρδος.

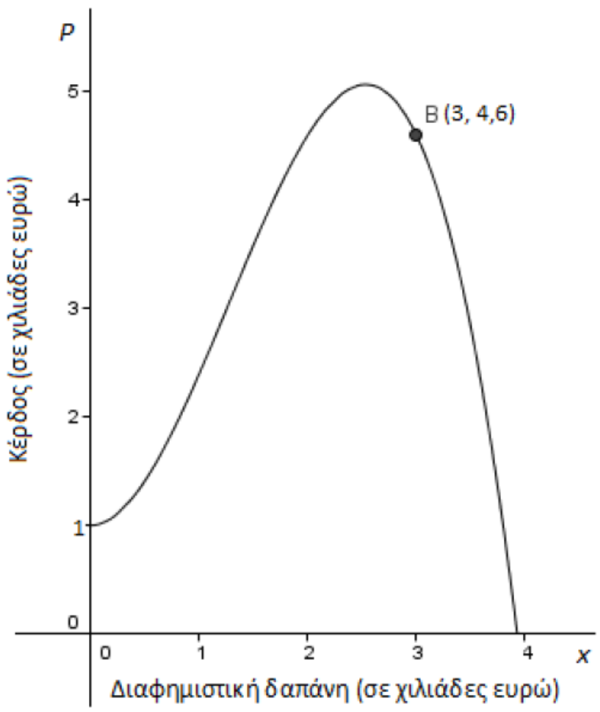
Μονάδες 5

ii. Να επαληθεύσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του ερωτήματος i.

Μονάδες 10

β) Πόσα χρήματα πρέπει να δαπανήσει η εταιρία για διαφήμιση, ώστε το κέρδος της να είναι μεγαλύτερο από 4,6 χιλιάδες ευρώ;

Μονάδες 10



ΛΥΣΗ

α) i) Η ευθεία $y=4,6$ τέμνει την γραφική παράσταση της f και στο σημείο $A(2,4\ ,6)$.

ii) Έχουμε,

$$P(x)=4,6\Leftrightarrow -0,5x^3+1,9x^2+1=4,6\Leftrightarrow -5x^3+19x^2+10=46\Leftrightarrow \boxed{-5x^3+19x^2-36=0}$$

-5	19	0	-36	3
↓	-15	12	36	
-5	4	12	0	

Άρα η εξίσωση $\boxed{-5x^3+19x^2-36=0}$ γίνεται :

$$(x-3)\cdot(-5x^2+4x+12)=0\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \text{ή} \\ -5x^2+4x+12=0 \end{cases}$$

$$\Delta=4^2-4\cdot(-5)\cdot 12=16+240=256$$

$$x=\frac{-4\pm 16}{-10}\Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-1,2 \text{ απορρίπτεται} \end{cases}$$

β) Έχουμε,

$$P(x)>4,6\Leftrightarrow -0,5x^3+1,9x^2+1>4,6\Leftrightarrow -5x^3+19x^2+10>46$$

$$\Leftrightarrow -5x^3+19x^2-36>0\Leftrightarrow (x-3)\cdot(-5x^2+4x+12)>0$$

$$\Leftrightarrow -5(x-3)\cdot(x-2)\cdot(x+1,2)<0 \overset{(x+1,2)>0}{\Leftrightarrow} (x-2)\cdot(x-2)<0\Leftrightarrow x\in(2,3)\subset[0,4)$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ7 (4_22776)

Για να κατασκευάσουμε ένα ανοικτό κουτί από ένα ορθογώνιο χαρτόνι με διαστάσεις 5dm και 8dm, κόβουμε ίσα τετράγωνα, πλευράς x από κάθε γωνία του και γυρίζουμε προς τα πάνω τις πλευρές του (Σχήμα 1).

α) Να δείξετε ότι ο όγκος V του κουτιού εκφράζεται ως συνάρτηση του x με τον τύπο $V(x)=4x^3-26x^2+40x$.

Μονάδες 6

β) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει το x στο πλαίσιο του προβλήματος.

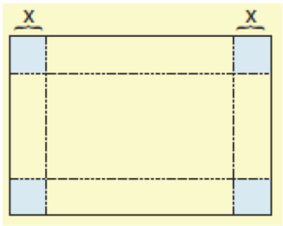
Μονάδες 5

γ) Να βρείτε τις διαστάσεις (εκφρασμένες σε dm με ακέραιους αριθμούς) του κουτιού αν γνωρίζουμε ότι ο όγκος του είναι 8dm^3.

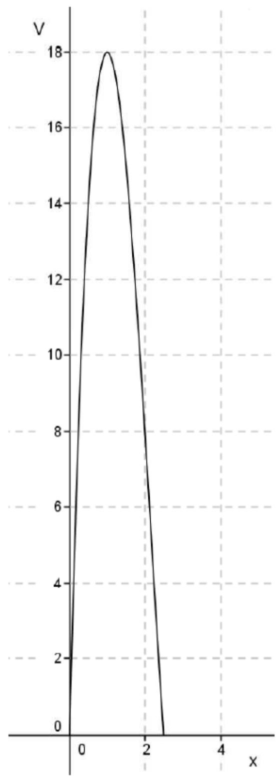
Μονάδες 7

δ) Στο σχ.2 δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $V(x)=4x^3-26x^2+40x$ για $x\in(0,2,5)$. Χρησιμοποιώντας το σχήμα να βρείτε ποιος είναι ο μεγαλύτερος όγκος που μπορεί να έχει το κουτί. Στη συνέχεια να υπολογίσετε αλγεβρικά τις διαστάσεις του κουτιού με το μεγαλύτερο όγκο.

Μονάδες 7



Σχήμα 1



Σχήμα 2

ΛΥΣΗ

α) Ο όγκος του κουτιού είναι: (εμβαδόν βάσης x ύψος). Η βάση είναι ορθογώνιο με πλευρές $5-2x, 8-2x$ επομένως το εμβαδόν της είναι:

$$(5-2x)\cdot(8-2x)$$

Το ύψος του κουτιού είναι x, άρα

$$\begin{aligned} V(x) &= x\cdot(5-2x)\cdot(8-2x) \\ &= x\cdot\left(40-10x-16x+4x^2\right) \\ &= 4x^3-26x+40x \end{aligned}$$

β) Πρέπει:

$$\begin{cases} 5-2x>0 \Leftrightarrow x<\dfrac{5}{2} \\ 8-2x>0 \Leftrightarrow x<4 \\ x>0 \Leftrightarrow x>0 \end{cases} \text{ Άρα } x\in\left(0,\frac{5}{2}\right)$$

γ) Έχουμε,

$$V(x)=8 \Leftrightarrow 4x^3-26x+40x=8 \Leftrightarrow 4x^3-26x+40x-8=0$$

4	-26	40	-8	2
↓	8	-36	8	
4	-24	-8	0	

$$(x-2)\cdot(4x^2-18x+4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \text{ή} \\ 4x^2-18x+4=0 \Leftrightarrow 2x^2-9x+2=0 \end{cases}$$

$$x=\frac{9+\sqrt{65}}{4} \text{, απορρίπτεται ή}$$
$$x=\frac{9-\sqrt{65}}{4} \text{, απορρίπτεται}$$

Άρα οι διαστάσεις του κουτιού είναι:

$$1dm, 4dm, 2dm$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ8 (4_22777)

Στο σχήμα φαίνονται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=-x^3-x^2$ και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(0,1)$ και $B(1,-2)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας.

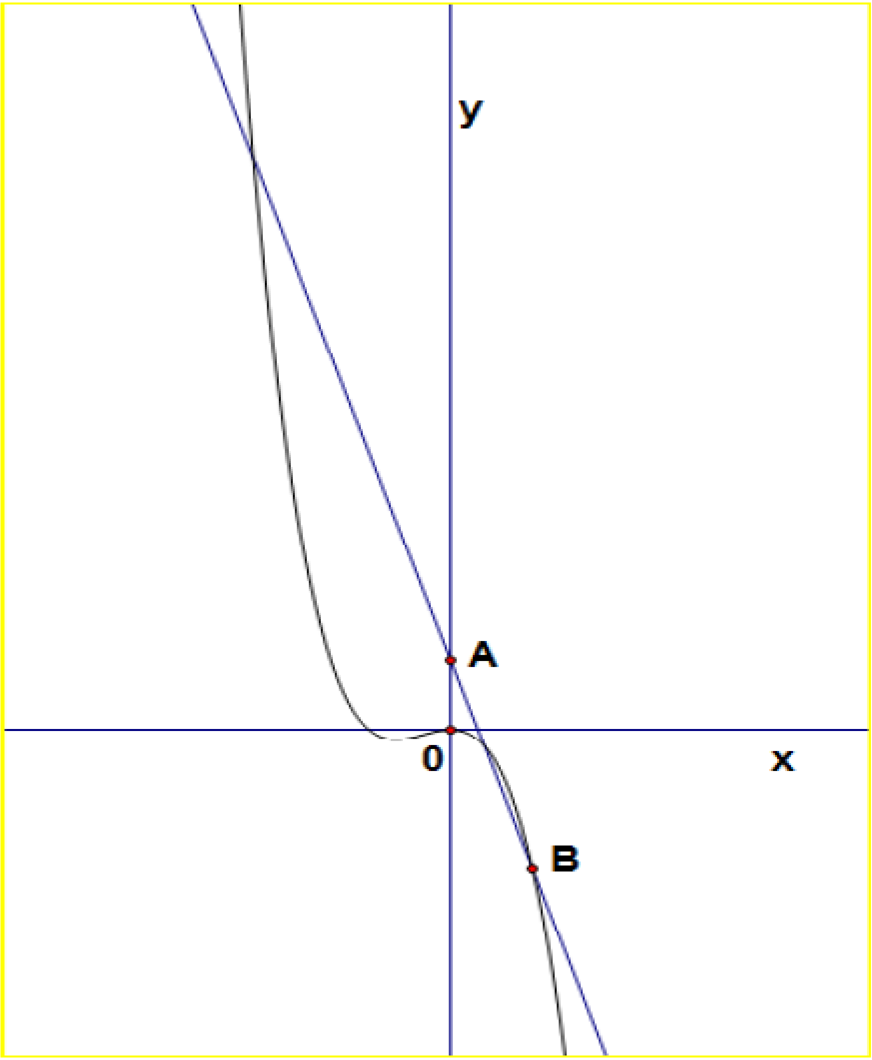
Μονάδες 7

β) Αν η ευθεία έχει εξίσωση $y=-3x+1$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας με τη γραφική παράσταση της f.

Μονάδες 9

γ) Να λύσετε την ανίσωση $-x^3-x^2<-3x+1$.

Μονάδες 9



ΛΥΣΗ

α) Έστω $y=\alpha x+\beta$ η ζητούμενη εξίσωση ευθείας. Το σημείο $A(0,1)$ ανήκει στην (ε), άρα: $1=\alpha\cdot 0\cdot\beta \Leftrightarrow \boxed{\beta=1}$

Το σημείο $B(1,-2)$ ανήκει στην (ε) άρα : $-2=\alpha\cdot 1+\beta \Leftrightarrow -2=\alpha+\beta$ και επειδή $\beta=1$ άρα $\alpha=-3$, οπότε η ζητούμενη εξίσωση ευθείας είναι η $\boxed{y=-3x+1}$

β) Η λύση της εξίσωσης $f(x)=y$ όπου $f(x)=-x^3-x^2$ και $y=-3x+1$ θα μας δώσουν τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία (ε).

$$-x^3-x^2=-3x+1 \Leftrightarrow x^3+x^2-3x+1=0 \quad (1)$$

Πιθανές ακέραιες ρίζες: $+1,\ -1$

1	1	-3	1	1
$\downarrow$	1	2	-1	
1	2	-1	0	

Άρα η (1) γίνεται:

$$(x-1)\cdot(x^2+2x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \text{ή} \\ x^2+2x-1=0, \quad \Delta=8 \quad x=\dfrac{-2\pm 2\sqrt{2}}{2} \begin{cases} x=-1+\sqrt{2} \\ x=-1-\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$$

Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι:

$$A(1,-2)\ ,\ B\left(-1+\sqrt{2},4-2\sqrt{2}\right) \text{ και } \Gamma=\left(-1-\sqrt{2},4+3\sqrt{2}\right)$$

γ) Έχουμε,

$$-x^3-x^2<-3x+1 \Leftrightarrow x^3+x^2-3x+1>0 \Leftrightarrow \boxed{(x-1)\cdot(x^2+2x-1)>0}$$

x	$-\infty$ $\quad -1-\sqrt{2}$	$-1+\sqrt{2}$	1	$+\infty$
$x-1$	-	-	-	+
x^2+2x-1	+	-	+	+
$(x-1)(x^2+2x-1)$	-	+	-	+

$$x\in\left(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2}\right)\cup(1,+\infty)$$

§4.4 - Εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

«ΘΕΜΑ Δ»

ΑΣΚΗΣΗ Δ1 (4_22766)

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(\kappa^2-1)x^4+\frac{1}{2}(\kappa+1)x^3+(\kappa-1)x^2-3\kappa x+\lambda$, $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των κ και λ αν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι 3ου βαθμού και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$ είναι ίσο με -4

Μονάδες 7

β) Για $\kappa=1$ και $\lambda=-2$

i. Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-1$

Μονάδες 5

ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(x)+4=x^2-1$

Μονάδες 7

iii. Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{P(x)}{(x-1)^2(x+2)}\geq 1$

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

α) Το πολυώνυμο $P(x)$ είναι 3ου βαθμού, οπότε θα πρέπει

$$\{\kappa^2-1=0 \ \text{ και } \ \kappa+1\neq 0\}\Leftrightarrow$$
$$\{\kappa^2=1 \ \text{ και } \ \kappa\neq -1\}\Leftrightarrow$$
$$\{\kappa=\pm 1 \ \text{ και } \ \kappa\neq -1\}\Leftrightarrow$$
$$\kappa=1$$

άρα

$$P(x)=x^3-3x+\lambda \ , \ \lambda\in\mathbb{R}$$

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι, το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-\rho$ είναι το $P(\rho)$, οπότε θα πρέπει $P(1)=-4$.

