

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

Παραλληλόγραμμα - Τραπεζία

• **ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ**

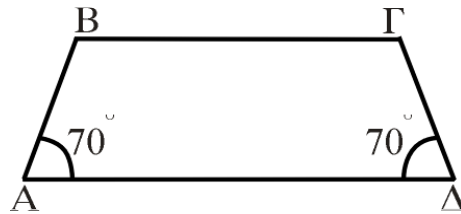
1. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης (Α) με ένα μόνο στοιχείο της στήλης (Β):

στήλη (Α) τετράπλευρα	στήλη (Β) ιδιότητες
<ul style="list-style-type: none"> • ορθογώνιο παραλληλόγραμμο • τραπέζιο • ρόμβος 	<ul style="list-style-type: none"> • Δύο απέναντι πλευρές είναι παράλληλες και άνισες • Οι διαγώνιοι είναι ίσες και τέμνονται κάθετα • Είναι παραλληλόγραμμο και όλες οι πλευρές του είναι ίσες • Το άθροισμα των γωνιών του είναι 400° • Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

2. Να συμπληρώσετε τον πίνακα με δύο ομοιότητες που αφορούν πλευρές, γωνίες ή διαγωνίους [στήλη (B)] και δύο διαφορές [στήλη (Γ)] μεταξύ των ζευγών των σχημάτων που αναγράφονται στη στήλη (A).

στήλη (A) σχήματα	στήλη (B) ομοιότητες	στήλη (Γ) διαφορές
Τετράγωνο - ρόμβος	i)..... ii).....	i)..... ii).....
Τετράγωνο-ορθογώνιο	i)..... ii).....	i)..... ii).....
Ορθογώνιο - ρόμβος	i)..... ii).....	i)..... ii).....

3. Το $AB\Gamma\Delta$ είναι ένα τραπέζιο.



Ένα άλλο τραπέζιο, $EZH\Theta$ (το οποίο δεν φαίνεται), είναι ίσο (έχει ίδιο σχήμα και μέγεθος) με το $AB\Gamma\Delta$. Οι γωνίες E και Θ είναι 70° η καθεμιά. Ποιο από τα παρακάτω θα μπορούσε να είναι το σωστό;

- α) $EZ = AB$
- β) Η γωνία Z είναι ορθή
- γ) Όλες οι πλευρές του $EZH\Theta$ έχουν το ίδιο μήκος
- δ) Η περίμετρος του $EZH\Theta$ είναι 3 φορές η περίμετρος του $AB\Gamma\Delta$.
- ε) Οι γωνίες Z και H είναι παραπληρωματικές.

Δόθηκε στην 3^η Διεθνή Έρευνα για τα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες (I.E.A.).

4. Στο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ είναι

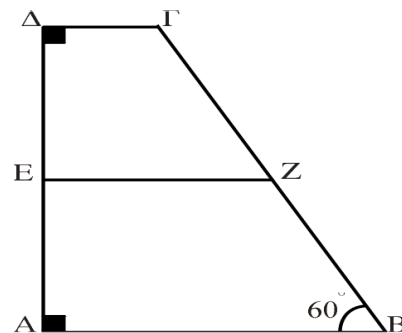
$$A = \Delta = 90^\circ \text{ και } B = 60^\circ.$$

$$\text{Αν } \Gamma\Delta = 2x \text{ και } B\Gamma = 8x, \text{ η}$$

διάμεσος EZ του τραpezίου

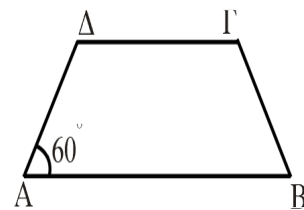
ισούται με:

- α) $3x$ β) $4x$ γ) $5x$
- δ) $6x$ ε) $7x$



5. Στο ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ είναι $AB = 5x$, $\Delta\Gamma = 3x$ και $A = 60^\circ$. Η περίμετρος του τραpezίου είναι:

- α) $10x$ β) $11x$ γ) $12x$
- δ) $13x$ ε) $14x$



6. Για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο πρέπει:

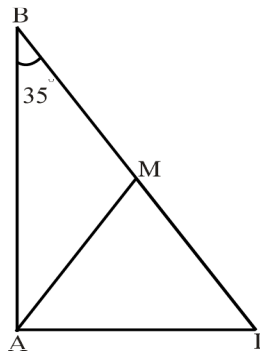
- α) Να έχει δύο γωνίες ορθές
- β) Οι διαγώνιοί του να διχοτομούνται
- γ) Να είναι παραλληλόγραμμο με μια γωνία ορθή
- δ) Να έχει τις απέναντι γωνίες του ίσες
- ε) Να έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.