Όμως,

$$P(1)=1-3+\lambda=\lambda-2.$$

πρέπει

$$\lambda-2=-4\Leftrightarrow\lambda=-2$$

Για τις τιμές $\kappa=1$ και $\lambda=-2$ προκύπτει η μορφή του πολυωνύμου

$$P(x)=x^3-3x-2$$

β) i. Κάνουμε τη διαίρεση $P(x):(x-1)$

$$\begin{array}{cccc|c}
x^3 & & -3x & -2 & x-1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & & & x^2+x-2 \\ \cline{1-4}
 & x^2 & -3x & -2 & \\
 & -x^2 & +x & & \\ \cline{1-4}
 & & -2x & -2 & \\
 & & 2x & -2 & \\ \cline{3-4}
 & & & -4 &
\end{array}$$

Οπότε η ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης είναι

$$P(x)=(x-1)\left(x^2+x-2\right)-4 \quad (1)$$

ii. Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι

$$P(x)+4=(x-1)\left(x^2+x-2\right)\Leftrightarrow$$
$$x^2-1=(x-1)\left(x^2+x-2\right)\Leftrightarrow$$
$$(x-1)(x+1)=(x-1)\left(x^2+x-2\right)\Leftrightarrow$$
$$(x-1)(x+1)-(x-1)\left(x^2+x-2\right)=0\Leftrightarrow$$
$$(x-1)\left[x+1-\left(x^2+x-2\right)\right]=0\Leftrightarrow$$
$$(x-1)\left(x+1-x^2-x+2\right)=0\Leftrightarrow$$
$$(x-1)\left(-x^2+3\right)=0\Leftrightarrow$$
$$\left\{x-1=0 \text{ ή } -x^2+3=0\right\}\Leftrightarrow$$
$$x=1 \text{ ή } x=\pm\sqrt{3}$$

iii. Για να ορίζεται η παράσταση $\dfrac{P(x)}{(x-1)^2(x+2)}$, θα πρέπει

$$(x-1)^2(x+2)\neq 0$$

ή ισοδύναμα

$$\left\{(x-1)^2\neq 0 \text{ και } x+2\neq 0\right\}\Leftrightarrow$$
$$\left\{x-1\neq 0 \text{ και } x+2\neq 0\right\}\Leftrightarrow$$
$$x\neq 1 \text{ και } x\neq -2 \quad (2)$$

Έχουμε,

$$\frac{P(x)}{(x-1)^2(x+2)}\geq 1\Leftrightarrow$$
$$\frac{(x-1)\left(x^2+x-2\right)-4}{(x-1)^2(x+2)}\geq 1\Leftrightarrow$$

$$\frac{(x-1)(x^2+x-2)-4}{(x-1)^2(x+2)}-1\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\frac{(x-1)(x^2+x-2)-4}{(x-1)^2(x+2)}-1\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\frac{(x-1)(x^2+x-2)-4}{(x-1)^2(x+2)}-\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x+2)}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\frac{(x-1)(x^2+x-2)-4-(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x+2)}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\frac{(x-1)\left[(x^2+x-2)-(x-1)(x+2)\right]-4}{(x-1)^2(x+2)}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\frac{(x-1)(x^2+x-2-x^2+x-2x+2)-4}{(x-1)^2(x+2)}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\frac{(x-1)\cdot 0-4}{(x-1)^2(x+2)}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\frac{-4}{(x-1)^2(x+2)}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\frac{4}{(x-1)^2(x+2)}\leq 0 \underset{(x-1)^2>0}{\overset{4>0}{\Leftrightarrow}}$$

$$x+2\leq 0$$

Λόγω των περιορισμών (2), έχουμε τελικά ότι

$$\frac{P(x)}{(x-1)^2(x+2)}\geq 1\Leftrightarrow x<-2$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ2 (4_22769)

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+\alpha x^2+\beta x+2$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

α) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το $x+1$ είναι ίσο με -6, να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

Μονάδες 7

β) Αν $\alpha=-5$ και $\beta=1$, να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$

Μονάδες 8

γ) Να λύσετε την εξίσωση $2\sigma\upsilon\nu^3\omega+5\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu\omega-3=0$

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-2$, άρα

$$P(2)=0$$

Όμως,

$$P(2)=16+4\alpha+2\beta+2=18+4\alpha+2\beta$$

Άρα θα πρέπει

$$18+4\alpha+2\beta=0 \Leftrightarrow 2\alpha+\beta=-9$$

Επειδή τώρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x+1$ είναι ίσο με -6, θα έχουμε ότι

$$P(-1)=-6$$

Όμως,

$$P(-1)=-2+\alpha-\beta+2=\alpha-\beta$$

Άρα θα πρέπει

$$\alpha-\beta=-6$$

Οπότε προκύπτει το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta=-9 \\ \alpha-\beta=-6 \ (1) \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις αυτές παίρνουμε

$$2\alpha+\beta+\alpha-\beta=-9-6 \Rightarrow 3\alpha=-15 \Rightarrow \alpha=-5$$

Για $\alpha=-5$ η σχέση (1) δίνει

$$-5-\beta=-6 \Rightarrow \beta=1$$

Βρήκαμε, λοιπόν, ότι

$$\alpha=-5, \beta=1$$

και άρα

$$P(x)=2x^3-5x^2+x+2$$

β) Έχουμε,

$$P(x)=0 \Leftrightarrow 2x^3-5x^2+x+2=0$$

Κάνουμε σχήμα Horner με το 2:

2	-5	1	2	2
↓	4	-2	-2	
2	-1	-1	0	

Οπότε, η ταυτότητα της διαίρεσης δίνει:

$$2x^3-5x^2+x+2=(x-2)(2x^2-x-1)$$

Άρα,

$$2x^3-5x^2+x+2=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)(2x^2-x-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\{x-2=0 \text{ ή } 2x^2-x-1=0\} \Leftrightarrow$$

$$\{x=2 \text{ ή } 2x^2-x-1=0\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ x=2 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-\frac{1}{2} \right\} \ (2),$$

διότι το τριώνυμο $2x^2-x-1$ έχει διακρίνουσα $\Delta=9>0$ και ρίζες

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{4}=\begin{cases}\dfrac{1+3}{4}=1\\[2mm] \dfrac{1-3}{4}=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Συμπέρασμα:

$$P(x)=0\Leftrightarrow\left\{x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=-\frac{1}{2}\right\}$$

γ) Χρησιμοποιώντας τη γνωστή σχέση $\eta\mu^2\omega=1-\sigma\upsilon\nu^2\omega$ έχουμε διαδοχικά:

$$2\sigma\upsilon\nu^3\omega+5\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu\omega-3=0\Leftrightarrow$$

$$2\sigma\upsilon\nu^3\omega+5\left(1-\sigma\upsilon\nu^2\omega\right)+\sigma\upsilon\nu\omega-3=0\Leftrightarrow$$

$$2\sigma\upsilon\nu^3\omega+5-5\sigma\upsilon\nu^2\omega+\sigma\upsilon\nu\omega-3=0\Leftrightarrow$$

$$2\sigma\upsilon\nu^3\omega-5\sigma\upsilon\nu^2\omega+\sigma\upsilon\nu\omega+2=0\Leftrightarrow$$

$$P(\sigma\upsilon\nu\omega)=0\overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$\left\{\sigma\upsilon\nu\omega=1 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\omega=2 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\omega=-\frac{1}{2}\right\}$$

- Η περίπτωση $\sigma\upsilon\nu\omega=2$ απορρίπτεται, διότι γενικά ισχύει $|\sigma\upsilon\nu\omega|\le 1$
- $\sigma\upsilon\nu\omega=1\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\omega=\sigma\upsilon\nu 0\Leftrightarrow\omega=2\kappa\pi,\kappa\in\mathbb{Z}$
- $\sigma\upsilon\nu\omega=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\omega=-\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\omega=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow$

  $\sigma\upsilon\nu\omega=\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\Leftrightarrow\omega=2\lambda\pi\pm\dfrac{2\pi}{3},\lambda\in\mathbb{Z}$

Συμπέρασμα:

$$\left\{\ 2\sigma\upsilon\nu^3\omega+5\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu\omega-3=0\Leftrightarrow\omega=2\kappa\pi,\kappa\in\mathbb{Z} \text{ ή } \omega=2\lambda\pi\pm\frac{2\pi}{3},\lambda\in\mathbb{Z}\ \right\}$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ3 (4_22772)

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4-x^3+\kappa x^2+x+\lambda$ με $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις τιμές των $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ όταν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και παράγοντα το $x+2$

Μονάδες 7

β) Για $\kappa=-7$ και $\lambda=6$, να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$

Μονάδες 9

γ) Για $\kappa=-7$ και $\lambda=6$, να λυθεί η ανίσωση $\dfrac{P(x)}{x-5}\ge 0$

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Αφού το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το 1, θα έχουμε ότι $P(1)=0$

Όμως,

$$P(1)=1^4-1^3+\kappa\cdot 1^2+1+\lambda=\kappa+1+\lambda$$

Άρα θα πρέπει

$$\kappa+1+\lambda=0 \Leftrightarrow \kappa+\lambda=-1$$

Αφού το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x+2$, θα έχουμε ότι

$$P(-2)=0$$

Όμως,

$$P(-2)=(-2)^4-(-2)^3+\kappa\cdot(-2)^2-2+\lambda=16+8+4\kappa-2+\lambda=22+4\kappa+\lambda$$

Άρα θα πρέπει

$$22+4\kappa+\lambda=0 \Leftrightarrow 4\kappa+\lambda=-22$$

Οπότε προκύπτει το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} \kappa+\lambda=-1 \quad (1) \\ 4\kappa+\lambda=-22 \end{cases}$$

Αφαιρώντας τις δύο αυτές σχέσεις κατά μέλη, παίρνουμε:

$$\kappa+\lambda-(4\kappa+\lambda)=-1-(-22) \Leftrightarrow -3\kappa=21 \Leftrightarrow \kappa=-7$$

Για $\kappa=-7$ η σχέση (1) δίνει

$$-7+\lambda=-1 \Rightarrow \lambda=6$$

β) Για $\kappa=-7$, $\lambda=6$ προκύπτει

$$P(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$$

Κάνουμε σχήμα Horner για το $P(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$ με το 1:

1	-1	-7	1	6	1
↓	1	0	-7	-6	
1	0	-7	-6	0	

Οπότε, η ταυτότητα της διαίρεσης δίνει:

$$x^4-x^3-7x^2+x+6=(x-1)(x^3-7x-6) \quad (2)$$

Κάνουμε σχήμα Horner για το x^3-7x-6 με το -2:

1	0	-7	-6	-2
↓	-2	4	6	
1	-2	-3	0	

Οπότε, η ταυτότητα της διαίρεσης δίνει:

$$x^3-7x-6=(x+2)(x^2-2x-3) \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) , (3) προκύπτει ότι

$$P(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6=(x-1)(x+2)(x^2-2x-3) \quad (4)$$

Οπότε,

$$P(x)=0 \Leftrightarrow$$
$$x^4-x^3-7x^2+x+6=0 \Leftrightarrow$$
$$(x-1)(x+2)(x^2-2x-3)=0 \Leftrightarrow$$
$$\{x-1=0 \text{ ή } x+2=0 \text{ ή } x^2-2x-3=0\} \Leftrightarrow$$
$$\{x=1 \text{ ή } x=-2 \text{ ή } x^2-2x-3=0\} \Leftrightarrow$$
$$\{x=1 \text{ ή } x=-2 \text{ ή } x=3 \text{ ή } x=-1\},$$

διότι το τριώνυμο x^2-2x-3 έχει διακρίνουσα $\Delta=16>0$ και ρίζες

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}=\begin{cases}\dfrac{2+4}{2}=3\\[2mm] \dfrac{2-4}{2}=-1\end{cases}$$

Συμπέρασμα:

$$P(x)=0 \Leftrightarrow \{x=1 \text{ ή } x=-2 \text{ ή } x=3 \text{ ή } x=-1\}$$

γ) Για να ορίζεται η παράσταση $\dfrac{P(x)}{x-5}$ θα πρέπει

$$x-5\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 5$$

Έχουμε,

$$\frac{P(x)}{x-5}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$P(x)\cdot(x-5)\geq 0 \overset{(4)}{\Leftrightarrow}$$
$$(x-1)(x+2)(x^2-2x-3)(x-5)\geq 0$$

Σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών

	-2	−1	1	3	5	
$x-1$	−	−	−	+	+	+
$x+2$	−	+	+	+	+	+
x^2-2x-3	+	+	−	−	+	+
$x-5$	−	−	−	−	−	+
$(x-1)(x+2)(x^2-2x-3)(x-5)$	−	+	−	+	−	+

Οπότε,

$$\frac{P(x)}{x-5}\geq 0 \Leftrightarrow -2\leq x\leq -1 \text{ ή } 1\leq x\leq 3 \text{ ή } x\geq 5$$

Λαμβάνοντας όμως υπόψη τον περιορισμό $x\neq 5$, προκύπτει το τελικό συμπέρασμα

$$\frac{P(x)}{x-5}\geq 0\Leftrightarrow -2\leq x\leq -1 \text{ ή } 1\leq x\leq 3 \text{ ή } x>5$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ4 (4_22773)

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2-7x+\alpha+5$, για το οποίο γνωρίζουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το x είναι ίσο με 6 και ότι έχει ρίζα το 1.

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β

Μονάδες 8

β) Για $\alpha=1$ και $\beta=0$, να λύσετε

i. την ανίσωση $P(x)\geq 0$

Μονάδες 8

ii. την εξίσωση $\sqrt{P(x)}=x-1$

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Επειδή ότι το υπόλοιπο της διαίρεσής του πολυωνύμου $P(x)$ με το x είναι ίσο με 6, προκύπτει ότι

$$P(0)=6$$

Όμως,

$$P(0)=\alpha\cdot 0^3+\beta\cdot 0^2-7\cdot 0+\alpha+5=\alpha+5$$

Άρα θα πρέπει

$$\alpha+5=6\Leftrightarrow \alpha=1$$

Επειδή το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το 1, προκύπτει ότι

$$P(1)=0$$

Όμως,

$$P(1)=\alpha\cdot 1^3+\beta\cdot 1^2-7\cdot 1+\alpha+5=\alpha+\beta-7+\alpha+5=2\alpha+\beta-2\overset{\alpha=1}{=}\beta$$

Άρα θα πρέπει $\beta=0$

β) i. Για $\alpha=1$, $\beta=0$ προκύπτει ότι

$$P(x)=x^3-7x+6$$

Κάνουμε σχήμα Horner για το x^3-7x+6 με το 1:

1	0	-7	6	1
↓	1	1	-6	
1	1	-6	0	

Οπότε, η ταυτότητα της διαίρεσης δίνει:

$$P(x)=x^3-7x+6=(x-1)(x^2+x-6)\quad (1)$$

το τριώνυμο x^2+x-6 έχει διακρίνουσα $\Delta=25>0$ και ρίζες

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}=\begin{cases}\dfrac{-1+5}{2}=2\\[2mm]\dfrac{-1-5}{2}=-3\end{cases}$$

Σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών

	-3	1	2	
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
x^2+x-6	$+$	$-$	$-$	$+$
$(x-1)(x^2+x-6)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Οπότε,

$$P(x)\geq 0\Leftrightarrow(x-1)(x^2+x-6)\Leftrightarrow -3\leq x\leq 1 \text{ ή } x\geq 2$$

ii. Η εξίσωση ορίζεται για τις τιμές του x για τις οποίες

$$P(x)\geq 0$$

δηλαδή προκύπτει ο περιορισμός

$$-3\leq x\leq 1 \text{ ή } x\geq 2 \quad (2) \quad (\text{λόγω i ερωτήματος})$$

Υψώνουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης στο τετράγωνο

$$\sqrt{P(x)}^2=(x-1)^2\Rightarrow$$

$$P(x)=(x-1)^2\overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$(x-1)(x^2+x-6)=(x-1)^2\Rightarrow$$

$$(x-1)(x^2+x-6)-(x-1)^2=0\Rightarrow$$

$$(x-1)(x^2+x-6-(x-1))=0\Rightarrow$$

$$(x-1)(x^2+x-6-x+1)=0\Rightarrow$$

$$(x-1)(x^2-5)=0\Rightarrow$$

$$\{x-1=0 \text{ ή } x^2-5=0\}\Rightarrow$$

$$\{x=1 \text{ ή } x^2=5\}\Rightarrow$$

$$x=1 \text{ ή } x=\pm\sqrt{5}$$

Τώρα, λόγω του περιορισμού (2), δεκτές είναι μόνο οι τιμές

$$x=1 \text{ ή } x=\sqrt{5}$$

Προσοχή: *Πρέπει να επαληθεύσουμε τις ρίζες που βρήκαμε στην αρχική εξίσωση, διότι τα βήματα επίλυσης της ζητούμενης εξίσωσης δεν ήταν ισοδύναμα!*

- $\sqrt{P(\sqrt{5})}=\sqrt{\sqrt{5}^3-7\sqrt{5}+6}=\sqrt{5\sqrt{5}-7\sqrt{5}+6}=\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}=\sqrt{5}-1$

δηλαδή η ρίζα $x=\sqrt{5}$ είναι δεκτή

- Εύκολα διαπιστώνουμε ότι και η ρίζα $x=1$ επαληθεύει την αρχική εξίσωση

Συμπερασματικά έχουμε ότι

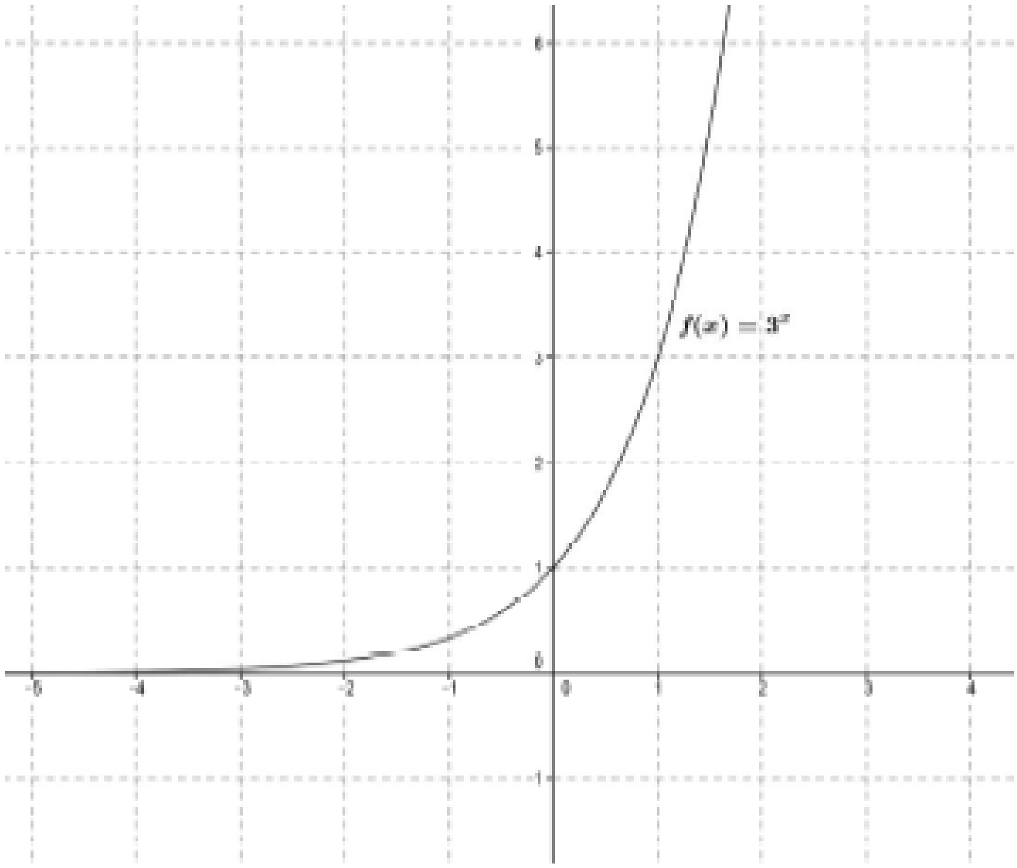
$$\sqrt{P(x)}=x-1\Leftrightarrow\left\{x=1 \text{ ή } x=\sqrt{5}\right\}$$

§5.1 - Εκθετική συνάρτηση – νόμος εκθετικής μεταβολής

«ΘΕΜΑ Β»

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (2_22630)

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=3^x$ με $x\in\mathbb{R}$.



α) Στο ίδιο σύστημα να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: $g(x)=3^x+1$ και $h(x)=3^x-1$, μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

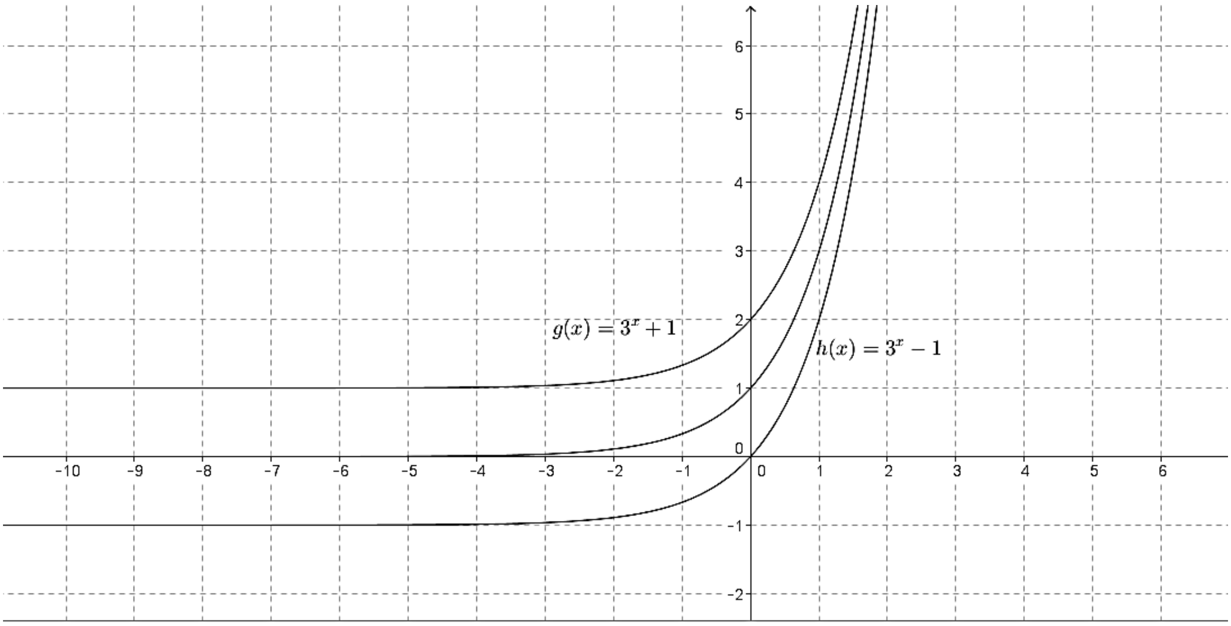
Μονάδες 12

β) Ποια είναι η ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g και ποια της γραφικής παράστασης της h;