7. Ένα παραλληλόγραμμο δεν είναι ρόμβος όταν:

- α) Δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες
- β) Οι διαγώνιοί του τέμνονται καθέτως
- γ) Οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες
- δ) Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες
- ε) Όλες οι πλευρές του είναι ίσες.

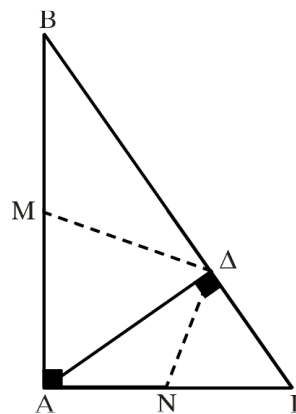
8. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A = 90^\circ$ και $B = 35^\circ$. Αν AM διάμεσος του $AB\Gamma$ τότε η γωνία AMB ισούται με:

- α) 55° β) 70° γ) 110°
- δ) 100° ε) 125°



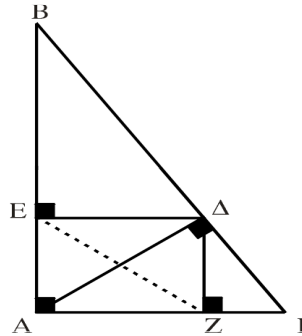
9. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο A και το $A\Delta$ ύψος του. Αν M είναι μέσο της AB και N μέσο της $A\Gamma$ τότε η περίμετρος του τετραπλεύρου $AM\Delta N$ ισούται με:

- α) $A\Gamma + B\Gamma$ β) $AB + B\Gamma$
- γ) $AB + A\Gamma$ δ) $2AM$
- ε) $AB + A\Gamma + B\Gamma$



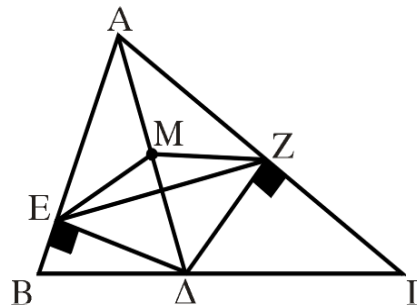
10. Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο A και $A\Delta \perp B\Gamma$, $\Delta Z \perp A\Gamma$, $\Delta E \perp AB$, τότε:

- α) $EZ = \Delta Z$ β) $EZ = AZ$
 γ) $EZ = Z\Gamma$ δ) $EZ = A\Delta$
 ε) $EZ = \Delta\Gamma$



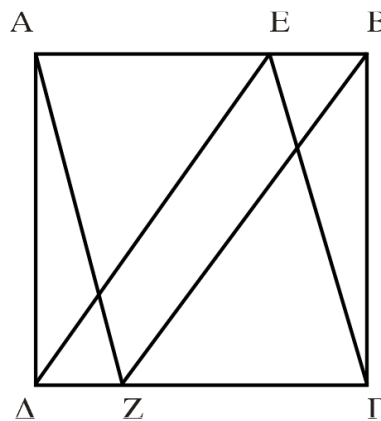
11. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι σκαληνό. Το Δ είναι τυχαίο σημείο της $B\Gamma$. Αν $\Delta E \perp AB$, $\Delta Z \perp A\Gamma$ και M μέσο της $A\Delta$, τότε το πλήθος των ισοσκελών τριγώνων που ορίζονται από τα πέντε σημεία A, E, Δ, Z, M είναι:

- α) 2 β) 3 γ) 4 δ) 5 ε) 6



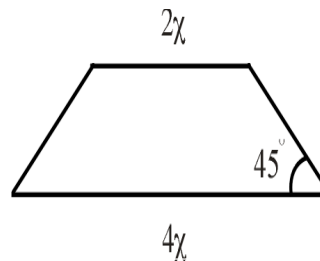
12. Αν στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο και $BE = \Delta Z$, τότε το πλήθος των παραλληλογράμμων του σχήματος είναι:

- α) 1 β) 2
 γ) 3 δ) 4
 ε) 5



13. Αν το διπλανό τραπέζιο είναι ισοσκελές τότε το ύψος του ισούται με:

- α) $4x$ β) $3x$ γ) $2x$
δ) x ε) $\frac{x}{2}$



14. Να αποδείξετε ότι:

- α) τα μέσα των πλευρών ρόμβου είναι κορυφές ορθογωνίου.
β) τα μέσα των πλευρών τετραγώνου είναι κορυφές άλλου τετραγώνου

15. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Φέρνουμε τις διαμέσους BM και ΓN και στις προεκτάσεις τους παίρνουμε ευθύγραμμα τμήματα $M\Delta = BM$ και $NE = \Gamma N$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) $A\Delta = AE$, β) τα σημεία A, Δ, E βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

16. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και από τις απέναντι κορυφές του A και Γ φέρνουμε καθέτους AE και ΓZ στη διαγώνιο $B\Delta$.

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $\Gamma B Z$ είναι ίσα.
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Gamma Z E$ είναι παραλληλόγραμμο.

17. Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος της ορθής γωνίας ορθογωνίου τριγώνου διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζεται από το ύψος και τη διάμεσο που αντιστοιχούν στην υποτείνουσα.

18. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ γράφουμε ευθύγραμμο τμήμα $M\Delta$ ίσο και παράλληλο προς την BA και ένα άλλο ME ίσο και παράλληλο προς την ΓA (τα σημεία Δ και E βρίσκονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη $B\Gamma$ και το σημείο A). Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα σημεία Δ, A, E βρίσκονται στην ίδια ευθεία β) $\Delta A = AE$
γ) Η περίμετρος του τριγώνου $M\Delta E$ ισούται με την περίμετρο του $AB\Gamma$.

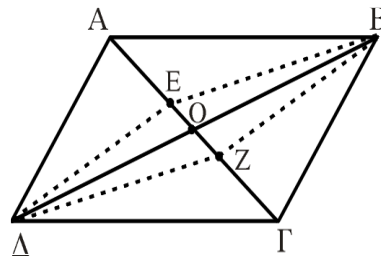
- 19.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφή το A . Από τυχαίο σημείο M της βάσης του γράφουμε ME παράλληλη προς την $A\Gamma$ και MD παράλληλη προς την AB (τα σημεία E και D ανήκουν στις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα).
Να αποδείξετε ότι:
- α) Καθεμιά από τις ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου ισούται με το άθροισμα δύο διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται.
- β) Το άθροισμα των περιμέτρων των δύο τριγώνων EBM και $\Delta M\Gamma$ ισούται με την περίμετρο του $AB\Gamma$.
- 20.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφή το A . Στην προέκταση της $B\Gamma$ παίρνουμε σημείο M από το οποίο γράφουμε ευθείες παράλληλες προς τις AB και $A\Gamma$ που τέμνουν τις προεκτάσεις των $A\Gamma$ και AB στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι η διαφορά δύο πλευρών του σχηματιζόμενου παραλληλογράμμου ισούται με καθεμιά από τις ίσες πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$.
- 21.** Τα μήκη των πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι: $15 - x$, $x + 5$, $2x + 10$, $x + 15$. Να υπολογισθεί ο x .
- 22.** Τα μέτρα των διαδοχικών γωνιών ενός τετραπλεύρου είναι: $4x$, $3x$, $2x$, x .
- α) Να υπολογιστούν οι γωνίες του τετραπλεύρου.
- β) Να προσδιοριστεί το είδος του τετραπλεύρου.
- 23.** Τέμνουμε ένα τρίγωνο με μια ευθεία. Πώς πρέπει να γίνει η τομή ώστε τα δύο σχήματα που θα προκύψουν τοποθετούμενα το ένα δίπλα στο άλλο κατάλληλα να δίνουν ένα παραλληλόγραμμο; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

24. Έχουμε τέσσερα ίσα ορθογώνια τρίγωνα. Αν τα τοποθετήσουμε κατάλληλα το ένα δίπλα στο άλλο, τι είδους τετράπλευρα κατασκευάζουμε; Να γίνουν τα σχήματα.

25. Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ είναι $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB = A\Delta$. Δείξτε ότι η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ .

26. Το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. Στην προέκταση της AB παίρνουμε τμήμα $BE = AB$ και στην προέκταση της $A\Delta$ τμήμα $\Delta Z = A\Delta$. Αποδείξτε ότι η EZ διέρχεται από το Γ .