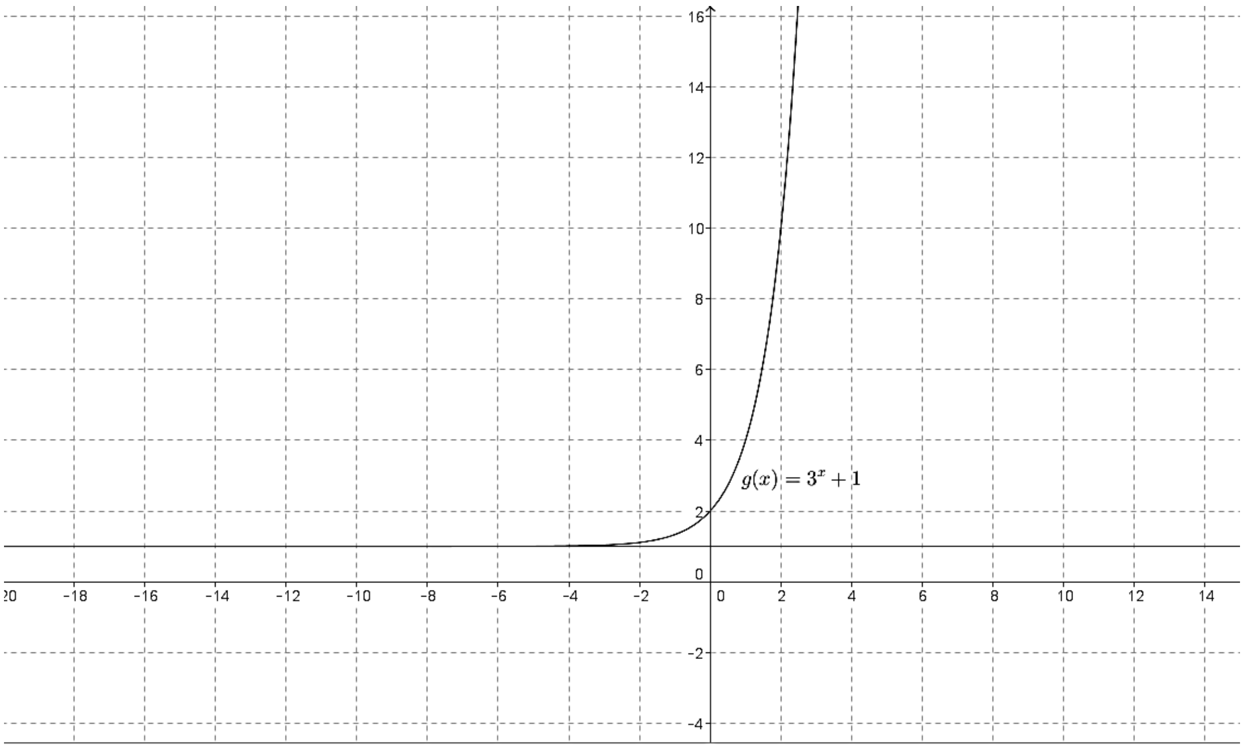
Μονάδες 13

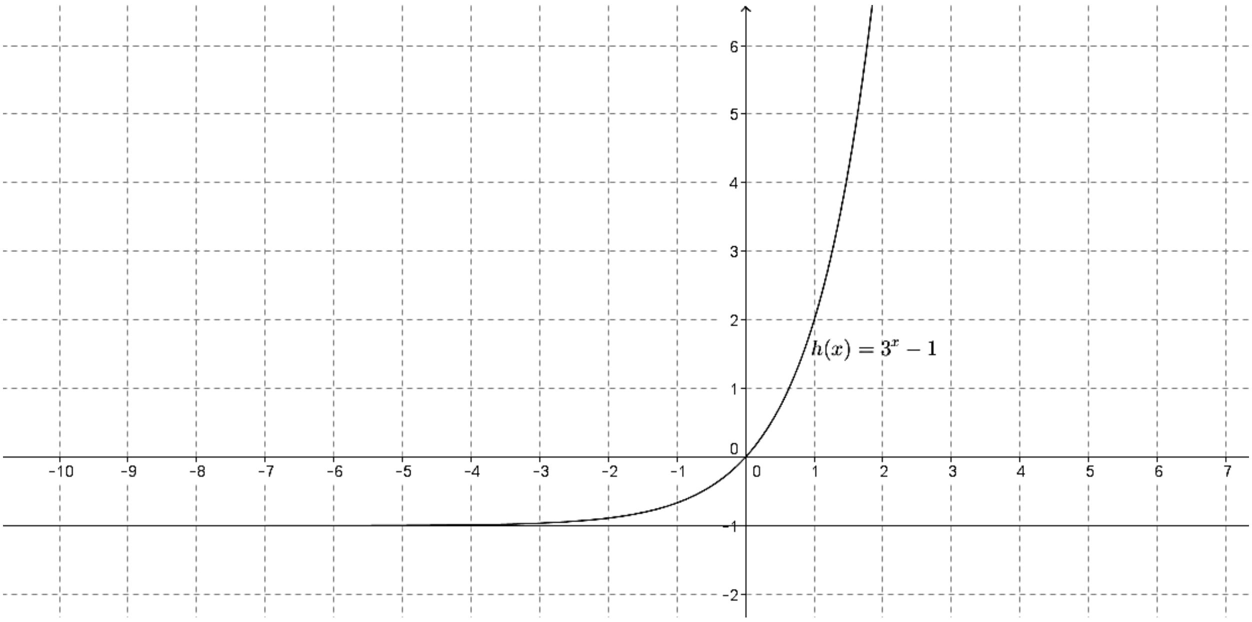
ΛΥΣΗ

α) Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με μια κατακόρυφη μετατόπιση κατά μια μονάδα προ τα πάνω, ενώ η γραφική παράσταση της h προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με μια κατακόρυφη μετατόπιση κατά μια μονάδα προς τα κάτω.



β) Η ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g είναι η ευθεία $x = 1$, ενώ η γραφική παράσταση της h είναι η ευθεία $x = -1$.





ΑΣΚΗΣΗ Β2 (2_22633)

Δίνεται συνάρτηση $\alpha^x : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ με $\alpha^{38} < \alpha^{24}$, $\alpha \in (0,1) \bigcup (1,+\infty)$

α) Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης $f(x) = \alpha^x$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Μονάδες 13

β) Να λύσετε την ανίσωση $2^{x-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+5}$.

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Η μονοτονία της εκθετικής συνάρτησης $y = \alpha^x$ εξαρτάται από την βάση του θετικού αριθμού α.

Έχουμε,

$$\alpha^{38} < \alpha^{24} \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \frac{\alpha^{38}}{\alpha^{24}} < \frac{\alpha^{24}}{\alpha^{24}} \Leftrightarrow \alpha^{14} < 1 \Leftrightarrow \sqrt[14]{\alpha^{14}} < \sqrt[14]{1} \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} 0 < \alpha < 1$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Έχουμε,

$$2^{x-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+5} \Leftrightarrow 2^{x-1} < \left(2^{-1}\right)^{(3x+5)} \Leftrightarrow 2^{x-1} < 2^{-(3x+5)} \underset{\text{γν.αύξουσα}}{\overset{y=2^x}{\Leftrightarrow}} x-1 < -3x-5 \Leftrightarrow x < -1$$

«ΘΕΜΑ Δ»

ΑΣΚΗΣΗ Δ1 (4_22787)

Όταν ένας ασθενής παίρνει μια δόση ενός φαρμάκου, τότε ο οργανισμός του το μεταβολίζει έτσι ώστε η ποσότητά του να μειώνεται σύμφωνα με τη συνάρτηση $f(t)=q_0\alpha^t$, $t\geq 0$, όπου t ο χρόνος (σε ημέρες), $f(t)$ η ποσότητα του φαρμάκου (σε mg) και οι αριθμοί α, q_0 είναι κατάλληλες θετικές σταθερές.

α) Να εξηγήσετε τι παριστάνει η σταθερά q_0 στο πλαίσιο του προβλήματος και να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει $0<\alpha<1$.

Μονάδες 6

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία ημέρα μετά τη λήψη του φαρμάκου, η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενούς έχει υποδιπλασιαστεί.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha=\dfrac{1}{2}$.

Μονάδες 6

ii. Να μεταφέρετε στη κόλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f , εκφράζοντας τις τιμές $f(t)$ συναρτήσει της αρχικής τιμής q_0 .

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(t)$	q_0	$\frac{q_0}{2}$							

Μονάδες 4

γ) Υποθέτουμε τώρα ότι $\alpha=\dfrac{1}{2}$ και ότι η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό στο τέλος της $4^{ης}$ ημέρας είναι 25 mg.

i. Να υπολογίσετε την ποσότητα της δόσης που πήρε ο ασθενής.

Μονάδες 5

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0,6]$.

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ

α) Η σταθερά q_0 παριστάνει τη αρχική ποσότητα του φαρμάκου που πήρε ο ασθενής πριν αρχίσει ο οργανισμός του να μεταβολίζει. Η συνάρτηση $f(t)=q_0\alpha^t$ είναι γνησίως φθίνουσα διότι η αρχική ποσότητα κάθε μέρα που περνά μειώνεται επομένως εφόσον $q_0>0$ άρα $0<\alpha<1$

$$t_1<t_2 \Leftrightarrow f(t_1)>f(t_2) \Leftrightarrow \alpha^{t_1}>\alpha^{t_2}$$

β) i) Ισχύει $q_0>0$ (από υπόθεση) άρα επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα

$$f(1)=\frac{1}{2}f(0) \Leftrightarrow q_0\cdot\alpha^1=\frac{1}{2}q_0 \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{2}$$

ii)

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(t)$	q_0	$\frac{q_0}{2}$	$\frac{q_0}{4}$	$\frac{q_0}{8}$	$\frac{q_0}{16}$	$\frac{q_0}{32}$	$\frac{q_0}{64}$	$\frac{q_0}{128}$	$\frac{q_0}{236}$

γ) i)

$$f(t) = q_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

Ισχύει:

$$f(4) = 25 \Leftrightarrow q_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 25 \Leftrightarrow q_0 = 400\text{mg}$$

ii) Η γραφική παράσταση είναι:

ΑΣΚΗΣΗ Δ2 (4_22790)

Σε μια περιοχή της ευρωπαϊκής ένωσης λόγω των μέτρων που πάρθηκαν ο πληθυσμός των αγροτών (σε χιλιάδες) μειώνεται σύμφωνα με τον νόμο της εκθετικής μεταβολής ($Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct}$).

Ο αρχικός πληθυσμός ήταν 8 χιλιάδες αγρότες και μετά από δύο χρόνια έμεινε ο μισός.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση που δίνει τον πληθυσμό των αγροτών μετά από t χρόνια

είναι: $$Q(t) = 8 \cdot e^{-\frac{t}{2}\ln 2}$$

Μονάδες 10

β) Ποιος θα είναι ο πληθυσμός των αγροτών ύστερα από τέσσερα χρόνια; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 6

γ) Πόσος χρόνος θα έχει περάσει όταν ο αγροτικός πληθυσμός της περιοχής θα έχει μειωθεί στους χίλιους αγρότες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Αφού ο αρχικός πληθυσμός (t=0) ήταν 8 χιλιάδες αγρότες, θα έχουμε:

$$Q(0)=8 \Rightarrow Q_0 \cdot e^0 = 8 \Rightarrow Q_0 = 8$$

και αφού μετά από δύο χρόνια έμεινε ο μισός, θα είναι:

$$Q(2)=4 \Rightarrow Q_0 \cdot e^{2c} = 4 \Rightarrow 8 \cdot e^{2c} = 4 \Rightarrow e^{2c} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2c = \ln\frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln 2^{-1} = -\frac{1}{2}\ln 2$$

επομένως:

$$Q(t) = 8 \cdot e^{-\frac{t}{2}\ln 2}$$

β) Ύστερα από τέσσερα χρόνια, ο πληθυσμός των αγροτών θα είναι

$$Q(4) = 8 \cdot e^{-\frac{4}{2}\ln 2} = 8 \cdot e^{-2\ln 2} = 8 \cdot (e^{\ln 2})^{-2} = 8 \cdot 2^{-2} = 8 \cdot \frac{1}{2^2} = 8 \cdot \frac{1}{4} = 2$$

δηλαδή θα είναι δύο χιλιάδες αγρότες.

γ) Αρκεί να λύσουμε την εξίσωση:

$$8 \cdot e^{-\frac{t}{2}\ln 2} = 1 \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{2}\ln 2} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{2}\ln 2} = 2^{-3} \Leftrightarrow \ln e^{-\frac{t}{2}\ln 2} = \ln 2^{-3} \Leftrightarrow -\frac{t}{2}\ln 2 = -3\ln 2 \Leftrightarrow t = 6$$

Επομένως θα έχουν περάσει (συνολικά) έξι χρόνια.

ΑΣΚΗΣΗ Δ3 (4_22791)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot 2^x + \beta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(2,13)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -5$ και $\beta = -7$.

Μονάδες 7

β) Να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα y′y.

Μονάδες 4

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 7

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(2^x - 31) < 3$.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

α) Αφού η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και

$B(2,13)$, θα έχουμε:

$$\begin{cases} f(1)=3 \\ f(2)=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\cdot 2+\beta=3 \\ \alpha\cdot 2^2+\beta=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta=3 \\ 4\alpha+\beta=13 \end{cases} \overset{-}{\Rightarrow} 2\alpha=10 \Leftrightarrow \alpha=5$$

Άρα

$$2\cdot 5+\beta=3 \Leftrightarrow \beta=-7$$

β) Το σημείο αυτό θα έχει τετμημένη μηδέν, άρα τεταγμένη $f(0)=\alpha+\beta=5-7=-2$, οπότε θα είναι το $(0,-2)$.

γ) Η συνάρτηση $g(x)=\alpha^x$ είναι γνησίως αύξουσα για $\alpha>1$. Έτσι, για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, είναι

$$2^{x_1}<2^{x_1} \Rightarrow 5\cdot 2^{x_1}<5\cdot 2^{x_2} \Rightarrow 5\cdot 2^{x_1}-7<5\cdot 2^{x_2}-7 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

δ) Αφού $f(1)=3$, έχουμε:

$$f(2^x-31)<3 \Leftrightarrow f(2^x-31)<f(1) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} 2^x-31<1 \Leftrightarrow 2^x<32 \Leftrightarrow 2^x<2^5 \overset{2>1}{\Leftrightarrow} x<5$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ4 (4_22794)

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+6,\ \ \alpha, \beta\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των α και β ώστε το πολυώνυμο $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x+1$ και η αριθμητική τιμή του για $x=2$ να είναι ίση με 12.

Μονάδες 7

β) Για $\alpha=-2$ και $\beta=-3$

i. Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-2$.

Μονάδες 5

ii.Να λύσετε την ανίσωση $P(x)<-x+14$

Μονάδες 7

iii. Να λύσετε την ανίσωση $P(\ln x)<-\ln x+14$.

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} P(-1)=0 \\ P(2)=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1+\alpha-\beta+6=0 \\ 8+4\alpha+2\beta+6=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-\beta=-5 \\ 4\alpha+2\beta=-2 \end{cases} \underset{:2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \alpha-\beta=-5 \\ 2\alpha+\beta=-1 \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} 3\alpha=-6 \Leftrightarrow \alpha=-2$$

και συνεπώς

$$-2-\beta=-5 \Leftrightarrow -\beta=-3 \Leftrightarrow \beta=3$$

β) i) Είναι:

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & -2x^2 & +3x & +6 & x-2 \\ \cline{5-5} -x^3 & +2x^2 & & & x^2+3 \\ \cline{1-4} & 0 & +3x & +6 & \\ & & -3x & +6 & \\ \cline{3-4} & & & +12 & \end{array}$$

Άρα:

$$P(x)=(x-2)(x^2+3)+12$$

ii) $P(x)<-x+14 \Leftrightarrow x^3-2x^2+3x+6<-x+14 \Leftrightarrow x^3-2x^2+4x-8<0 \Leftrightarrow$

$$x^2(x-2)+4(x-2)<0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+4)<0 \overset{x^2+4>0}{\Leftrightarrow} x-2<0 \Leftrightarrow x<2.$$

iii) Θέτοντας όπου $\ln x$ το y, η ανίσωση γίνεται $P(y)<-y+14$, η οποία, από το ερώτημα (ii) έχει λύση $y<2$. Επομένως,

$$\ln x<2 \Leftrightarrow \ln x<2\cdot 1 \Leftrightarrow \ln x<2\ln e \Leftrightarrow \ln x<\ln e^2 \overset{\ln x \nearrow}{\Leftrightarrow} x<e^2$$

ΑΣΚΗΣΗ Δ5 (4_22802)

Σε ένα ανοιχτό δοχείο υπάρχουν 10 lt ενός υγρού. Το υγρό εξατμίζεται έτσι ώστε ο όγκος του να μειώνεται κατά 15% ανά εβδομάδα.

α) Να βρείτε την ποσότητα του υγρού που υπάρχει στο δοχείο στο τέλος της $1^{ης}$ και στο τέλος της $2^{ης}$ εβδομάδας.

Μονάδες 8

β) Ο όγκος του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη συνάρτηση $V(t)=V_0\cdot \alpha^t$ όπου V_0 και α σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τους αριθμούς V_0 και α.

Μονάδες 8

γ) Να βρείτε πότε ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής. (Δίνεται ότι: $\log 5 \cong 0,7$ και $\log 85 \cong 1,93$)

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Αρχικά, στο ανοιχτό δοχείο υπάρχουν 10 lt ενός υγρού.

Αφού το υγρό εξατμίζεται έτσι ώστε ο όγκος του να μειώνεται κατά 15% ανά εβδομάδα, τότε στο τέλος της $1^{ης}$ εβδομάδας, θα υπάρχει στο δοχείο το 85% του αρχικού όγκου του, δηλαδή $85\%\cdot 10lt=\boxed{8,5lt}$.

Εφόσον, κατά τα δεδομένα του προβλήματος, η εξάτμιση συνεχίζεται και κατά την επόμενη εβδομάδα, στο τέλος της $2^{ης}$ εβδομάδας, θα υπάρχει στο δοχείο το 85% του όγκου του στο τέλος της $1^{ης}$ εβδομάδας, δηλαδή $85\%\cdot 8,5lt=\boxed{7,225lt}$.

β) Εφόσον, ο όγκος του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη συνάρτηση $V(t)=V_0\cdot\alpha^t$, τότε:

- $V(0)$ θα είναι ο αρχικός όγκος του υγρού, οπότε $V(0)=10\,lt$
- $V(1)$ θα είναι ο όγκος του υγρού μετά από 1 εβδομάδα, οπότε $V(1)=8,5\,lt$
- $V(2)$ θα είναι ο όγκος του υγρού μετά από 2 εβδομάδα, οπότε $V(2)=7,225\,lt$

Είναι $V(0)=10\,lt \Rightarrow V_0\cdot\alpha^0=10\,lt \Rightarrow \boxed{V_0=10\,lt}$

Επίσης, $V(1)=8,5\,lt \Rightarrow V_0\cdot\alpha^1=8,5\,lt \Rightarrow 10\,lt\cdot\alpha=8,5\,lt \Rightarrow \alpha=\frac{8,5}{10} \Rightarrow \boxed{\alpha=\frac{85}{100}}$

Επομένως, θα είναι $\boxed{V(t)=10\cdot\left(\frac{85}{100}\right)^t lt}$, $t\geq 0$

γ) Ψάχνουμε να βρούμε πότε ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής, δηλαδή, ψάχνουμε να βρούμε τιμή t_0, τέτοια ώστε μετά από t_0 εβδομάδες, ο όγκος $V(t_0)$ να είναι μικρότερος από 5lt.

Έχουμε, δηλαδή να λύσουμε την ανίσωση $V(t_0)<5\,lt$ με σύνολο ορισμού το $[0,+\infty)$.

Έτσι,

$$V(t_0)<5\,lt \Leftrightarrow$$

$$10\,lt\cdot\left(\frac{85}{100}\right)^t<5\,lt \overset{:10lt>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\left(\frac{85}{100}\right)^t<\frac{5}{10} \Leftrightarrow$$

$$\log\left(\frac{85}{100}\right)^t<\log\frac{5}{10} \Leftrightarrow$$

(αφού η συνάρτηση $\varphi(x)=\log x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, καθώς $10>1$)

$$t\cdot\log\left(\frac{85}{100}\right)<\log\frac{5}{10} \Leftrightarrow$$

$$t\cdot(\log 85-\log 100)<\log 5-\log 10 \Leftrightarrow$$

$$t\cdot(1,93-2)<0,7-1 \Leftrightarrow$$

$$t\cdot(-0,07)<-0,3 \overset{:(-0,07)<0}{\Leftrightarrow}$$

$$t>\frac{0,3}{0,07} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{t>\frac{30}{7}\cong 4,3}$$

Συμπέρασμα:

μετά από 4,3 περίπου εβδομάδες (αν η μεταβλητή του χρόνου t παίρνει συνεχείς τιμές) ή μετά από 5 εβδομάδες (αν η μεταβλητή του χρόνου t παίρνει διακριτές τιμές, ακέραια πολλαπλάσια της μιας εβδομάδας), ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής.

ΑΣΚΗΣΗ Δ6 (4_22805)

Σε ένα πείραμα εργαστηρίου, ο αριθμός των βακτηρίων δίνεται από τον τύπο

$$P(t) = 200 \cdot e^{ct},$$

όπου t ο χρόνος σε ώρες από την αρχή του πειράματος. Σε μία ώρα ο αριθμός των βακτηρίων ήταν 328.

(Δίνεται ότι: $\ln(1,64) \cong 0,5$ και $\ln 10 \cong 2,3$)

α) Να βρείτε τον αριθμό των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα.

Μονάδες 7

β) Να αποδείξετε ότι $c = \frac{1}{2}$.

Μονάδες 9

γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο αριθμός των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος από το δεκαπλάσιο και μικρότερος από το εκατονταπλάσιο της αρχικής του τιμής.

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Ο αριθμός των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα, δηλαδή 0 ώρες μετά την έναρξη του πειράματος, ισούται με το $P(0)$. Έτσι έχουμε:

$$P(0) = 200 \cdot e^{c \cdot 0} = 200 \cdot 1 = 200$$

Άρα, ο αριθμός των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα είναι $\boxed{P(0) = 200}$

β) Γνωρίζουμε ότι σε μία ώρα από την αρχή του πειράματος ο αριθμός των βακτηρίων ήταν 328, δηλαδή θα ισχύει:

$$P(1) = 328 \Rightarrow$$

$$200 \cdot e^{c \cdot 1} = 328 \Rightarrow$$

$$e^{c} = \frac{328}{200} \Rightarrow \text{ (εξ ορισμού συνάρτησης)}$$

$$\ln e^{c} = \ln \frac{328}{200} \Rightarrow$$

$$c = \ln(1,64) \Rightarrow$$

$$\boxed{c \cong \frac{1}{2}}$$

(εδώ υπάρχει μικρό πρόβλημα, αφού, ενώ η τιμή του λογαρίθμου είναι προσεγγιστική-στρογγυλοποιημένη, ζητείται ακριβής τιμή για την σταθερά c)

γ) Το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο αριθμός των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος από το δεκαπλάσιο και μικρότερος από το εκατονταπλάσιο της αρχικής του τιμής, είναι εκείνο το διάστημα του t που ικανοποιεί την ανίσωση

$10 \cdot P(0) < P(t) < 100 \cdot P(0)$ με σύνολο ορισμού το $[0, +\infty)$.

Έτσι,

$$10 \cdot P(0) < P(t) < 100 \cdot P(0) \Leftrightarrow$$

$$10 \cdot 200 < 200 \cdot e^{\frac{t}{2}} < 100 \cdot 200 \overset{:200>0}{\Leftrightarrow}$$

$$10 < e^{\frac{t}{2}} < 100 \Leftrightarrow$$

$$\ln 10 < \ln e^{\frac{t}{2}} < \ln 100 \Leftrightarrow$$

(αφού η συνάρτηση $k(x) = \ln x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, καθώς $e > 1$)

$$\ln 10 < \frac{t}{2} < \ln 10^2 \Leftrightarrow$$

$$\ln 10 < \frac{t}{2} < 2 \cdot \ln 10 \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot \ln 10 < t < 4 \cdot \ln 10 \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot 2,3 < t < 4 \cdot 2,3 \Leftrightarrow$$

$$4,6 < t < 9,2 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{t \in (4,6,\ 9,2)}$$

Συμπέρασμα: *το ζητούμενο διάστημα είναι μεταξύ 4,6 και 9,2 ωρών.*

ΑΣΚΗΣΗ Δ7 (4_22808)

Το φορτίο ενός πυκνωτή που εκφορτίζεται μειώνεται εκθετικά. Το φορτίο του πυκνωτή δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου (σε ms) από τον τύπο $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\lambda t}$, όπου Q_0 το αρχικό φορτίο του πυκνωτή (σε μCb).

α) Αν τη χρονική στιγμή $t = 2ms$ το φορτίο είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ της αρχικής του τιμής, να δείξετε ότι

$$\lambda = \ln 2.$$

Μονάδες 8

β) Αν τη χρονική στιγμή $t = 1ms$ το φορτίο είναι 60μCb, να αποδείξετε ότι

$$Q_0 = 120\mu Cb$$

Μονάδες 8

γ) Πότε το φορτίο του πυκνωτή γίνεται μικρότερο από 15μCb; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Αν τη χρονική στιγμή $t = 2ms$ το φορτίο είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ της αρχικής του τιμής, τότε θα ισχύει

$$Q(2) = \frac{1}{4} \cdot Q(0) \Rightarrow$$

$$Q_0 \cdot e^{-2\lambda} = \frac{1}{4} \cdot Q_0 \overset{:Q_0 > 0}{\Rightarrow}$$

$$e^{-2\lambda} = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{(εξ ορισμού συνάρτησης)}$$

$$\ln e^{-2\lambda} = \ln \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$-2\lambda = \ln 2^{-2} \Rightarrow$$

$$-2\lambda = -2\ln 2 \Rightarrow$$
$$\boxed{\lambda = \ln 2}$$

Επομένως, το φορτίο του πυκνωτή δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου (σε ms) από τον τύπο $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\ln 2 t}$ μCb, $t \geq 0$

β) Αν τη χρονική στιγμή $t = 1\text{ms}$ το φορτίο είναι 60μCb, τότε θα ισχύει

$$Q(1) = 60\mu Cb \Rightarrow$$
$$Q_0 \cdot e^{-\ln 2} = 60\mu Cb \Rightarrow$$
$$Q_0 \cdot e^{\ln\frac{1}{2}} = 60\mu Cb \Rightarrow$$
$$Q_0 \cdot \frac{1}{2} = 60\mu Cb \Rightarrow$$
$$Q_0 = 120\mu Cb$$

Επομένως, το φορτίο του πυκνωτή δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου (σε ms) από τον τύπο $\boxed{Q(t) = 120 \cdot e^{-t\ln 2}\ \mu Cb}$, $t \geq 0$

γ) Ψάχνουμε να βρούμε πότε το φορτίο του πυκνωτή γίνεται μικρότερο από 15μCb, δηλαδή, ψάχνουμε να βρούμε χρονική στιγμή t_0, τέτοια ώστε μετά από t_0 ms, το φορτίο του πυκνωτή γίνεται μικρότερο από 15μCb.

Έχουμε, δηλαδή να λύσουμε την ανίσωση $Q(t_0) < 15\mu Cb$ με σύνολο ορισμού το $[0, +\infty)$.

Έτσι,

$$Q(t_0) < 15\mu Cb \Leftrightarrow$$
$$120 \cdot e^{-t_0 \ln 2}\ \mu Cb < 15\mu Cb \Leftrightarrow$$
$$e^{-t_0 \ln 2} < \frac{15}{120} \Leftrightarrow$$
$$e^{-t_0 \ln 2} < \frac{1}{8} \Leftrightarrow$$
$$\ln e^{-t_0 \ln 2} < \ln\frac{1}{8} \Leftrightarrow$$

(αφού η συνάρτηση $k(x) = \ln x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, καθώς $e > 1$)

$$-t_0 \ln 2 < \ln 2^{-3} \Leftrightarrow$$
$$-t_0 \ln 2 < -3\ln 2 \overset{:(-\ln 2)<0}{\Leftrightarrow} \text{, καθώς } 2 > 1 \Rightarrow \ln 2 > 0$$
$$\boxed{t_0 > 3\text{ms}}$$

Συμπέρασμα: μετά από 3ms το φορτίο του πυκνωτή γίνεται μικρότερο από 15μCb.

ΑΣΚΗΣΗ Δ8 (4_22820)

Μια ποσότητα ραδιενεργού υλικού (σε κιλά) θάβεται και με την πάροδο του χρόνου *t* (σε έτη), μειώνεται ακολουθώντας το νόμο της εκθετικής μεταβολής $\left(Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct}\right)$.

α) Αν γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το $\frac{1}{3}$ της αρχικής ποσότητας, να δείξετε ότι $Q(t)=Q_0\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$

Μονάδες 10

β) Αν μετά από τέσσερα χρόνια η ποσότητα που έχει απομείνει είναι 1 κιλό, να βρείτε την αρχική ποσότητα που θάφτηκε.

Μονάδες 6

γ) Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια, η ποσότητα που θα έχει απομείνει θα είναι $\frac{1}{81}$ κιλά

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Αφού μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το $\frac{1}{3}$ της αρχικής ποσότητας, τότε:

$$Q(2)=\frac{1}{3}Q_0 \Leftrightarrow$$

$$Q_0e^{2c}=\frac{1}{3}Q_0 \Leftrightarrow$$

$$e^{2c}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$2c=\ln\frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$c=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$c=\ln\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$c=\ln\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Οπότε έχουμε:

$$Q(t)=Q_0\cdot e^{\mathrm{t}\ln\frac{1}{\sqrt{3}}} \Leftrightarrow$$

$$Q(t)=Q_0\cdot e^{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t} \Leftrightarrow$$

$$Q(t)=Q_0\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$$

β) Αφού μετά από τέσσερα χρόνια η ποσότητα που έχει απομείνει είναι 1 κιλό, τότε:

$$Q(4)=1\Leftrightarrow$$

$$Q_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 = 1 \Leftrightarrow$$

$$Q_0 \cdot \frac{1}{9} = 1 \Leftrightarrow$$

$$Q_0 = 9$$

Οπότε η αρχική ποσότητα του ραδιενεργού υλικού ήταν 9 κιλά.