27. Το $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο με O σημείο τομής των διαγωνίων του. Αν $OE = OZ$, αποδείξτε ότι:
 α) $\Delta E = BZ$
 β) το ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.



28. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και H σημείο της πλευράς $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $BH = \frac{B\Gamma}{4}$.

Αν E είναι το μέσο της διαμέσου $B\Delta$, αποδείξτε ότι $HE \parallel \frac{AB}{4}$.

29. Οι διαγώνιοι ενός τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ είναι ίσες. Αν K, Λ, M, N είναι τα μέσα των πλευρών του, αποδείξτε ότι το $K\Lambda M N$ είναι ρόμβος.

30. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με γωνία $B = 45^\circ$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρνουμε κάθετη πάνω στη $B\Gamma$ και έστω E και Z τα σημεία στα οποία αυτή τέμνει τις AB και $\Delta\Gamma$ (ή τις προεκτάσεις τους) αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι το $EBZ\Gamma$ είναι τετράγωνο.

- 31.** Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις AB , $\Gamma\Delta$ και $AB = \frac{3}{2} \Gamma\Delta$. Αν E , Z , H είναι τα μέσα των $\Gamma\Delta$, BE , $A\Delta$ αντιστοίχως, να αποδειχθεί ότι το τετράπλευρο $HZ\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. Αν Θ είναι το σημείο τομής της AB και της προέκτασης της ΓZ , να αποδειχθεί ότι το ΘB ισούται με τη διαφορά των βάσεων του τραπεζίου.
- 32.** Δίνεται το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις AB και $\Gamma\Delta$ και $AB < \Gamma\Delta$. Παίρνουμε τυχαίο σημείο M της $\Gamma\Delta$ και το ενώνουμε με τα μέσα E και Z των $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντιστοίχως. Στις προεκτάσεις των MZ και ME παίρνουμε αντιστοίχως ευθύγραμμα τμήματα $ZH = ZM$ και $E\Theta = EM$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Θ , A , B , H είναι συνευθειακά.
- 33.** Σε ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $A = 120^\circ$ και η διχοτόμος της γωνίας Δ τέμνει την AB στο μέσον της E .
- I. Η γωνία Δ είναι:
 α) 30° β) 40° γ) 50° δ) 60° ε) 70°
- II. Αποδείξτε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές
- III. Αν $AB = \kappa \cdot A\Delta$ το κ ισούται με:
 α) 1 β) 2 γ) $\frac{1}{2}$ δ) 3 ε) $\frac{1}{3}$
- IV. Αν $EZ \perp \Delta\Gamma$ αποδείξτε ότι $\Delta E = 2EZ$.
- 34.** Κατασκευάστε κυρτό τετράπλευρο με $AB \parallel \Gamma\Delta$ ($AB < \Gamma\Delta$) και $A\Delta = B\Gamma$. Από το Δ φέρνουμε ΔZ κάθετη στη $B\Gamma$ και από τυχαίο σημείο της βάσης του $\Delta\Gamma$, έστω H , φέρνουμε κάθετη $H\Theta$ στην $A\Delta$, την HE κάθετη στη $B\Gamma$ και την HI κάθετη στη ΔZ .
- α) Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ λέγεται
- β) Το τετράπλευρο $HIZE$ είναι
- γ) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα $H\Theta\Delta$ και ΔIH .
- δ) Να συμπληρώσετε την ισότητα: $\Delta\Theta = \dots = \dots$
- ε) Αποδείξτε ότι το άθροισμα $\Delta\Theta + \Gamma E$ είναι σταθερό.