γ) Αρκεί να βρούμε το t έτσι ώστε:

$$Q(t) = \frac{1}{81} \Leftrightarrow$$

$$9 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t = \frac{1}{81} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t = \frac{1}{729} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t = \left(\frac{1}{3}\right)^6 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{12} \Leftrightarrow$$

$$t = 12$$

Οπότε μετά από 12 χρόνια η ποσότητα που θα έχει απομείνει θα είναι $\frac{1}{81}$ κιλά.

§5.3 - Λογαριθμική συνάρτηση

«ΘΕΜΑ Β»

ΑΣΚΗΣΗ Β1 (2_22631)

α) Να λύσετε την εξίσωση: $\ln\left(x^2-8\right)=\ln 7x$

Μονάδες 13

β) Να λύσετε την ανίσωση: $\ln\left(x^2-8\right)\geq \ln 7x$

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Για να έχει νόημα η εξίσωση πρέπει:

$$x^2-8>0 \Leftrightarrow x^2>8 \Leftrightarrow |x|>2\sqrt{2} \Leftrightarrow x>2\sqrt{2} \text{ ή } x<-2\sqrt{2}$$

και $$7x>0 \Leftrightarrow x>0$$

Συναληθεύοντας τις δύο παραπάνω ανισώσεις προκύπτει: $\boxed{x>2\sqrt{2}}$ (1)

Η εξίσωση:

$$\ln\left(x^2-8\right)=\ln 7x \Leftrightarrow x^2-8=7x$$
$$\Leftrightarrow x^2-7x-8=0$$
$$\Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=8$$

Από τις δύο λύσεις δεκτή η $\boxed{x=8}$ λόγω του περιορισμού (1)

β) $$\ln\left(x^2-8\right)\geq \ln 7x \Leftrightarrow x^2-8\geq 7x \Leftrightarrow \boxed{x^2-7x-8\geq 0}$$

x	$-\infty$		-1		8		$+\infty$
x^2-7x-8		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $$x\leq -1 \quad \text{ή} \quad x\geq 8$$

Όμως λόγω της (1) η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x\geq 8$

ΑΣΚΗΣΗ Β2 (2_22632)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x-3)$, $x>3$

α) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\ln x$

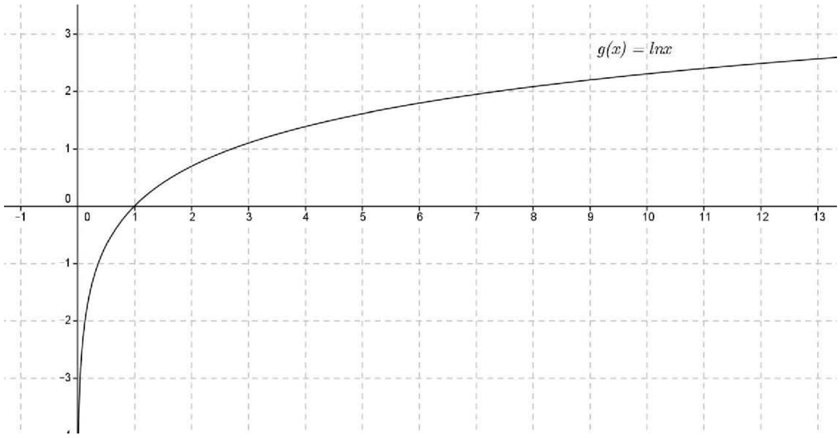
Μονάδες 8

β) Σε ποιο σημείο τέμνει η γραφική παράσταση της f τον άξονα x΄x; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

γ) Ποια είναι η ασύμπτωτη της C_f ;

Μονάδες 9

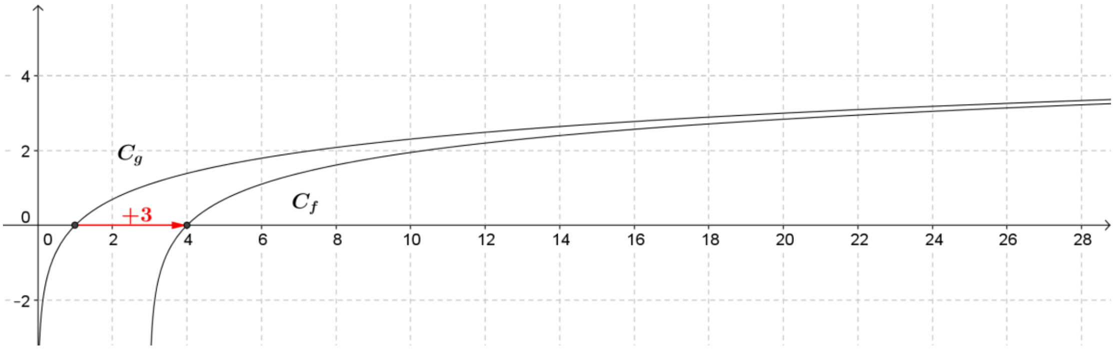


ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι,

$$f(x) = \ln(x-3) = g(x-3)$$

άρα η C_f προκύπτει από τη C_g αν μετατοπίσουμε κάθε σημείο της κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



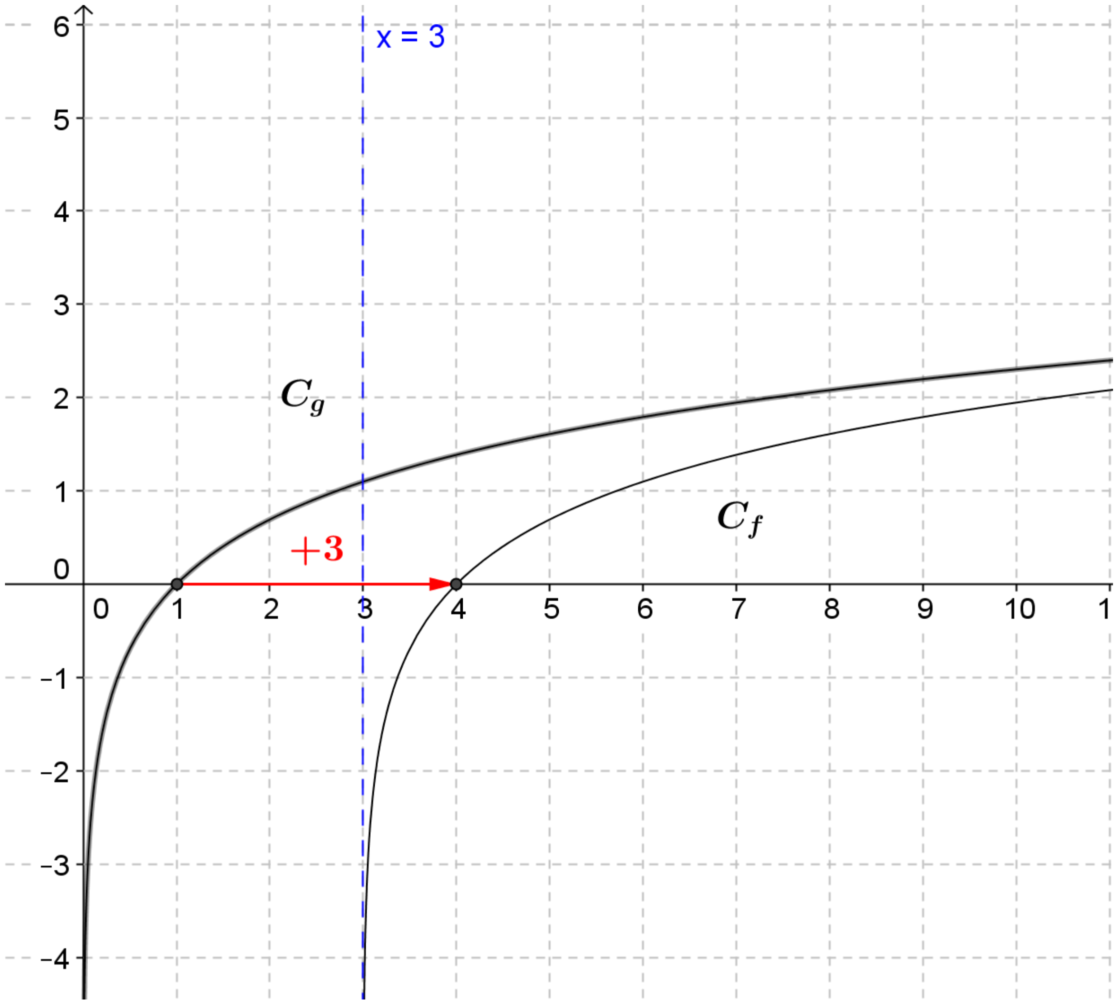
β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα x΄x για y = 0, δηλαδή

$$\ln(x-3) = 0 \Leftrightarrow x-3 = 1 \Leftrightarrow x = 4$$

άρα στο σημείο (4, 0).

Β΄ τρόπος: Η C_g τέμνει τον άξονα x΄x στο (1, 0), άρα η C_f θα τον τέμνει σε 3 μονάδες δεξιά, δηλαδή στο σημείο (1+3, 0) = (4, 0)

γ) Η ασύμπτωτη της C_g είναι ο άξονας y΄y, δηλαδή η ευθεία x = 0, άρα η C_f που είναι μετατοπισμένη κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά θα έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία x = 3, όπως φαίνεται στο σχήμα.



ΑΣΚΗΣΗ Β3 (2_22634)

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση

$$A = \ln x + \ln(x+6)$$

Μονάδες 10

β) Να λύσετε την εξίσωση

$$\ln x + \ln(x+6) = \frac{1}{2}\ln(49).$$

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε πως η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \ln x$ ορίζεται, όταν $x > 0$

Έτσι, λοιπόν, η παράσταση $A = \ln x + \ln(x+6)$ ορίζεται όταν

$$\left.\begin{array}{c} x>0 \\ \text{και} \\ x+6>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} x>0 \\ \text{και} \\ x>-6 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x>0$$

Οπότε η παράσταση A ορίζεται όταν $x > 0$

β) Από το προηγούμενο ερώτημα, προκύπτει ότι η εξίσωση

$$\ln x + \ln(x+6) = \frac{1}{2}\ln(49)$$

θα λυθεί για $x>0$

Χρησιμοποιώντας γνωστές ιδιότητες των λογαρίθμων, έχουμε ότι

$$\frac{1}{2}\ln(49) = \frac{1}{2}\ln(7^2) = \frac{1}{2}\cdot 2\ln(7) = \ln(7)$$

και

$$\ln x + \ln(x+6) = \ln(x\cdot(x+6)) = \ln(x^2+6x)$$

Άρα, για $x>0$ έχουμε:

$$\ln x + \ln(x+6) = \frac{1}{2}\ln(49) \Leftrightarrow$$

$$\ln(x^2+6x) = \ln(7) \Leftrightarrow$$

$$x^2+6x=7 \Leftrightarrow$$

$$x^2+6x-7=0$$

Το τριώνυμο x^2+6x-7 έχει διακρίνουσα $\Delta=64>0$ και ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-6\pm\sqrt{64}}{2} = \begin{cases} \frac{-6+8}{2}=1 \\ \frac{-6-8}{2}=-7 \end{cases}$$

Άρα

$$x=1 \text{ ή } x=-7$$

Όμως, λόγω του περιορισμού $x>0$, προκύπτει τελικά ότι $x=1$

ΑΣΚΗΣΗ Β4 (2_22635)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(e^{2x}-e)-1$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

Μονάδες 12

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

.

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε πως η λογαριθμική συνάρτηση $g(x)=\ln x$ ορίζεται, όταν $x>0$

Έτσι, λοιπόν, η συνάρτηση $f(x)=\ln(e^{2x}-e)-1$ ορίζεται όταν

$$e^{2x}-e>0 \Leftrightarrow e^{2x}>e \Leftrightarrow e^{2x}>e^1 \overset{e>1}{\Leftrightarrow} 2x>1 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

β) Από το προηγούμενο ερώτημα, προκύπτει ότι η εξίσωση $f(x)=0$ θα λυθεί για $x>\frac{1}{2}$.

Έχουμε,

$$f(x)=0 \Leftrightarrow$$
$$\ln\left(e^{2x}-e\right)-1=0 \Leftrightarrow$$
$$\ln\left(e^{2x}-e\right)=1 \overset{1=\ln e}{\Leftrightarrow}$$
$$\ln\left(e^{2x}-e\right)=\ln e \Leftrightarrow$$
$$e^{2x}-e=e \Leftrightarrow$$
$$e^{2x}=2e \Leftrightarrow$$
$$\ln\left(e^{2x}\right)=\ln(2e) \Leftrightarrow$$
$$2x=\ln(2e) \Leftrightarrow$$
$$x=\frac{\ln(2e)}{2}$$

Για να είναι δεκτή αυτή η λύση, θα πρέπει

$$\frac{\ln(2e)}{2}>\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$
$$\ln(2e)>1 \overset{1=\ln e}{\Leftrightarrow}$$
$$\ln(2e)>\ln e \Leftrightarrow$$
$$2e>e, \text{ το οποίο ισχύει.}$$

Συμπέρασμα:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{\ln(2e)}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ Β5 (2_22636)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(x^2+4)$ και $g(x)=\ln x+\ln 4$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

Μονάδες 12

β) Να λύσετε την εξίσωση f(x) = g(x).

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α)

● Για την f:

Πρέπει $x^2+4>0$ που ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x, άρα πεδίο ορισμού της f είναι το $A=\mathbb{R}$.

● Για την g:

Πρέπει x>0 , άρα πεδίο ορισμού της g είναι το $B=(0,+\infty)$.

β) Για $x\in(0,+\infty)$ έχουμε:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow \ln(x^2+4)=\ln x+\ln 4\Leftrightarrow$$
$$\ln(x^2+4)=\ln 4x\Leftrightarrow x^2+4=4x\Leftrightarrow$$
$$(x-2)^2=0\Leftrightarrow x=2,$$

που είναι δεκτή.