- 35.** Κατασκευάστε κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$. Έστω E το μέσον της $A\Delta$ και Z το μέσον της $B\Gamma$. Η διχοτόμος της γωνίας B τέμνει την EZ στο H .
- α) Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ λέγεται
- β) Η EZ λέγεται
και ισούται με
- γ) Αποδείξτε ότι το τρίγωνο BHZ είναι ισοσκελές.
- Δ) Συμπληρώστε τις ισότητες: $HZ = \dots = \dots$
- ε) Δείξτε ότι η ΓH είναι διχοτόμος της γωνίας Γ .
- 36.** Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ προεκτείνουμε την πλευρά του $A\Delta$ κατά τμήμα $AH = A\Delta$. Φέρνουμε τη διχοτόμο της Δ που τέμνει την AB στο Z .
- α) Αποδείξτε ότι το τρίγωνο $A\Delta Z$ είναι ισοσκελές
- β) Συμπληρώστε τις ισότητες: $A\Delta = \dots = \dots$
- γ) Αποδείξτε ότι η γωνία ΔZH είναι ορθή.
- 37.** Οι γωνίες B και Δ τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθές. Αν K και Λ είναι τα μέσα των διαγωνίων $A\Gamma$ και $B\Delta$, να δείξετε ότι $K\Lambda \perp B\Delta$.
- Λύση: (Γράψτε τις παρακάτω προτάσεις στη σωστή σειρά ώστε να προκύψει η λύση του προβλήματος).
- *Ενώνουμε το K με τα B και Δ*
 - *Όμοια $K\Delta = \frac{A\Gamma}{2}$*
 - *Επειδή $BK\Delta$ ισοσκελές και $K\Lambda$ διάμεσος*
 - *Το $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και επειδή $KA = K\Gamma$ θα είναι $KB = \frac{A\Gamma}{2}$*
 - *θα είναι και ύψος δηλαδή $K\Lambda \perp B\Delta$*
 - *Άρα $KB = K\Delta$ και το $BK\Delta$ ισοσκελές*

38. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρνουμε το ύψος AH . Αν Δ , E , Z είναι τα μέσα των πλευρών AB , $A\Gamma$, $B\Gamma$ αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι το ΔEZH είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση: (Γράψτε τις παρακάτω προτάσεις στη σωστή σειρά ώστε να προκύψει η λύση του προβλήματος).

- Άρα απομένει να αποδείξουμε ακόμη ότι $EZ = \Delta H$
- Όμως είναι και $H\Delta = \frac{AB}{2}$, γιατί $H\Delta$ είναι διάμεσος του ορθογωνίου AHB και ισούται με το μισό της υποτεινούσας
- Άρα έχουμε $ZE = H\Delta$
- Το τμήμα EZ συνδέει τα μέσα των $A\Gamma$ και $B\Gamma$ και είναι $EZ = \frac{AB}{2}$
- Επειδή το ΔE συνδέει τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$, θα είναι $\Delta E \parallel B\Gamma$ και το ΔEZH θα είναι τραπέζιο

39. Δίνονται οι προτάσεις:

- α) Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
 - β) Ένα κυρτό τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν οι δύο πλευρές του είναι ίσες.
 - γ) Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.
- Από αυτές μία μόνο είναι σωστή. Επιλέξτε τη σωστή και αποδείξτε τη.

40. Σε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις υπάρχει κάποιο λάθος. Βρείτε το και δικαιολογήστε την απάντησή σας.

- α) Η μεγαλύτερη διαγώνιος ενός παραλληλογράμμου μπορεί να είναι ίση με το άθροισμα δύο διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου.
- β) Αν δύο γωνίες ενός τετραπλεύρου είναι ίσες, τότε το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.
- γ) Δύο διαδοχικές γωνίες ενός παραλληλογράμμου είναι οξείες.

41. Συμπληρώστε τις προτάσεις:
- α) Το παραλληλόγραμμο που έχει ίσες διαγωνίους λέγεται
 - β) Το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος λέγεται
 - γ) Στο τετράγωνο οι διαγώνιοι έχουν τις παρακάτω ιδιότητες:
 - i)
 - ii)
 - iii)
42. Από τις παρακάτω προτάσεις η μία είναι λανθασμένη. Ποια είναι αυτή; Πώς πρέπει να διατυπωθεί για να γίνει σωστή;
- α) Οι διαγώνιοι ενός τετραγώνου σχηματίζουν με τις πλευρές του γωνία 45° .
 - β) Το τετράγωνο είναι και ρόμβος.
 - γ) Κάθε παραλληλόγραμμο που η μια γωνία του είναι ορθή είναι τετράγωνο.
43. Εξετάστε αν ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
- α) έχει δύο γωνίες ορθές
 - β) έχει τις διαγωνίους του κάθετες
 - γ) είναι παραλληλόγραμμο και έχει τις διαγωνίους του ίσες.
- Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
44. Μια ευθεία (ϵ) τέμνει τις πλευρές ενός τριγώνου και χωρίζει το τρίγωνο σε ένα τετράπλευρο και σε ένα τρίγωνο. Να γράψετε τις προϋποθέσεις, που αφορούν το είδος του τριγώνου και τη σχετική θέση της ευθείας, ώστε το τετράπλευρο να είναι:
- α) τραπέζιο, β) ισοσκελές τραπέζιο.