ΑΣΚΗΣΗ Β6 (2_22637)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(3-\sqrt{x+1}\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτηση f.

Μονάδες 13

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει

$$x+1\geq 0\Leftrightarrow x\geq -1 \text{ και}$$
$$3-\sqrt{x+1}>0\Leftrightarrow \sqrt{x+1}<3\Leftrightarrow x+1<9\Leftrightarrow x<8$$

Άρα πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A=[-1,8)$

β) Έχουμε:

$$f(x)=0\Leftrightarrow \ln\left(3-\sqrt{x+1}\right)=0\Leftrightarrow 3-\sqrt{x+1}=1\Leftrightarrow$$
$$\sqrt{x+1}=2\Leftrightarrow x+1=4\Leftrightarrow x=3,$$

που είναι δεκτή.

ΑΣΚΗΣΗ Β7 (2_22638)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Μονάδες 8

β) Να βρείτε τα σημεία τομής (αν υπάρχουν) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες 10

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της $y=\ln x$.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

α) Η f ορίζεται όταν

$$x+1>0\Leftrightarrow x>-1$$

Άρα

$$D_f=(-1,+\infty)$$

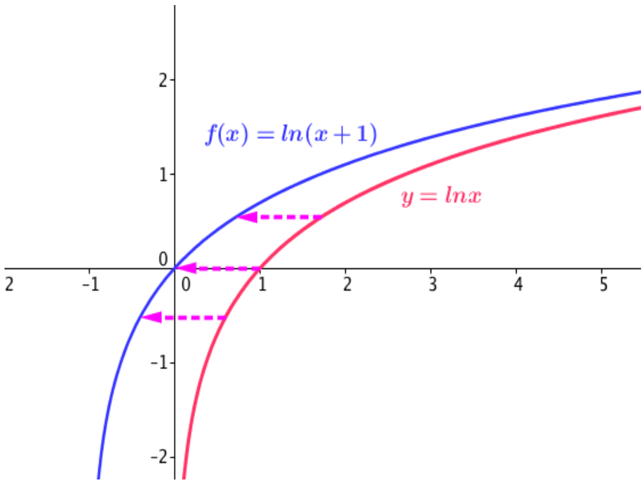
β) Η C_f, τέμνει τον $y'y$ όταν $x=0$ με $f(0)=\ln(1)=0$, άρα στο σημείο $O(0,0)$

και τον $x'x$ όταν

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x+1)=0 \Leftrightarrow \ln(x+1)=\ln 1$$
$$\Leftrightarrow x+1=1 \Leftrightarrow x=0$$

Άρα το $O(0,0)$ είναι το μόνο κοινό σημείο της C_f με τους άξονες.

γ) Μετατοπίζοντας την $y=\ln x$ κατά 1 μονάδα αριστερά παράλληλα στον $x'x$ προκύπτει η C_f .



«ΘΕΜΑ Δ»

ΑΣΚΗΣΗ Δ1 (4_22796)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(e^x-1)$ και $g(x)=\ln x^2$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

Μονάδες 4

β) Να λύσετε τις ανισώσεις $f(x)>0$ και $g(x)<0$.

Μονάδες 8

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(\ln 3)$ και $g(\frac{2}{e})$.

Μονάδες 6

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(2x)-f(x)=g(\sqrt{e-1})$.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

α) Για τη συνάρτηση f αρκεί να είναι:

$$e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow e^x>e^0 \overset{e>1}{\Leftrightarrow} x>0$$

Άρα

$$A_f=(0,+\infty)$$

Για τη συνάρτηση g αρκεί να είναι:

$$x^2>0 \Leftrightarrow x\neq 0$$

Άρα

$$A_g=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$$

β) Έχουμε:

$$f(x)>0\Leftrightarrow \ln(e^x-1)>0\Leftrightarrow \ln(e^x-1)>\ln 1\overset{\ln x\nearrow}{\Leftrightarrow} e^x-1>1\Leftrightarrow e^x>2\Leftrightarrow \ln e^x>\ln 2\Leftrightarrow x>\ln 2$$

και

$$g(x)<0\Leftrightarrow \ln x^2>0\Leftrightarrow \ln x^2>\ln 1\Leftrightarrow x^2>1\Leftrightarrow |x|>1\Leftrightarrow (x>1 \text{ ή } x<-1)$$

γ) Είναι:

$$f(\ln 3)=\ln(e^{\ln 3}-1)=\ln(3-1)=\ln 2$$

και

$$g\left(\frac{2}{e}\right)=\ln\left(\frac{2}{e}\right)^2=2\ln\left(\frac{2}{e}\right)=2(\ln 2-\ln e)=2(\ln 2-1)=2\ln 2-2$$

Επομένως

$$f(\ln 3)-g\left(\frac{2}{e}\right)=\ln 2-2\ln 2+2=-\ln 2+2=-\ln 2+\ln e^2>0 \text{ οπότε } f(\ln 3)>g\left(\frac{2}{e}\right)$$

δ) Η εξίσωση θα λυθεί στο $A_f=(0,+\infty)$:

$$f(2x)-f(x)=g(\sqrt{e-1})\Leftrightarrow \ln(e^{2x}-1)-\ln(e^x-1)=\ln\left(\sqrt{e-1}\right)^2\Leftrightarrow \ln\frac{e^{2x}-1}{e^x-1}=\ln(e-1)\Leftrightarrow$$

$$\frac{e^{2x}-1}{e^x-1}=e-1\Leftrightarrow \frac{(e^x-1)(e^x+1)}{e^x-1}=e-1\Leftrightarrow e^x+1=e-1\Leftrightarrow e^x=e-2\Leftrightarrow x=\ln(e-2)$$

Όμως

$$e<3\Rightarrow e-2<1\Rightarrow \ln(e-2)<0$$

Άρα η εξίσωση είναι ΑΔΥΝΑΤΗ.

ΑΣΚΗΣΗ Δ2 (4_22799)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log(x-2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Μονάδες 5

β) Να υπολογίσετε τον αριθμό $100^{\log\sqrt{6}}$

Μονάδες 7

γ) Να λύσετε την εξίσωση $4\cdot 4^{f(x)}-9\cdot 2^{f(x)}+100^{\log\sqrt{6}}-4=0$

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Αρκεί να είναι:

$$x-2>0\Leftrightarrow x>2$$

Άρα

$$A_f=(2,+\infty)$$

β) Έχουμε:

$$100^{\log\sqrt{6}} = (10^2)^{\log 6^{\frac{1}{2}}} = 10^{2\cdot\frac{1}{2}\log 6} = 10^{\log 6} = 6$$

γ) Αφού $100^{\log\sqrt{6}} = 6$, η εξίσωση, για $x > 2$, γίνεται:

$$4\cdot 4^{f(x)} - 9\cdot 2^{f(x)} + 2 = 0 \Leftrightarrow 4\cdot(2^2)^{f(x)} - 9\cdot 2^{f(x)} + 2 = 0 \Leftrightarrow 4\cdot(2^{f(x)})^2 - 9\cdot 2^{f(x)} + 2 = 0$$

Θέτουμε

$$2^{f(x)} = y > 0$$

και έχουμε:

$$4y^2 - 9y + 2 = 0$$

που με διακρίνουσα $(\Delta = 49)$ βρίσκουμε ότι

$$y = 2 \text{ ή } y = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$$

Επομένως:

- $2^{f(x)} = 2 \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow \log(x-2) = \log 10 \Leftrightarrow x - 2 = 10 \Leftrightarrow x = 12$

ή

- $2^{f(x)} = 2^{-2} \Leftrightarrow f(x) = -2 \Leftrightarrow \log(x-2) = \log 10^{-2} \Leftrightarrow x - 2 = \dfrac{1}{100} \Leftrightarrow x = \dfrac{201}{100}$

ΑΣΚΗΣΗ Δ3 (4_22810)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Μονάδες 7

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + x = 3\ln 2$.

Μονάδες 9

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) + x \geq 3\ln 2$.

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Για να ορίζεται η συνάρτησης f αρκεί να ισχύει:

$$e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow e^x > e^{\ln 2} \Leftrightarrow x > \ln 2$$

(αφού η συνάρτηση $h(x) = e^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$)

Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι:

$$\boxed{A_f = (\ln 2, +\infty)}$$

β) Το σύνολο ορισμού της εξίσωσης $f(x) + x = 3\ln 2$ είναι το $(\ln 2, +\infty)$ (λόγω της ύπαρξης εκεί της συνάρτησης f .

Έτσι, έχουμε:

$$f(x) + x = 3\ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\ln(e^x - 2) + x = 3\ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\ln(e^x-2)+\ln e^x=\ln 2^3 \Leftrightarrow$$

$$\ln(e^x-2)\cdot e^x=\ln 8 \Leftrightarrow$$

(αφού η συνάρτηση $\varphi(x)=\ln x$ είναι 1-1 ως γνησίως αύξουσα στο $(\ln 2,+\infty)$)

$$(e^x-2)\cdot e^x=8 \Leftrightarrow \left(e^x\right)^2-2\cdot e^x-8=0 \quad (1)$$

Θέτουμε $\omega=e^x>0$ (2) και έτσι η (1) μετατρέπεται στην βοηθητική εξίσωση:

$$\omega^2-2\cdot\omega-8=0 \Leftrightarrow$$

$\omega=4>0$ ή $\omega=-2<0$ που απορρίπτεται λόγω (2)

Οπότε

$$\omega=4 \Rightarrow e^x=4 \Rightarrow x=\ln 4 \text{ δεκτή,}$$

καθώς $4>2 \Rightarrow \ln 4>\ln 2$

(αφού η συνάρτηση $\varphi(x)=\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$)

Συμπέρασμα: η εξίσωσης $f(x)+x=3\ln 2$ έχει μοναδική λύση, την $\boxed{x=\ln 4}$

γ) Το σύνολο ορισμού της ανίσωσης $f(x)+x\geq 3\ln 2$ είναι το $(\ln 2,+\infty)$ (λόγω της ύπαρξης εκεί της συνάρτησης f .

Έτσι, έχουμε:

$$f(x)+x\geq 3\ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\ln(e^x-2)+x\geq 3\ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\ln(e^x-2)+\ln e^x\geq \ln 2^3 \Leftrightarrow$$

$$\ln(e^x-2)\cdot e^x\geq \ln 8 \Leftrightarrow$$

$$(e^x-2)\cdot e^x\geq 8 \Leftrightarrow$$

(αφού η συνάρτηση $\varphi(x)=\ln x$ είναι 1-1 ως γνησίως αύξουσα στο $(\ln 2,+\infty)$)

$$\left(e^x\right)^2-2\cdot e^x-8\geq 0 \quad (3)$$

Θέτουμε $\omega=e^x>0$ (4) και έτσι η (3) μετατρέπεται στην βοηθητική ανίσωση:

$$\omega^2-2\cdot\omega-8\geq 0 \quad (5)$$

Οι ρίζες του τριωνύμου του πρώτου μέλους της (5) είναι $\omega=-2$ και $\omega=4$.
Γνωρίζουμε ότι ένα τριώνυμο είναι ομόσημο του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου στο διάστημα έξω από τις ρίζες του, άρα:

$$(5) \Leftrightarrow \omega\leq -2 \text{ ή } \omega\geq 4 \overset{(4)}{\Leftrightarrow}$$

$$\omega\geq 4 \Leftrightarrow e^x\geq 4 \Leftrightarrow e^x\geq e^{\ln 4} \Leftrightarrow$$

$$x\geq \ln 4$$

(αφού η συνάρτηση $\varphi(x)=\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα στο , καθώς $e>1$)

Και επειδή είναι $4>2 \Rightarrow \ln 4>\ln 2$ (αφού η συνάρτηση $\varphi(x)=\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$) είναι δεκτές όλες οι λύσεις.

Συμπέρασμα: η ανίσωσης $f(x)+x\geq 3\ln 2$ έχει ως λύσεις όλα τα $\boxed{x\in[\ln 4,+\infty)}$

ΑΣΚΗΣΗ Δ4 (4_22812)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\dfrac{4^x-1}{2^x+5}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Μονάδες 7

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\log3-\log7$.

Μονάδες 9

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>\log3-\log7$.

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Για να ορίζεται η συνάρτησης f αρκεί να ισχύει:

$$\frac{4^x-1}{2^x+5}>0 \text{ και } 2^x+5\neq0 \text{ (που ισχύει αφού } 2^x>0\Rightarrow 2^x+5>5>0\text{)}$$

$$\overset{2^x+5>0}{\Leftarrow} 4^x-1>0$$
$$\Leftarrow 4^x>1$$
$$\Leftarrow 4^x>4^0$$
$$\Leftarrow x>0$$

(αφού η συνάρτηση $h(x)=4^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, καθώς $4>1$)

Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι:

$$\boxed{A_f=(0,+\infty)}$$

β) Το σύνολο ορισμού της εξίσωσης $f(x)=\log3-\log7$ είναι το $(0,+\infty)$ (λόγω της ύπαρξης εκεί της συνάρτησης f .

Έτσι, έχουμε:

$$f(x)=\log3-\log7\Leftrightarrow \log\frac{4^x-1}{2^x+5}=\log\frac{3}{7}\Leftrightarrow\frac{4^x-1}{2^x+5}=\frac{3}{7}\Leftrightarrow$$

(αφού η συνάρτηση $\varphi(x)=\log x$ είναι 1-1 ως γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, καθώς $10>1$)

$$7\left(4^x-1\right)=3\left(2^x+5\right)\Leftrightarrow 7\cdot4^x-7=3\cdot2^x+15\Leftrightarrow 7\cdot\left(2^x\right)^2-3\cdot2^x-22=0 \quad (1)$$

Θέτουμε $\omega=2^x>0$ (2) και έτσι η (1) μετατρέπεται στην βοηθητική εξίσωση:

$$7\omega^2-3\cdot\omega-22=0 \quad (3)$$

Η εξίσωση (3) έχει διακρίνουσα: $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-3)^2-4\cdot7\cdot(-22)=625=25^2>0$, οπότε έχει δύο διαφορετικές λύσεις:

$$\left(\omega=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ και } \omega=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\Leftrightarrow$$

$$\omega=2>0 \text{ και } \omega=\frac{-22}{14}<0 \text{ που απορρίπτεται λόγω (2)}$$

Οπότε

$$\omega=2\Rightarrow 2^x=2\Rightarrow 2^x=2^1\Rightarrow x=1$$

(αφού η συνάρτηση $k(x)=2^x$ είναι 1-1 ως γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, καθώς $2>1$)
Η λύση αυτή είναι δεκτή, καθώς $1>0$)

Συμπέρασμα: η εξίσωσης $f(x)=\log 3-\log 7$ έχει μοναδική λύση, την $\boxed{x=1}$

γ) Το σύνολο ορισμού της ανίσωσης $f(x)>\log 3-\log 7$ είναι το $(0,+\infty)$ (λόγω της ύπαρξης εκεί της συνάρτησης f .
Έτσι, έχουμε:

$$f(x)>\log 3-\log 7 \Leftrightarrow$$

$$\log\frac{4^x-1}{2^x+5}>\log\frac{3}{7} \Leftrightarrow$$

$$\frac{4^x-1}{2^x+5}>\frac{3}{7} \overset{\cdot 7\left(2^x+5\right)>0}{\Leftrightarrow}$$

(αφού η συνάρτηση $\varphi(x)=\log x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, καθώς $10>1$)

$$7\left(4^x-1\right)>3\left(2^x+5\right) \Leftrightarrow$$

$$7\cdot 4^x-7>3\cdot 2^x+15 \Leftrightarrow$$

$$7\cdot\left(2^x\right)^2-3\cdot 2^x-22>0 \quad (4)$$

Θέτουμε $\omega=2^x>0$ (5) και έτσι η (4) μετατρέπεται στην βοηθητική ανίσωση:

$$7\omega^2-3\cdot\omega-22>0 \quad (6)$$

Το τριώνυμο στο πρώτο μέλος της ανίσωσης (6) έχει διακρίνουσα:
$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-3)^2-4\cdot 7\cdot(-22)=625=25^2>0$, οπότε έχει δύο διαφορετικές ρίζες:

$$\left(\omega=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{και} \quad \omega=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right) \Leftrightarrow$$

$$\omega=2 \quad \text{και} \quad \omega=\frac{-22}{14}=-\frac{11}{7}$$

Γνωρίζουμε ότι ένα τριώνυμο είναι ομόσημο του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου στο διάστημα έξω από τις ρίζες του, άρα:

$$(6) \Leftrightarrow$$

$$\omega\le-\frac{11}{7} \quad \text{ή} \quad \omega\ge 2 \overset{(5)}{\Leftrightarrow}$$

$$\omega\ge 2 \Leftrightarrow 2^x>2 \Leftrightarrow 2^x>2^1 \Leftrightarrow x>1$$

(αφού η συνάρτηση $k(x)=2^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, καθώς $2>1$)
Και επειδή είναι $1>0$ γίνονται δεκτές όλες οι λύσεις.

Συμπέρασμα: η ανίσωσης $f(x)>\log 3-\log 7$ έχει ως λύσεις όλα τα $\boxed{x\in(1,+\infty)}$

ΑΣΚΗΣΗ Δ5 (4_22814)
Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=5x^3-8x^2+\alpha$ με $\alpha\in\mathbb{R}$

α) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-2$ να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$

Μονάδες 8

β) Για $\alpha=-8$ να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$

Μονάδες 9

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{(\ln^2 x+1)^3}{(\ln^2 x+1)^2}=\dfrac{8}{5}$

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

α) Αφού το $x-2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$ τότε:

$$P(2)=0 \Leftrightarrow 5\cdot 2^3-8\cdot 2^2+\alpha=0 \Leftrightarrow 40-32+\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=-8$$

β) Για $\alpha=-8$ το πολυώυμο $P(x)$ γίνεται: $P(x)=5x^3-8x^2-8$ και επειδή το $x-2$ είναι παράγοντας του $P(x)$, κάνουμε τη διαίρεση του $P(x)$ με το $x-2$ με το σχήμα του Horner.

5	-8	0	–8	$\rho=2$
	10	4	8	
5	2	4	0	

Οπότε η ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-2$ είναι:

$$P(x)=(x-2)(5x^2+2x+4)$$

Άρα η εξίσωση $P(x)=0$ ισοδύναμα γράφεται:

$$P(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)(5x^2+2x+4)=0 \Leftrightarrow$$
$$x-2=0 \text{ ή } 5x^2+2x+4=0 \Leftrightarrow$$
$$x=2 \text{ ή } 5x^2+2x+4=0$$

Η εξίσωση $5x^2+2x+4=0$ είναι αδύνατη γιατί το τριώνυμο $5x^2+2x+4$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=2^2-4\cdot 5\cdot 4=-76<0$$

Τελικά η εξίσωση $P(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα την $x=2$

γ) Η εξίσωση ορίζεται όταν:

$x>0$ και $(\ln^2 x+1)^2+1\neq 0$ που ισχύει για κάθε $x>0$ αφού το $(\ln^2 x+1)^2+1>1$

Θέτουμε $y=\ln^2 x+1$ και η δοσμένη εξίσωση γίνεται:

$$\frac{y^3}{y^2+1}=\frac{8}{5} \Leftrightarrow 5y^3=8y^2+8 \Leftrightarrow 5y^3-8y^2+8=0$$

Η τελευταία εξίσωση όπως δείξαμε στο β) ερώτημα έχει μοναδική λύση την $y=2$. Άρα θα είναι:

$$\ln^2 x+1=2 \Leftrightarrow \ln^2 x=1 \Leftrightarrow \ln x=1 \text{ ή } \ln x=-1 \Leftrightarrow x=e \text{ ή } x=e^{-1}$$

οι οποίες είναι δεκτές.

ΑΣΚΗΣΗ Δ6 (4_22816)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(e\cdot x+1)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Μονάδες 5

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(2x)<f(x)$.

Μονάδες 7

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(\sqrt{3}\cdot \eta\mu x\right)=f(\sigma\upsilon\nu x)$ στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση πρέπει:

$$e\cdot x+1>0 \Leftrightarrow e\cdot x>-1 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{e}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της είναι το σύνολο $A=\left(-\frac{1}{e},+\infty\right)$

β) Η δοσμένη ανίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$f(2x)<f(x) \Leftrightarrow$$
$$\ln(e\cdot 2x+1)<\ln(e\cdot x+1) \Leftrightarrow$$
$$e\cdot 2x+1<e\cdot x+1 \Leftrightarrow$$
$$e\cdot x<0 \Leftrightarrow$$
$$x<0$$

και επειδή το $x\in A$ τελικά πρέπει $x\in\left(-\frac{1}{e},0\right)$

γ) Η δοσμένη εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$f\left(\sqrt{3}\cdot \eta\mu x\right)=f(\sigma\upsilon\nu x) \Leftrightarrow$$
$$\ln\left(e\sqrt{3}\cdot \eta\mu x+1\right)=\ln(e\cdot \sigma\upsilon\nu x+1) \Leftrightarrow$$
$$e\sqrt{3}\cdot \eta\mu x+1=e\cdot \sigma\upsilon\nu x+1 \Leftrightarrow$$
$$e\sqrt{3}\cdot \eta\mu x=e\cdot \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{3}\cdot \eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x \ (1)$$

Επειδή το $\sigma\upsilon\nu x\neq 0$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ τότε διαιρούμε με $\sigma\upsilon\nu x$ και τα δυο μέλη της (1) και έχουμε:

$$\sqrt{3}=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\Leftrightarrow \sigma\varphi x=\sqrt{3}\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\kappa\in\mathbb{Z}$$

Όμως το $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ άρα έχουμε:

$$0\le x<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow$$

$$0\le \kappa\pi+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow$$

$$0\le \kappa+\frac{1}{3}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{3}\le\kappa<\frac{1}{6}\ ,\kappa\in\mathbb{Z}$$

Άρα πρέπει $\kappa=0$ οπότε η λύση της εξίσωσης είναι η $x=\frac{\pi}{3}$

ΑΣΚΗΣΗ Δ7 (4_22819)

Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f}(\mathrm{x})=\frac{\ln(3\mathrm{x}-11)}{\ln(\mathrm{x}-5)}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Μονάδες 9

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2$.

Μονάδες 8

γ) Αν $x>6$ να λύσετε την ανίσωση $f(x)>1$

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f θα πρέπει:

$$\begin{cases}3x-11>0\\ x-5>0\\ \ln(x-5)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x>11\\ x>5\\ x-5\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{11}{3}\\ x>5\\ x\neq 6\end{cases}\Leftrightarrow x\in(5,6)\cup(6,+\infty)$$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο $A=(5,6)\cup(6,+\infty)$

β) Η δοσμένη εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$f(x)=2\Leftrightarrow$$

$$\frac{\ln(3x-11)}{\ln(x-5)}=2\Leftrightarrow$$

$$\ln(3x-11)=2\ln(x-5)\Leftrightarrow$$

$$\ln(3x-11)=\ln(x-5)^2\Leftrightarrow$$

$$3x-11=(x-5)^2\Leftrightarrow$$

$$3x-11=x^2-10x+25 \Leftrightarrow$$
$$x^2-13x+36=0$$

Το τριώνυμο $x^2-13x+36=0$ έχει $\Delta=(-13)^2-4\cdot 36=25$ και ρίζες τους αριθμούς $x_1=9$ και $x_2=4$. Η λύση $x_2=4$ απορρίπτεται γιατί δεν ανήκει στο σύνολο $A=(5,6)\cup(6,+\infty)$, άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x=9$.

γ) Για κάθε $x>6$ η δοσμένη ανίσωση γίνεται:

$$f(x)>1 \Leftrightarrow$$
$$\frac{\ln(3x-11)}{\ln(x-5)}>1 \Leftrightarrow$$

Όμως για $x>6$ είναι $x-5>1 \Leftrightarrow \ln(x-5)>0$, άρα κάνοντας απαλοιφή παρονομαστών η παραπάνω ανίσωση γίνεται:

$$\ln(3x-11)>\ln(x-5) \Leftrightarrow$$
$$3x-11>x-5 \Leftrightarrow$$
$$2x>6 \Leftrightarrow$$
$$x>3$$

Όμως είναι $x>6$ άρα η ανίσωση έχει λύσεις κάθε $x>6$.

ΑΣΚΗΣΗ Δ8 (4_22822)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x-1)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Μονάδες 5

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x)+f(e^x-2)=3ln2$

Μονάδες 10

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(e^x)+f(e^x-2)\le 3ln2$.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει:

$$x-1>0 \Leftrightarrow x>1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο $\mathrm{A}=(1,+\infty)$

β) Για κάθε $x>1$ η δοσμένη εξίσωση γίνεται:

$$f(e^x)+f(e^x-2)=3ln2 \Leftrightarrow$$
$$\ln(e^x-1)+\ln(e^x-3)=ln2^3 \Leftrightarrow$$
$$\ln\left[(e^x-1)(e^x-3)\right]=ln8 \Leftrightarrow$$
$$(e^x-1)(e^x-3)=8 \Leftrightarrow$$
$$e^{2x}-3e^x-e^x+3=8 \Leftrightarrow$$
$$e^{2x}-4e^x-5=0 \Leftrightarrow$$

Θέτουμε $y=e^x$ με $y>0$ και η τελευταία εξίσωση γίνεται:

$$y^2-4y-5=0$$

Το τριώνυμο y^2-4y-5 έχει διακρίνουσα $\Delta=(-4)^2-4\cdot 5=36$ και ρίζες τους αριθμούς $y_1=5$ και $y_2=-1$. Η λύση $y_2=-1$ απορρίπτεται γιατί $y>0$. Άρα:

$$y=5 \Leftrightarrow e^x=5 \Leftrightarrow x=ln5$$

Άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x=ln5$ η οποία είναι δεκτή γιατί ανήκει στο σύνολο $(1,+\infty)$.

γ) Για κάθε $x>1$ η δοσμένη ανίσωση γίνεται:

$$f\left(e^x\right)+f\left(e^x-2\right)\le 3ln2 \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(e^x-1\right)+\ln\left(e^x-3\right)\le ln2^3 \Leftrightarrow$$

$$\ln\left[\left(e^x-1\right)\left(e^x-3\right)\right]\le ln8 \Leftrightarrow$$

$$\left(e^x-1\right)\left(e^x-3\right)\le 8 \Leftrightarrow$$

$$e^{2x}-3e^x-e^x+3\le 8 \Leftrightarrow$$

$$e^{2x}-4e^x-5\le 0 \Leftrightarrow$$

$$y^2-4y-5\le 0$$

Με $y=e^x>0$.Δουλεύοντας όπως και στο προηγούμενο ερώτημα το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες το 5 και το -1, άρα παραγοντοποιείται ως εξής:

$$(y-5)(y+1)\le 0$$

Και επειδή το $y+1>0$ θα πρέπει να είναι και:

$$y-5\le 0 \Leftrightarrow y\le 5 \Leftrightarrow e^x\le 5 \Leftrightarrow x\le ln5$$

Όμως πρέπει και $x>1$ άρα τελικά οι λύσεις της ανίσωσης είναι $x\in(1,ln5]$